

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кваліфікаційна наукова праця  
на правах рукопису

**ДЗУНДЗА НАТАЛІЯ СЕРГІЇВНА**

УДК 539.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ПРУЖНИХ ШАРУВАТИХ ТІЛ  
ТА СЕРЕДОВИЩ З ОРТОТРОПНИМИ ШАРАМИ**

Спеціальність: 113 Прикладна математика

Галузь знань: 11 Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня **доктора філософії**

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Н.С. Дзундза

Науковий керівник: Зіновєєв Ігор Валерійович

к.ф.-м.н., доцент

Запоріжжя – 2024

## АНОТАЦІЯ

**Дзундза Н. С. Напружено-деформівний стан пружних шаруватих тіл та середовищ з ортотропними шарами.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 “Прикладна математика”. – Запорізький національний університет, Запоріжжя, 2024.

Дисертаційна робота присвячена розв’язанню задач про визначення напружено-деформівного стану (НДС) ортотропних шарів, півплощин, шаруватих ортотропних середовищ, таких як шар зчеплений з пружним півпростором, багат шарові основи.

Основна частина дисертації складається з вступу, чотирьох розділів та висновків.

У вступі обґрунтовано актуальність тематики дослідження, сформульовано мету та завдання дослідження, визначено об’єкти, методи та предмети дослідження, визначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів. Описано особистий внесок здобувача, виконаних у співавторстві, подано дані щодо апробації результатів дисертації, наведено перелік публікацій, в яких відображено результати дисертаційної роботи.

У першому розділі викладено огляд основних методів і підходів, які використовуються для моделювання і аналізу напружено-деформівного стану тіл та середовищ у механіці деформівного твердого тіла.

Проведено аналіз підходів до визначення напружено-деформівних станів тіл, таких як ортотропні пластини, оболонки, смуги та багат шарові основи, зокрема аналітичних, чисельних та чисельно-аналітичних методів.

Проведений аналіз сучасного стану наукових досліджень за темою дисертації, дозволив зробити висновок про збільшення інтересу до методів визначення напружено-деформівного стану ортотропних шаруватих тіл. Вивчення інформаційних джерел показує ефективність застосування методу

функцій податливості до розв'язання задач теорії пружності з ізотропними та трансверсально ізотропними шарам, та не застосовувався для ортотропних тіл.

Другий розділ присвячений розв'язанню задач про визначення напружено-деформівного стану пружних ортотропних тіл, таких як шар та півпростір в умовах плоскої деформації.

Першою розглядається задача визначення напружень та переміщень в пружному ортотропному шарі постійної товщини під дією зовнішнього навантаження. Задача формулюється в трьох постановках, які відповідають основним крайовим (межовим) задачам механіки деформованого твердого тіла.

Розв'язок задачі шукається в просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є та базується на розв'язанні аналогу бігармонічного диференціального рівняння для ортотропного матеріалу. Трансформанти шуканих величин виражаються через трансформанту функції напружень. Побудовано розрахункові формули із врахуванням всіх можливих типів функції напружень в просторі трансформант та граничних умов задачі.

У другому пункті розглядається задача визначення напружень та переміщень в пружному ортотропному півпросторі в умовах плоскої деформації. Відомими є модулі пружності та задане навантаження на верхній межі. На нескінченності напруження прямують до нуля. Окремим випадком розглядається задача про дію зосередженої сили нормальної до поверхні пружної однорідної, суцільної ортотропної півплощини.

На базі отриманих аналітичних розв'язків для ортотропного шару та півплощини проведено числові розрахунки конкретних задач, побудовано графіки шуканих величин та виконано їх аналіз.

Отримані розрахунки свідчать про адекватність результатів і логічність застосування обраного методу.

В третьому розділі розглядається задача визначення НДС ортотропного шару постійної товщини зчепленого з ортотропною півплощиною. На верхній

межі шару діє зовнішнє навантаження. На нескінченності напруження прямують до нуля.

Запропонований підхід до розв'язання задачі базується на застосуванні методу одновимірного інтегрального перетворення Фур'є. Пошук невідомих величин ведеться в просторі трансформант Фур'є. Отримано чисельно-аналітичний розв'язок поставленої задачі, проведено числові розрахунки та виконано їх аналіз.

