ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу **Скрябіної Анни Вікторівни** *«Моделювання задач підрахунку та перерахування топологій на скінчених множинах»*, представлену на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

Дисертаційна робота Скрябіної Анни Вікторівни «Моделювання задач підрахунку та перерахування топологій на скінчених множинах» присвячена класифікації топологій на скінченних множинах. Загальні топологічні властивості скінченних топологічних просторів, мабуть, вперше розглянуті в роботі П.С. Александрова 1937 року. Також варто зазначити статтю R. E. Stong (1968), в якій описано класи топологічних просторів з точністю до гомеоморфізму, гомотопічної еквівалентності, та різноманітні топологічні властивості – зв'язність, неперервність відображень тощо, та статтю M. C. McCord (1966) про сигнулярні гомології та гомотопічні групи скінченних топологічних просторів.

Задача перерахунку топологій розглядалась в багатьох роботах і є актуальною і в сучасних дослідженнях (див. перелік посилань дисертації). В загальному випадку вона є дуже складною і тому повністю розв'язана лише для множин з невеликим числом елементів n. Проблема полягає в тому, що із зростанням числа n елементів скінченної множини число топологій на ній занадто швидко зростає. Наприклад, згідно онлайн енциклопедії послідовностей цілих чисел (https://oeis.org/A000798), для $n = 18$ кількість різних топологій записується числом з 36 цифр і дорівнює

$$261492535743634374805066126901117203.$$

Тому зазвичай накладаються додаткові обмеження на топології і також ставляться питання асимптотичної поведінки числа топологій із заданими властивосятми.

Одне з природних обмежень такої задачі класифікації полягає в тому, що достатньо розглядати лише T_0 топології. Дійсно, кожна T_1 топологія на скінченній множині автоматично є дискретною. З іншого боку, не T_0 топології отримуються з T_0 топологій «роздуванням» деяких точок на сім'ї попарно невіддільних точок, а тому задача перерахунку не T_0 зводиться за індукцією до перерахунків T_0 топологій на множинах з меншим числом елементів.

Існує багато підходів до дослідження та класифікації топологій на скінченних множинах.

Наприклад, задання T_0 топології на множині X еквівалентне заданню відношення часткового порядку. Дійсно, нехай точка x топологічного простору X «невіддільна» від деякої іншої точки $y \in X$, в сенсі, що кожен окіл x містить точку y. Це означає, що x належить замиканню одноточкової множини $\{y\}$ і це зручно позначати як $x \in \overline{y}$. Тоді легко бачити, що відношення «належати замиканню» $x \in \overline{y}$ є рефлексивним і транзитивним але, взагалі кажучи, не антисиметричним. Воно буде антисиметричним, а отже відношенням часткового порядку, тоді і лише тоді, коли X є T_0 простором. Навпаки, кожне відношення $\leq$ часткового порядку на множині X визначає топологію на

X базою якої є множини виду $U_x := \{y \in X \mid x \leq y\}$, для всіх $x \in X$ і для якої властивості $x \in \overline{y}$ та $x \leq y$ еквівалентні.

Розглянемо ще два інші підходи про які йде мова в дисертаційній роботі. Нехай τ – топологія на скінченній множині $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ з n елементів.

1) Оскільки сама топологія містить лише скінченне число множин, то перетин довільного числа відкритих множин також буде відкритою. Зокрема, для кожної точки x перетин M_x всіх її околів є найменшим околом цієї точки. Його також можна описати як $\{y \in X \mid x \in \overline{y}\}$, тобто він тотожний з множиною U_x визначеною вище.

Індексом точки $x \in X$ відносно топології τ називається кількість елементів в $M_x \setminus \{x\}$. Виявляється зручним впорядкувати точки за зростанням індексів, і відповідна неспадна послідовність індексів $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ називається *вектором топології* τ.

2) Топологія τ є деякою сім'єю підмножин з X, тобто підмножиною в 2^X, а тому її можна задати характеристичною функцією

$$f\colon 2^X \to \{0,1\}, f(A) = \begin{cases} 1, & A \in \tau, \\ 0, & A \notin \tau, \end{cases}$$

які називаються булевими функціями. Добре відомо, що кожна булева функція може бути записана у вигляді кон'юнктивної або диз'юнктивної нормальної форми. Характеризація булевих функцій на множині X, які визначають топології, отримана в роботі [46]. Виявилось, що такі булеві функції обов'язково записуються як кон'юнції виразів виду $x_i \vee \overline{x_j}$. Кожна така кон'юнкція означає, що для кожної відкритої множини $A \in \tau$ виконана хоча б одна з умов: A містить x_i або A не містить x_j. Еквівалентно, якщо A не місить x_i, то вона не повинна містити й x_j. Це означає, що мінімальний окіл M_{x_i} точки x_i повинен містити точку x_j, тобто x_i належить замиканню $\overline{x_j}$ одноточкової множини $\{x_j\}$.

Таким чином для пари точок $x_i, x_j \in X$ ми маємо наступні еквівалентні формулювання:

(1) $x_i \in \overline{x_j}$;
(2) $x_i \leq x_j$ в сенсі відношення визначеного вище;
(3) $M_{x_i} \supseteq M_{x_j}$;
(4) 2-КНФ топології τ містить множник $x_i \vee \overline{x_j}$.

Частина результатів дисертації полягає в перерахунку топологій з заданим вектором топології, а друга частина – в перерахунку топологій з заданими 2-КНФ. Також в дисертації розглядаються топології на множині з n елементів, у яких число множин $< 2^{n-1}$.

