ВІДГУК

офіційного опонента Банаха Тараса Онуфрійовича

на дисертаційну роботу Скрябіної Анни Вікторівни

«Моделювання задач підрахунку та

перерахування топологій на скінченній множині»,

представлену на здобуття наукового ступеня доктора філософії в галузі знань 11 – Математика та статистика за спеціальністю 113 – Прикладна математика

Актуальність теми дисертації

Дисертаційна робота Анни Скрябіної присвячена класичній відкритій комбінаторній проблемі підрахунку кількості топологій на n-елементній множині. Ця задача виникає вже на початкових заняттях з загальної топології, відразу після введення поняття топології. Для розуміння абстрактного поняття топології дуже корисно продемонструвати студентам всеможливі топології на дво та три-елементних множинах. Добре відомо, що на двоелементній множині таких топологій є рівно чотири: антидискретна, дискретна і дві (гомеоморфні між собою) топології зв'язної двокрапки. Аналогічна задача підрахунку всеможливих топологій на три-елементній множині є суттєво складнішою (хоча все ще доступною для студентів) задачею, яка вимагає інтелектуальних зусиль та вправності, щоб жодної з 29 можливих топології не упустити. Зі зростанням n ця задача експоненційно ускладнюється і швидко виходить за межі людських чи комп'ютерних можливостей. На даний момент точна кількість топологій на n-елементній множині відома лише для $n \le 18$. З іншого боку відома асимптотична оцінка цієї кількості: її логарифм за основою 2 лежить в інтервалі

$$\left[\frac{1}{4}n^2, \qquad \frac{1}{4}n^2 + Cn^{\frac{3}{2}}\ln n\right]$$

для певної сталої C. Цю асимптотичну оцінку довели Kleitman та Rothschild у 1970 році. Проте публікації по цій тематиці регулярно продовжуть з'являтися у комбінаторно-топологічно-порядково-матрично-графовій літературі. Не бракує і популярних відео на цю ж так і не вирішену відкриту проблему. Серед математиків, які спричинилися до розвитку цієї тематики мжна згадати прізвища Sharp, Jn. H. Evans J. W., Stong R., Borevich Z.I., Jn.H., Stanley R. , D. Stephen, M. Kolli та багато інших. Тому тема дисертації є актуальною і має шанси ще довго такою залишатися, допоки залишатиметься нерозв'язаною основна проблема підрахунку кількості топологій на n-елементній множині.

Зміст та структура дисертації

Текст дисертації є чітко структурованим, матеріал розташовано в логічній послідовності. Для покращення розуміння матеріалу, текст дисертації містить численні приклади. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, посилань та додатку (в якому можна знайти код програми для побудови 2-КНФ булевої функції).

У вступі визначено актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету та завдання, об'єкт, предмет, методи дослідження, наукову новизну та практичне значення одержаних результатів.

В розділах 1 та 2 дисертаційної роботи зроблено аналіз публікацій та методів дослідження топологій на скінченних множинах від часу формулювання задачі й дотепер. Обгрунтовано можливість представлення топологій вектором топології, а також існування бієктивної відповідності між множиною всіх топологій на n-елементній множині та множиною максимальних 2-КНФ від n змінних.

У розділі 3 проведено дослідження топологій з вагою $2^{n-2} < k \leq 2^{n-1}$ на n-елементій множині, яке базується на використанні двох моделей топологій: в першій моделі кожна топологія представляється неспадною послідовністю цілих невід'ємних чисел, які визначають мінімальні околи всіх елементів топології (вектором топології); в другій моделі кожній топології відповідає біюнктивна слабо додатна та слабо від'ємна булева функція, яка має кон'юнктивну нормальну форму спеціального виду (максимальну 2-КНФ).

Наукова новизна, обгрунтованість результатів дослідження

В дисертаційній роботі Скрябіної А.В. отримано нові наукові результати:

- розширено можливості використання векторів топологій та 2-КНФ булевих функцій для описання та систематичного дослідження топологій з вагою $2^{n-2} < k \leq 2^{n-1}$. Результати щодо структури T_0-топологій з вагою $2^{n-2} < k < 5 \cdot 2^{n-4}$ отримано вперше;
- ефективно використано зв'язок між топологіями на n-елементній та $(n-1)$-елементній множинах, який описано за допомогою відношення узгодженості топологій: доведено, що у k-класах топологій з вагою $k \in [13 \cdot 2^{n-5}, 2^{n-1}]$ всі T_0-топології є або узгодженими з близькими до дискретної, або двоїстими до них; показано, що існують k-класи топологій з вагою $k \in (2^{n-2}, 2^{n-1}]$, які а) не вичерпуються T_0-топологіями, узгодженими з T_0-

топологіями близькими до дискретної і б) не містять жодної T_0-топології, узгодженої з T_0-топологіями близькими до дискретної. Знайдено вектори T_0-топологій з таких класів;

- уведено нове поняття – максимальної 2-КНФ булевої функції, яка визначає топологію на скінченній множині й доведено існування бієкції між множиною топологій на n-елементній множині та множиною максимальних 2-КНФ від n змінних;
- розроблено метод розпізнавання взаємно двоїстих та самодвоїстих T_0-топологій.

