

## РЕЦЕНЗІЯ

на дисертаційну роботу

**Скрябіної Анни Вікторівни**

на тему «Моделювання задач підрахунку та перерахування топологій на скінченній множині», представлену на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – Прикладна математика

### **Актуальність теми дисертації**

Топологія є надзвичайно універсальним інструментом для вивчення фундаментальних властивостей форм і структур різноманітних об'єктів. Тому теорія топологій на скінченних множинах сьогодні розвивається паралельно з іншими математичними теоріями і має численні застосування.

Задача перерахування топологій на скінченній множині була вперше сформульована як задача теорії графів і є еквівалентною задачі перерахування транзитивних орієнтованих графів. Існування бієкції між множиною топологій на скінченній множині та множиною всіх передпорядків на цій множині дає змогу використовувати дослідження однієї з цих структур для отримання нових результатів при дослідженні іншої структури. У термінах відношення порядку можна дати означення деяких понять алгебраїчної топології. Окрім того, для застосувань топологій на скінченних множинах важливу роль має задача перерахування гомотопічних типів скінченних множин. Ця задача тісно пов'язана з цифровою обробкою зображень на основі скінченних наборів спостережень, тобто намаганням зрозуміти зміст зображення на основі поняття близькості точок. У хімії топологічну структуру на скінченних множинах використовують для аналізу молекулярних структур.

Слід також зазначити, що задача перерахування топологій на скінченній множині є однією з дотепер нерозв'язаних задач. Аналіз публікацій свідчить про те, що топології на скінченній множині моделювались за допомогою різних математичних об'єктів – графів, матриць, упорядкованих наборів цілих невід'ємних чисел, булевих функцій. У кожній з цих моделей є і переваги, і недоліки. У більшості опублікованих робіт ставилась задача підрахунку кількості топологій з певним числом відкритих множин і недостатньо уваги приділялось дослідженню структури топологій.

Саме тому дисертаційна робота А. В. Скрябіної, яка присвячена дослідженню структури топологій визначених класів на довільній скінченній множині, перерахуванню та підрахунку їх кількості, є актуальною. У роботі визначені такі основні завдання:

- дослідити взаємозв'язок між  $T_0$ -топологіями на  $n$ -елементній та  $(n - 1)$ -елементній множинах;
- перерахувати вектори всіх  $T_0$ -топологій на  $n$ -елементній множині з вагою  $2^{n-2} < m \leq 2^{n-1}$ , які є узгодженими з  $T_0$ -топологіями, близькими до дискретної на  $(n - 1)$ -елементній множині (вага топології – кількість  $m$  відкритих множин у цій топології);
- побудувати теоретичні засади використання булевих функцій для моделювання топологій на скінченній множині;
- розробити метод розпізнавання взаємно двоїстих та самодвоїстих  $T_0$ -топологій.

### **Оцінка обґрунтованості наукових результатів дисертації, їх достовірності та новизни**

Наукова новизна отриманих у дисертаційній роботі результатів проведеного *вперше* систематичного дослідження топології з вагою  $2^{n-2} < m \leq 2^{n-1}$  полягає в наступному:

- перераховано вектори всіх  $T_0$ -топологій з вагою  $2^{n-2} < m \leq 2^{n-1}$  на  $n$ -елементній множині, які є узгодженими з  $T_0$ -топологіями близькими до дискретної на  $(n - 1)$ -елементній множині. Результати щодо структури  $T_0$ -топологій з вагою  $2^{n-2} < m < 5 \cdot 2^{n-4}$  отримано *вперше* за рахунок *подальшого розвитку* методів представлення топологій векторами топологій та 2-КНФ булевих функцій;
- доведено, що у  $m$ -класах топологій з вагою  $m \in [13 \cdot 2^{n-5}, 2^{n-1}]$  всі  $T_0$ -топології є або узгодженими з близькими до дискретної, або двоїстими до них;
- показано, що існують  $m$ -класи топологій з вагою  $m \in (2^{n-2}, 2^{n-1}]$ , які:
  - а) не вичерпуються  $T_0$ -топологіями, узгодженими з  $T_0$ -топологіями, близькими до дискретної;

б) не містять жодної  $T_0$ -топології, узгодженої з  $T_0$ -топологіями, близькими до дискретної. Знайдено вектори  $T_0$ -топологій з таких класів;

- знайдено такі натуральні числа  $2^{n-2} < m \leq 2^{n-1}$ , для яких не існує жодної топології з вагою  $m$ ;

- *уведено нове поняття* – максимальної 2-КНФ булевої функції, яка визначає топологію на скінченній множині;

- *доведено* існування бієкції між множиною топологій на  $n$ -елементній множині та множиною максимальних 2-КНФ від  $n$  змінних;

- *розроблено метод* розпізнавання взаємно двоїстих та самодвоїстих  $T_0$ -топологій;

- перераховано всі максимальні 2-КНФ негомеоморфних  $T_0$ -топологій на 4- та 5-елементній множинах та підраховано число всіх топологій на цих множинах.