Коротко опишу структуру дисертації та отримані результати.

Розділ 1 містить огляд літератури та описує мотивації задач, що розв'язані в дисертації. В розділі 2 розглядаються різноманітні об'єкти, за допомогою яких можна класифікувати топології на скінченних множинах і взаємозв'язки між ними:

- вектор топології,
- 2-КНФ,
- відношення часткового порядку,

- графи (сагайдаки),
- $(0,1)$-матриці розміру $n \times n$, яка фактично задає відношення часткового порядку.

В розділі 3 містяться принципові результати дисертації про число топологій на n-елементній множині X з вагою (числом елементів) $2^{n-2} < k \leq 2^{n-1}$. Ключовий підхід полягає в тому, щоб видалити один елемент x_n максимального індексу і розглянути топологію на доповненні $X \setminus x_n$. Теорема 3.4 описує вагу топологій з векторами $(0,\ldots,0,1,\alpha_n)$, де $2 \leq \alpha_n \leq n-1$, та $(0,\ldots,0,2,2)$ для $n \geq 5$; теорема 3.5 – вагу топологій з векторами $(0,\ldots,0,2,\alpha_n)$, де $3 \leq \alpha_n \leq n-1$, та $(0,\ldots,0,3,3)$ для $n \geq 5$; теорема 3.6 – вагу топологій з векторами $(0,\ldots,0,3,4)$ для $n \geq 5$ та деякими додатковими умовами на співвідношення між мінімальними околами точок; теорема 3.7 – вагу топологій з векторами $(0,\ldots,0,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ для $n \geq 5$, $3 \leq \alpha_{n-1} \leq n-2$, $4 \leq \alpha_n \leq n-1$; теорема 3.8 – вагу топологій з векторами $(0,\ldots,0,1,1,\alpha_n)$; і теорема 3.9 – вагу топологій з векторами $(0,\ldots,0,1,\ldots,1,\alpha_n)$. Отримані оцінки дозволяють довести теореми 3.10 та 3.11 про існування топологій на n-елементній множині, які узгоджені або не узгоджені з топологіями близькими до дискретної на $(n-1)$-елементній множині.

Підрозіл 3.3 присвячено взаємозв'язку взаємно двоїстих та самодвоїстих топологій за допомогою 2-КНФ булевих функцій (теореми 3.12 та 3.13).

В підрозділі 3.4 отримано опис векторів всіх T_0-топологій з вагою $25 \cdot 2^{n-6}$ (теорема 3.14).

Дисертація також містить додаток з програмою для побудови 2-КНФ булевої функції для $3 \leq n \leq 6$.

Є декілька зауважень до тексту дисертації.

1. стор. 30 і далі по тексту замість терміну *колчан* правильніше вживати слово *сагайдак*.

2. стор. 32, рядок 11 знизу, замість $n > 2^{n-1}$ потрібно написати тільки $> 2^{n-1}$.

3. стор. 34, означення 2.3 вектора топології. Оскільки множина X записана як набір точок $\{x_1,\ldots,x_n\}$, а вектор топології – це *неспадна* послідовність $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, то варто було б підкреслити про домовленість, що елементи множини X впорядковані за зростанням числа елементів в їх мінімальних околах. Це далі використовується в формулюванні теореми 2.3, в якій вектор топології на множині $X \setminus x_n$ має вигляд $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$.

4. стор. 36, наслідок 2.3. Не зрозуміло, що таке *m-класи близьких до дискретної топологій*

5. Для статті [44] списку літератури doi-посилання

https://doi.org/10.1590/0102-4698136686

вказує на іншу статтю.

6. стор. 38, приклад 2.3. В ньому йде мова про підсім'ю

$$A = \{\varnothing, \{x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\},$$

множини $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Сказано, що цій підсім'ї відповідає булева функція з таким вектором значень:

1000 1000 0010 0101

Таке формулювання має на увазі лексикографічне впорядкування всіх підмножин множини X, і наскільки я розумію, послідовність одиниць в даному векторі відповідає елементам сім'ї A взятих в протилежному порядку: тобто перша одиниця відповідає множині $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а остання – порожній множині $\varnothing$. Варто було б детальніше прояснити цю відповідність.

7. стор. 55, рядок 5 знизу: згадується, що в роботі [3] було запропоновано кожній топології ставити у відповідність $(0, 1)$-матрицю порядку n. Варто зазначити, що ця матриця також отримується з кососиметричної матриці розглянутої в роботі R.E.Stong [теорема 1, 41], заміною всіх -1 на 0.

Вказані недоліки носять технічний характер, легко виправляються і не впливають ні на результати дисертації ані на загальне позитивне враження від неї. Результати дисертації є новими, цікавими і можуть мати практичні застосування в комп'ютерному моделюванні.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація відповідає вимогам наказу МОН України №40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» (з наступними змінами) та «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022, а її авторка, Скрябіна Анна Вікторівна, заслуговує присудження їй ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

Офіційний опонент
член кореспондент НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, професор,
завідувач відділу алгебри і топології
Інституту математики НАН України

Сергій МАКСИМЕНКО

Підпис Максименка С. І. засвідчую
Учений секретар
Інституту математики НАН України,
кандидат фіз.-мат. наук

Ігор СОКОЛЕНКО

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
Ідентифікаційний код 05417207
м. Київ