В четвертому розділі наведено розв'язання задачі про визначення напруження та переміщення в багатошаровій основі з ортотропними шарами. Зовнішнє навантаження основи є таким, що деформація основи є плоскою. Об'ємні навантаження відсутні. Багатошарова основа являє собою пакет з  $n$  необмежених в плані плоско паралельних зчеплених між собою пружних ортотропних шарів, які зчеплені з півпростором, пружним або абсолютно жорстким. Кожен шар вважається однорідним, невагомим, ортотропним та характеризується товщиною і пружними константами – коефіцієнтами Пуасона та модулями Юнга.

Розв'язок поставленої задачі шукається в просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є. В основу розв'язання покладено метод функцій податливості.

Розроблений раніше для ізотропних багатошарових основ метод функцій податливості поширений в цій роботі на багатошарові основи з ортотропними шарами, отримано всі необхідні розрахункові формули, адаптовано алгоритм розв'язання.

Досліджено функції податливості для багатошарової ортотропної основи та виведено рекурентні формули для функцій податливості шарів основи. Сформульований алгоритм розв'язання поставленої задачі враховує особливості властивостей ортотропного матеріалу і дозволяє отримувати чисельно-аналітичні розв'язки.

Отримано розв'язки конкретних задач для тришарової основи та проведено їх аналіз.

На основі виконаного дослідження за кожним розділом сформульовано висновки, а також зроблені висновки за дисертаційною роботою.

Таким чином у дисертаційній роботі було вирішено актуальну проблему розробки ефективного підходу до визначення напружено-деформівного стану тіл (шарів, півплощин, двошарових тіл та багатошарових основ) з урахуванням ортотропії матеріалу.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у наступному: сформульовано постановки задач для багатошарової основи з ортотропними шарами, побудовано математичну модель і запропоновано підхід до розв'язання для ортотропного матеріалу, тим самим дістали подальшого розвитку математичні моделі механіки багатошарових середовищ та метод функцій податливості; вперше отримано розрахункові формули для ортотропного шару, ортотропного півпростору, двошарового та багатошарового тіла в умовах плоскої деформації, що враховують три випадки коренів характеристичного рівняння; вперше поширено метод функцій податливості, розроблений для багатошарових основ з ізотропними шарами, на задачі для багатошарових основ з ортотропними шарами; вперше проведене дослідження та виведені рекурентні формули функцій податливості для багатошарової ортотропної основи; розв'язано задачу про дію поверхневого навантаження на шар і півплощину та багатошарове тіло для ортотропного матеріалу методом інтегрального перетворення Фур'є.

Практична цінність результатів роботи полягає в можливості застосування розробленого методу в задачах розрахунку напружень і переміщень в шаруватих ортотропних тілах, аналізу та проектування шаруватих структур з ортотропними шарами.

*Ключові слова:* напружено-деформівний стан, ортотропний матеріал, пружний ортотропний шар, ортотропна півплощина, багатошарова основа, плоска деформація, функція напружень, функція податливості, інтегральне перетворення Фур'є.

## ABSTRACT

**Dzundza N. S. Stress-strain state of elastic layered bodies and media with orthotropic layers.** – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript. Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 “Applied Mathematics”. – Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, 2024.

This dissertation is devoted to solving problems on determining the stress-strain state (SSS) of orthotropic layers, half-planes, layered orthotropic media, such as a layer coupled to an elastic half-space, and multilayer bases.

The main part of the thesis consists of an introduction, four chapters, and conclusions.

The introduction substantiates the relevance of the research topic, formulates the purpose and objectives of the study, defines the objects, methods and subjects of the study, and identifies the scientific novelty and practical significance of the results. The personal contribution of the applicant to the work performed in co-authorship is described, data on the approbation of the results of the dissertation are presented, and a list of publications reflecting the results of the dissertation is provided.

The first chapter provides an overview of the main methods and approaches used to model and analyze the stress-strain state of bodies and media in deformable solid mechanics.

The approaches to determining the stress-strain state of bodies such as orthotropic plates, shells, strips, and multilayers, including analytical, numerical, and numerical-analytical methods, are analyzed.