Достовірність отриманих результатів забезпечена коректним застосуванням відповідного математичного апарату та проведенням обчислювальних експериментів.

Наукові положення, висновки та рекомендації достатньо обґрунтовані, базуються на сучасних вітчизняних та зарубіжних джерелах, а також правильно використовують різні методи та підходи до представлення топологій.

У дисертаційній роботі для дослідження топологій на скінченних множинах використані дві моделі топологій: у першій моделі кожна топологія представляється неспадною послідовністю цілих невід'ємних чисел, які визначають мінімальні околиці всіх елементів топології (вектором топології); у другій моделі кожній топології відповідає біюнктивна слабо додатна та слабо від'ємна булева функція, яка має кон'юнктивну форму спеціального виду (максимальну 2-КНФ). У роботі використовується зв'язок між топологіями на  $n$ -елементній та  $(n - 1)$ -елементній множинах, який описано за допомогою відношення узгодженості топологій, а також той факт, що достатньо досліджувати лише  $T_0$ -топології.

Дослідження та отримані в роботі результати відповідають основним напрямкам наукових досліджень, які проводяться в Запорізькому національному університеті. Зокрема, ця робота виконувалася відповідно до планів наукових досліджень кафедри загальної математики Запорізького

національного університету МОНУ в рамках теми «Актуальні проблеми сучасної математики».

**Практичне значення** результатів дослідження полягає в отриманні нових результатів про структуру топологій з вагою  $2^{n-2} < m \leq 2^{n-1}$ , які є важливими для задачі перерахування та підрахунку всіх топологій на  $n$ -елементній множині.

Отримані в дисертаційній роботі результати – побудовані моделі топологій на скінченних множинах, доведені теореми про вагу досліджуваних топологій, виявлені нові класи топологій – можуть бути використані не тільки топологами, а й спеціалістами з дискретної математики та математичної логіки.

Уведене в роботі поняття максимальної 2-КНФ, яка є єдиною для кожної топології, і за якою можна однозначно відновити топологію, може бути використане для подальшого дослідження структури топологій та розробки методик підрахунку всіх топологій на заданій скінченній множині. Також для практичного застосування в інших галузях прикладної математики корисним буде поширення цього апарату на будь-які частково впорядковані множини, які виникають, зокрема, при дослідженнях в алгебраїчній топології, геометріях на скінченних множинах тощо.

Отримані результати сприятимуть поглибленню використання топологічної структури в хімії для аналізу молекулярних структур, в інформатиці для цифрової обробки зображень та інших сферах.

### **Оцінка змісту дисертації, її завершеність**

Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У вступі визначено актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету і завдання, об'єкт, предмет, методи дослідження, наукову новизну та практичне значення одержаних результатів.

Розділ 1 присвячено аналізу публікацій, пов'язаних із темою дисертації. Зазначено особливості топологічної структури на скінченній множині. У цьому ж розділі відзначена особлива роль  $T_0$ -топологій для задачі підрахунку всіх топологій на довільній скінченній множині.

У розділі 2 особлива увага приділена опису методів та моделей для представлення топологій, оцінці їх переваг та недоліків, зокрема:

- обґрунтована можливість представлення топологій вектором топології;

- описано моделювання топологій булевими функціями, введено нове поняття максимальної 2-КНФ булевої функції, яка задає топологію, обґрунтовано існування бієктивної відповідності між множиною всіх топологій на  $n$ -елементній множині та множиною максимальних 2-КНФ від  $n$  змінних.

Розділ 3 присвячено дослідженню топологій з вагою  $2^{n-2} < m \leq 2^{n-1}$  на  $n$ -елементній множині:

- перераховано вектори всіх  $T_0$ -топологій з вагою  $2^{n-2} < m \leq 2^{n-1}$  на  $n$ -елементній множині, які є узгодженими з  $T_0$ -топологіями, близькими до дискретної на  $(n - 1)$ -елементній множині, причому результати щодо  $T_0$ -топологій з вагою  $2^{n-2} < m < 5 \cdot 2^{n-4}$  отримано вперше. Доведено, що у  $m$ -класах топологій з вагою  $m \in [13 \cdot 2^{n-5}, 2^{n-1}]$  усі  $T_0$ -топології є або узгодженими з близькими до дискретних, або двоїстими до них;