Результати дисертаційної роботи є обгрунтованими та достовірними. Запропоновані для підрахунку топологій методи (вектори топологій та булеві функції) є дуже цікавими та незвичними, принаймні як на погляд людини з загально-топологічною освітою. Отримані цими новими методами результати підтвердили наявні результати щодо підрахунку топології, але також дозволили отримати нові цікаві та важливі результати у цій актуальній тематиці.

Всі отримані результати опубліковані в трьох статтях у наукових спеціалізованих журналах, в тому числі 2 статтях у журналах, включених до міжнародних баз даних Scopus або Web of Science, та 17 тезах наукових конференцій.

Зауваження

1. Дисертацію оформлено у Word, а не звичній для математиків видавничій системі LaTeX.
2. У 5-й лінійці 6-ї сторінки пропущена крапка в кінці речення.
3. В огляді літератури вартувало б згадати про асимптотичну оцінку кількості топологій на n-елементній множині, яку довели Kleitman та Rothschild у 1970. Ця оцінка показує, що кількість топологій таки значно менша від кількості всеможливих сімей підмножин n-елементної множини. Цікаво зауважити, що відповідна стаття включена до списку літератури (під номером [16]), проте без прізвища Rothschold серед авторів.
4. Починаючи зі сторінки 27 і далі часто згадуються помічені топології, але жодного означення поміченості в дисертації знайти не вдалося, при тому, що «поміченість» топології не є загальновідомим поняттям (принаймні серез загальних топологів).

5. На сторінці 35 кількість відкритих множин топології називається її *вагою*. З іншого боку, в загальній топології під вагою топології розуміють мінімальну потужність бази топології (для скінченних топологічних просторів, це кількість мінімальних околів точок, які в теорії навчальних просторів називають «атомами»).

6. У прикладах 2.2 та 2.4 на сторінці 38 йде мова про вектори значень булевої функції. При цьому бажано було б згадати про (напевно лексикографічний) порядок на сім'ї усіх підмножин, який використовується для запису такого вектора значень.

7. На сторінці 39 в означенні біюнктивної функції фігурує змінна в степені, яка є булевою константою. Яким чином булеві змінні підносяться до булевих константних степенів не пояснюється, хоча з наступних прикладів стає зрозуміло, що мова йде про тотожну булеву функцію та про унарну функцію заперечення.

8. Можна дискутувати щодо терміну «колчан», який є калькою з відповідного російського терміна. В українській мові «колчан» перекладається як «сагайдак», хоча, можливо, при перекладі математичних термінів вступають в гру якісь інші закони.

9. *Точка дотикання* мала б бути *точкою дотику*.

10. Теорема 2.19 нагадує швидше означення, а не теорему, тим більше, що вона не супроводжується жодним доведенням, ані посиланням.

11. У прикладі застосування 2-КНФ для перерахунку всеможливих топологій на 4-елементній множині вартувало б пояснити, чому ця класифікація вичерпує усі топології і чому топології з 6,7,8,9,10,12,16 відкритими множинами єдині (принаймні так можна розуміти викладки на сторінці 90-94).

12. Список літератури можна було б оформити акуратніше. Зокрема дописати упущеного автора в цитуванні [17], а також згадати журнал «Algebra and Discrete Mathematics", де в 2019 році був опублікований препринт [15].

Висновок

Попри наведені вище зауваження, дисертаційна робота Скрябіної Анни Вікторівни на тему «Моделювання задач підрахунку та перерахування топологій на скінченній множині» справляє дуже хороше позитивне враження, є завершеною науковою працею і містить низку цікавих та нових результатів. Актуальність теми дисертації, новизна отриманих в ній наукових результатів, їх теоретичне та практичне значення свідчать про відповідність вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (Постанова Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022 зі змінами, внесеними Постановою Кабінету Міністрів № 341 від 21.03.2022). Вважаю, що автор дисертаційної роботи Скрябіна Анна Вікторівна заслуговує на присудження їй ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – Прикладна математика.

Офіційний опонент (підпис) проф. Банах Тарас Онуфрійович
д.ф.м.н., завідувач кафедри алгебри, топології та основ математики

Підпис професора Банаха Т.О. засвідчую

Підпис Банаха Т.О.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ імені ІВАНА ФРАНКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА
ЗКПО 02070987