The analysis of the current state of scientific research on the topic of the dissertation has led to the conclusion that there is an increasing interest in methods for determining the stress-strain state of orthotropic layered bodies. The study of information sources shows the effectiveness of the method of elasticity functions for

solving problems of elasticity theory with isotropic and transversally isotropic layers, but it has not been used for orthotropic bodies.

The second section is devoted to solving problems on determining the stress-strain state of elastic orthotropic bodies, such as a layer and a half-space under plane deformation.

The first problem considered is the determination of stresses and displacements in an elastic orthotropic layer of constant thickness under the action of an external load. The problem is formulated in three formulations that correspond to the basic boundary value problems of mechanics of a deformed solid.

The solution of the problem is sought in the space of transformants of the one-dimensional integral Fourier transform and is based on the solution of the analog of the biharmonic differential equation for an orthotropic material. The transformants of the desired quantities are expressed through the transformant of the stress function. The calculation formulas are constructed taking into account all possible types of the stress function in the space of transformants and the boundary conditions of the problem.

In the second paragraph, we consider the problem of determining stresses and displacements in an elastic orthotropic half-space under plane deformation. The elastic moduli and the given load at the upper boundary are known. At infinity, the stresses tend to zero. As a special case, we consider the problem of the action of a concentrated force normal to the surface of an elastic homogeneous, continuous orthotropic half-plane.

On the basis of the obtained analytical solutions for the orthotropic layer and the half-plane, numerical calculations of specific problems are carried out, graphs of the desired values are plotted, and their analysis is performed.

The obtained calculations indicate the adequacy of the results and the logical application of the chosen method.

In the third section, we consider the problem of determining the SSS of an orthotropic layer of constant thickness coupled to an orthotropic half-plane. An

external load acts on the upper boundary of the layer. At infinity, the stress tends to zero.

The proposed approach to solving the problem is based on the use of the one-dimensional integral Fourier transform method. The search for unknown quantities is carried out in the space of Fourier transforms. A numerical-analytical solution to the problem is obtained, numerical calculations are performed, and their analysis is performed.

The fourth section presents a solution to the problem of determining stresses and displacements in a multilayer base with orthotropic layers. The external load of the base is such that the deformation of the base is plane. There are no volumetric loads. The multilayer base is a package of  $n$  unbounded plane-parallel elastic orthotropic layers connected to each other, which are coupled to a half-space, elastic or absolutely rigid. Each layer is assumed to be homogeneous, weightless, orthotropic, and characterized by thickness and elastic constants - Poisson's ratio and Young's modulus.

The solution to the problem is sought in the space of transformants of the one-dimensional integral Fourier transform. The solution is based on the method of yielding functions.

The method of elasticity functions, developed earlier for isotropic multilayer bases, is extended in this paper to multilayer bases with orthotropic layers, all the necessary calculation formulas are obtained, and the solution algorithm is adapted.

The elasticity functions for a multilayer orthotropic base are investigated and recurrent formulas for the elasticity functions of the base layers are derived. The formulated algorithm for solving the problem takes into account the peculiarities of the properties of the orthotropic material and allows obtaining numerical and analytical solutions.

The solutions to specific problems for a three-layer base are obtained and analyzed.

On the basis of the study, conclusions are formulated for each chapter, as well as conclusions on the dissertation.

Thus, the thesis solved the urgent problem of developing an effective approach to determining the stress-strain state of bodies (layers, half-planes, two-layer bodies, and multilayer bases) with regard to the material orthotropy.

The scientific novelty of the obtained results is as follows: problem formulation for a multilayer base with orthotropic layers, a mathematical model and an approach to solving for an orthotropic material are formulated, thus further developing mathematical models of mechanics of multilayer media and the method of yielding functions; for the first time, calculation formulas for an orthotropic layer, orthotropic half-plane, two-layer and multilayer body under plane deformation, taking into account three cases of roots of characteristic functions, are obtained.

The practical value of the results of the work lies in the possibility of applying the developed method in the problems of calculating stresses and displacements in layered orthotropic bodies, analysis and design of layered structures with orthotropic layers.

*Keywords:* stress-strain state, orthotropic material, elastic orthotropic layer, orthotropic half-plane, multilayer base, plane deformation, stress function, compliance function, integral Fourier transform.

**СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ, В  
ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Dzundza N. S., Zinovieiev I. V. Stress-strain state of a two-layer orthotropic body under plane deformation. *Mathematical Modeling and Computing*. 2024. Vol. 11, No 2. P. 404 – 412.
2. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Задача про дію зосередженої сили на пружну ортотропну півплощину. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2024. №1. С. 11 – 18.
3. Dzundza N. S., Zinovieiev I. V. Solution of the first basic boundary value problem of the plane elasticity theory for a multilayer base with orthotropic layers. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2023. №2. С. 45 – 51.
4. Зіновєєв І. В., Дзундза Н.С. Розв’язання основних крайових задач для ортотропного шару. *Дослідження в математиці і механіці*. 2023. Т. 28, Вип. 1 – 2 (41 – 42). С. 27 – 39.
5. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Дослідження напружено-деформованого стану ортотропної півплощини в умовах плоскої деформації. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2022. №1. С. 23 – 30.
6. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Алгоритм знаходження напружено-деформованого стану пружного ортотропного шару. *Scientific discussion*. 2022. №64. С. 16 – 20.
7. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Про один підхід до визначення напружено-деформівного стану пружного ортотропного шару. *Proceedings of IX International Scientific and Practical conference Berlin*. 2022. С. 206 – 211.
8. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Задача Фламана для ортотропної півплощини. *Актуальні проблеми математики та інформатики: тези доповідей П’ятнадцятої Всеукраїнської, двадцять другої регіональної наукової конференції молодих дослідників*. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2024. С. 142 – 143.

9. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Постановка першої основної граничної задачі для багатошарової основи з ортотропними шарами. *Актуальні проблеми математики та інформатики: тези доповідей Чотирнадцятої Всеукраїнської, двадцять першої регіональної наукової конференції молодих дослідників*. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2023. С. 142 – 143.

10. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Дослідження плоскої деформації пружного ортотропного шару. *Актуальні проблеми математики та інформатики: тези доповідей Тринадцятої Всеукраїнської, двадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників*. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2022. С. 78 – 79.

11. Дзундза Н. С. Особливості обчислення функції напружень пружного ортотропного шару в умова плоскої деформації. *Молода наука-2022: збірка наукових праць студентів, аспірантів, докторантів і молодих вчених*. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2022. С. 14 – 15.

12. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Визначення напружено-деформованого стану прямокутної ортотропної пластини. *Актуальні проблеми математики та інформатики: тези доповідей Дванадцятої Всеукраїнської, дев'ятнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників*. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2021. С. 97 –99.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ .....	15
ВСТУП .....	16
Розділ 1 ОГЛЯД МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕНЬ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ ПРУЖНИХ ТІЛ ТА СЕРЕДОВИЩ .....	21
1.1. Загальні характеристики підходів до знаходження напружено- деформівного стану пружних шаруватих тіл та середовищ .....	21
1.2. Основні методи знаходження напружено-деформівного стану ортотропних пластин і оболонок .....	22
1.2.1 Аналітичні методи для розрахунку ортотропних тіл .....	25
1.2.2 Чисельні методи для розрахунку ортотропних тіл .....	26
1.2.3 Чисельно-аналітичні методи розрахунку ортотропних тіл ...	28
1.3. Підходи для знаходження напружено-деформівного стану шаруватих ортотропних тіл та середовищ .....	30
1.4. Метод інтегральних перетворень для визначення напружено- деформівного стану багат шарових основ .....	33
1.5. Висновки до розділу 1 .....	37
Розділ 2 МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО – ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ ПРУЖНИХ ОРТОТРОПНИХ ТІЛ ТА СЕРЕДОВИЩ .....	38
2.1. Визначення напружено-деформівного стану ортотропного шару методом інтегрального перетворення Фур'є .....	38
2.1.1 Концептуальна та математична постановка для шару. Схема загального розв'язання .....	39
2.1.2 Випадок двох пар комплексно спряжених коренів .....	49