- доведено існування  $m$ -класів топологій з вагою  $m \in (2^{n-2}, 2^{n-1}]$ , які не вичерпуються  $T_0$ -топологіями, узгодженими з  $T_0$ -топологіями, близькими до дискретної; наведено приклад  $m$ -класа, в якому немає жодної  $T_0$ -топології, узгодженої з  $T_0$ -топологіями, близькими до дискретної. Знайдено такі натуральні числа  $2^{n-2} < m \leq 2^{n-1}$ , для яких не існує жодної топології з вагою  $m$ ;

- розроблено метод розпізнавання взаємно двоїстих та самодвоїстих  $T_0$ -топологій. Для тестування ефективності такого підходу було перераховано всі максимальні 2-КНФ негомеоморфних  $T_0$ -топологій на 4- та 5-елементній множині та підраховано число всіх топологій на цих множині.

Отже, в дисертаційній роботі поставлене наукове завдання дослідження структури топологій з вагою  $2^{n-2} < m \leq 2^{n-1}$ , їх перерахування та підрахунок кількості топологій у класах на довільній скінченній множині виконано повністю, здобувач повною мірою оволодів методологією наукової діяльності.

### **Оприлюднення результатів дисертаційної роботи**

Основний зміст дисертації викладено у 20 опублікованих роботах: 3 статтях в наукових журналах, що входять до переліку спеціалізованих журналів, затверджених МОН України, у тому числі 2 статтях у журналах,

включених до міжнародних баз даних Scopus або Web of Science; 17 тезах доповідей у збірниках праць наукових конференцій.

Науковий рівень публікацій здобувача є високим, отримані результати – суттєвими. Особистий внесок здобувача до публікацій за співавторством є вагомим, принципів академічної доброчесності в жодній із публікацій не порушено.

Наукові результати, описані в дисертаційній роботі, повністю висвітлені в наукових публікаціях здобувача.

### **Недоліки та зауваження до дисертаційної роботи**

Дисертаційне дослідження Скрябіної А. В. виконано на високому науковому рівні, проте його окремі положення мають дискусійний характер, що зумовило висловлення таких зауважень і рекомендацій.

1. При введенні нового поняття «максимальна 2-КНФ булевої функції» (с. 44) було б доцільно навести опис алгоритму її побудови, удосконаливши при цьому алгоритм, викладений на с. 40.

2. При доведенні, що серед  $T_0$ -топологій на  $n$ -елементній множині з вагою  $2^{n-2} < |\tau| \leq 2^{n-1}$  не всі є узгодженими з близькими до дискретної на  $(n - 1)$ -елементній множині, декларовано, але, на жаль, не наведено умови на мінімальні околиці елементів, за яких вага топології належить цьому проміжку (с. 87).

3. Не зовсім вдалою, на мій погляд, є структура роботи (зокрема, з точки зору розподілу матеріалу між розділами) та назви розділів. Деякі матеріали підрозділів (пп. 2.1, 2.3 – 2.5) можна було б розмістити у розділі 1.

4. У тексті роботи не завжди чітко виділені результати, які отримані власне автором (наприклад, на сс. 56, 60 (лема 2.7), 62 (властивості сіток) тощо).

5. У тексті роботи зустрічаються не зовсім вдалі: означення (с. 55, означення 2.8), термінологія («клітинна матриця» замість «блочна», с. 58), рисунки (рис. 2.2, с. 52).

Проте слід зазначити, що висловлені зауваження не зменшують загальну наукову новизну та практичну значимість результатів і не впливають на позитивну оцінку дисертаційної роботи.

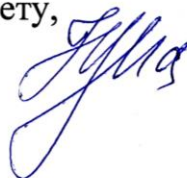
## Висновок про дисертаційну роботу

Дисертаційна робота Скрябіної Анни Вікторівни «Моделювання задач підрахунку та перерахування топологій на скінченній множині» є завершеною науковою працею, виконана на високому науковому рівні та не порушує принципів академічної доброчесності.

Текст дисертації за актуальністю, практичною цінністю та науковою новизною відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022 зі змінами, внесеними Постановою Кабінету Міністрів № 341 від 21.03.2022. Авторка дисертації – Скрябіна Анна Вікторівна – заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – Прикладна математика.

### Рецензент:

Завідувач кафедри економічної кібернетики  
Запорізького національного університету,  
доктор економічних наук, професор



Наталія МАКСИШКО

Підпис Максишко Н.К. засвідчено

Вчений секретар ЗНУ



Оксана ПРОЦЕНКО