	13
2.1.3 Випадок з дійсними кратними коренями .....	55
2.1.4 Випадок з чотирма дійсними коренями.....	62
2.2. Визначення напружено-деформівного стану ортотропної півплощини в умовах плоскої деформації .....	65
2.2.1 Концептуальна та математична постановка для півплощини. Схема загального розв'язання .....	65
2.2.2 Задача про дію зосередженої сили на півплощину .....	70
2.3. Практична реалізація .....	75
2.3.1 Приклад 1 .....	75
2.3.2 Приклад 2 .....	77
2.3.3 Приклад 3 .....	79
2.3.4 Приклад 4 .....	81
2.3.5 Приклад 5 .....	84
2.3.6 Приклад 6 .....	85
2.4. Висновки до розділу 2 .....	87
Розділ 3 ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ ДВОЩАРОВИХ ОРТОТРОПНИХ ТІЛ .....	89
3.1. Напружено-деформівний стан ортотропного шару зчепленого з ортотропною півплощиною .....	89
3.1.1 Концептуальна та математична постановка .....	89
3.1.2 Схема загального розв'язання.....	92
3.2. Приклад практичної реалізації.....	94
3.3. Порівняння отриманих результатів .....	99
3.4. Висновки до розділу 3 .....	102

Розділ 4 НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ПРУЖНОЇ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ З ОРТОТРОПНИМИ ШАРАМИ .....	103
4.1. Концептуальна та математична постановка задачі.....	103
4.2. Загальна схема розв'язання задачі.....	106
4.3. Дослідження функції податливості для багатошарової ортотропної основи .....	118
4.4. Алгоритм розв'язання задачі .....	129
4.5. Приклад розрахування напружено-деформівного стану ортотропної тришарової основи .....	130
4.6. Порівняння результатів для тришарової основи.....	134
4.7. Висновки до розділу 4 .....	140
ВИСНОВКИ .....	142
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	144
ДОДАТОК А.....	164

**ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ**

ЕОМ – електронна обчислювальна машина

ММЕ – метод макроелементів

МСЕ – метод скінчених елементів

МЧАМ – матрицантно числовий-аналітичний методу

НДС – напружено-деформівний стан

ЧА МГЕ – чисельно-аналітичний метод граничних елементів

$E_x, E_y$  – модулі Юнга

$\nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}, \nu_{zy}$  – коефіцієнти Пуасона

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Розширення області застосування багатошарових середовищ в промисловості, таких як машинобудування, літакобудування та кораблебудування, нафтовидобувна та металургійна промисловість потребує розробки ефективних методів дослідження напружено-деформівного стану тіл з урахуванням особливостей матеріалу та його впливу на взаємодію між шарами в багатошаровому тілі. Розв’язання точних задач щодо напружено-деформівного стану ортотропних багатошарових тіл має важливе значення для подальшого розвитку методів дослідження механіки неоднорідних структур.

**Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Проведені у дисертаційній роботі дослідження виконані в межах наукових досліджень, що виконуються у Запорізькому національному університеті, при виконанні науково-дослідної теми: “Чисельні та аналітичні методи розв’язання диференціальних та інтегральних рівнянь задач механіки деформівного твердого тіла” (номер державної реєстрації 0121U114696), яка виконувалась у межах робочого часу викладачів.

**Мета і завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є розробити підходи (алгоритми) до визначення напружено-деформівного стану тіл (шарів, півплощин, двошарових тіл та багатошарових основ) з урахуванням особливостей ортотропного матеріалу.

Основні завдання дослідження:

- провести аналіз предметної області з теорії пружності (огляд методів та підходів досліджень напружено-деформівного стану пружних тіл), шаруватих структур з ортотропних матеріалів;
- побудувати математичні моделі для розв’язання задачі на визначення напружено-деформівного стану шару, півпростору, двошарового та багатошарового тіла;

- отримати розрахункові формули для ортотропних шару, півпростору, двошарового та багатошарового тіла в умовах плоскої деформації для ортотропного матеріалу;
- розробити алгоритм розв'язку задач плоскої теорії пружності для багатошарової основи з ортотропними шарами, який враховує особливості властивостей ортотропного матеріалу і дозволяє отримувати аналітичні розв'язки в просторі трансформант Фур'є;
- поширити метод функцій податливості, розроблений для багатошарових основ з ізотропними шарами, на задачі для багатошарових основ з ортотропними шарами;
- вивести рекурентні формули функцій податливості для багатошарової ортотропної основи та зробити їх дослідження;
- розв'язати конкретні задачі про дію поверхневого навантаження на шар, півплощину, двошарову та багатошарову основи;
- зробити порівняльний аналіз результатів експериментів із доступними аналітичними або експериментальними даними.

**Об'єкт дослідження** – процеси деформування в пружних шаруватих тілах та середовищах з ортотропними шарами під дією поверхневого навантаження.

**Предмет дослідження** – компоненти напружено-деформівного стану в пружних шаруватих тілах та середовищах з ортотропними шарами під дією поверхневого навантаження.

**Методи дослідження.** Розв'язання задач наведених в дисертаційні роботі ґрунтується на застосуванні методу одновимірного інтегрального перетворення Фур'є та методу функцій податливості.

**Наукова новизна одержаних результатів:**

- сформульовано постановки задач для багатошарової основи з ортотропними шарами, побудовано математичну модель і запропоновано підхід до розв'язання для ортотропного матеріалу, тим самим дістали

подальшого розвитку математичні моделі механіки багатошарових середовищ та метод функцій податливості;

- сформульовано алгоритм розв'язку першої основної граничної задачі плоскої теорії пружності для багатошарової основи з ортотропними шарами, який враховує особливості властивостей ортотропного матеріалу і дозволяє отримувати аналітичні розв'язки в просторі трансформант Фур'є;

- вперше отримано розрахункові формули для ортотропних шару, півпростору, двошарового та багатошарового тіла в умовах плоскої деформації, що враховують три випадки коренів характеристичного рівняння бігармонічного диференціального рівняння для ортотропного матеріалу;

- вперше поширено метод функцій податливості, розроблений для багатошарових основ з ізотропними шарами, на задачі для багатошарових основ з ортотропними шарами;

- вперше виведені рекурентні формули функцій податливості для багатошарової ортотропної основи та проведено їх дослідження;

- розв'язано конкретні задачі про дію поверхневого навантаження на шар, півплощину, двошарову та багатошарову основи, які можуть виступати тестовими для подальшого розвитку теорії та практики у механіці неоднорідних структур;

- виконані в роботі чисельні розрахунки підтверджують ефективність запропонованого підходу.

**Практичне значення одержаних результатів.** Розроблені підходи та алгоритми можуть бути використані для аналізу та проектування шаруватих структур з ортотропними шарами в різних областях таких, як: інженерія будівництва, механіка матеріалів тощо. Отримані результати можуть бути використані для покращення розуміння механічних властивостей шаруватих структур з ортотропними шарами.

**Особистий внесок.** Основні наукові результати дисертації отримані автором самостійно. У статтях, опублікованих у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у наступному:

у [33] – виведено розрахункові формули необхідні для визначення напружень і переміщень для ортотропного півплощини в умовах плоскої деформації;

у [35] – комп'ютерна реалізація числових результатів задачі про дію зосередженої сили на ортотропну півплощину;

у [46] – комп'ютерна реалізація числових результатів крайових задач лінійної теорії пружності для однорідного ортотропного шару постійної товщини;

у [111] – сформульовано алгоритм розв'язання першої основної граничної задачі плоскої теорії пружності для багат шарової основи, який враховує особливості властивостей ортотропного матеріалу і дозволяє отримувати аналітичні рішення напружено-деформівного стану в кожному шарі основи;

у [112] – виведено розрахункові формули необхідні для реалізації алгоритму для визначення напружень і переміщень для ортотропного двошарового тіла в умовах плоскої деформації.

**Апробація результатів досліджень.** Основні положення та проміжні результати дисертації доповідались і обговорювались на наукових семінарах, всеукраїнських та міжнародних конференціях, а саме:

– Дванадцята Всеукраїнська, дев'ятнадцята регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (м. Запоріжжя, 2021 р.);

– XV університетська науково-практична конференція студентів, аспірантів, докторантів і молодих вчених «Молода наука-2022» (м. Запоріжжя, 2022 р.);

– Тринадцята Всеукраїнська, дев'ятнадцята регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (м. Запоріжжя, 2022 р.);

– The 9th International scientific and practical conference «Modern scientific research: achievements, innovations and development prospects» (Berlin, 2022);

– Чотирнадцята Всеукраїнська, Двадцять перша регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (м. Запоріжжя, 2023 р.);

– П'ятнадцята Всеукраїнська, Двадцять друга регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (м. Запоріжжя, 2024 р.);

**Публікації.** Основні наукові результати дисертаційної роботи висвітлено у дванадцяти опублікованих працях, серед них: одна – у виданні, індексованому в наукометричній базі Scopus [112]; чотири статті – у наукових фахових виданнях України [33, 35, 46, 111]; одна стаття – у закордонному періодичному виданні (Чехія) [31]; одна – матеріали закордонної міжнародної конференції [39] та п'ять – тези доповідей, опублікованих у збірниках праць вітчизняних наукових конференцій [32, 34, 36-38].

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг роботи складає 164 сторінок. Робота містить 40 рисунків, список використаних джерел з 179 найменувань (20 сторінок) та 1 додаток.

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕНЬ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ ПРУЖНИХ ТІЛ ТА СЕРЕДОВИЩ

#### 1.1. Загальні характеристики підходів до знаходження напружено-деформівного стану пружних шаруватих тіл та середовищ

Визначення напружено-деформівного стану (НДС) пружних тіл та середовищ, що складається з декількох шарів, є важливим у застосованні в мостобудуванні, будівництві та інших областях. Такі задачі можна розв'язувати аналітичними, чисельними або чисельно-аналітичними методами, кожен з яких має свої особливості, обмеження.

Метод розкладання за параметром, метод послідовних наближень, асимптотичний метод і метод пом'якшення нев'язок є одними з ефективних способів побудови наближених аналітичних розв'язків. Однак при використанні аналітичних методів для знаходження НДС конструкцій буває складно отримати розв'язок задач через постановку задачі, опис граничних умов, нелінійність диференціальних рівнянь або неоднорідність області [58].

В такому випадку можна використовувати чисельні методи (метод скінчених елементів, метод граничних елементів, метод скінчених різниць, метод середніх різниць, метод моментної схеми скінчених елементів, варіаційно-різницевої метод, метод сіток, метод сплайн-колокацій) або чисельно-аналітичні методи (метод однорідних розв'язків, метод Бубнова-Гальоркіна, метод Рітца-Тімошенка, метод Канторовича-Власова, метод розкладання в ряди Фур'є).

## 1.2. Основні методи знаходження напружено-деформівного стану ортотропних пластин і оболонок

Важливим фактором у будівництві конструкцій є надійність й економічність, тому обирають матеріал, що буде міцним і одночасно з тим надійним. В залежності від структури тіло може бути ізотропним або анізотропним. Теорія пружності ізотропного тіла, у якого всі властивості однакові на всіх напрямках, була всебічно розглянута в роботах Ламе Г., Сен-Венана А., Максвелла Д., Остроградського М. В. [168], Гука Р. [146], Губера М. [126], Лява О. [138], Фанга Ю. Ч. [116], Тимошенка С. П. [165], Кіта Г. С. [53, 54], Божидарника В. В. [9, 10], Гембара В. М. [22], Можаровського М. С. [60], Григоренка Я. М. [25, 27] та інш.

Теорії пружності анізотропного тіла тобто такого, що має відмінні властивості у різних напрямках присвячені роботи Igarashi S., Shibukawa K. і Ozaki M. [128, 129], Nemish Y. N. [143], Nettles A. T. [144], Piltner R. [148], Reddy J. N. [153], Vinson J. R., Chou T. W. [169], Whitney J. M., Pagano N. J. [174], Yang P. C., Norris C. H. і Stavsky Y. [178], Кільчевського М. А. [50], Грилецького Д. В. [28, 29], Григоренка Я. М. [118-121].

Окремий випадок анізотропного тіла є ортогонально-анізотропне тіло або ортотропне, яке має різні властивості середовища вздовж трьох взаємно-ортогональних осей. Розповсюджений приклад ортотропного матеріалу є дерево, в кожній точці якого можливо визначити різні властивості в трьох взаємно перпендикулярних напрямках [156]. Найбільш жорсткий і міцний вздовж волокон, оскільки більшість целюлозних фібрил вирівняні таким чином, а найменш жорсткий у радіальному напрямку (тобто між кільцями які показую вік) і є проміжним у напрямку по колу.

Ще одним прикладом ортотропного матеріалу є армовані волокнами композити та листовий метал, утворений шляхом стиснення товстих ділянок металу між важкими роликками, що згладжує і розтягує його структуру.

Більшість елементів споруд для яких потрібно знайти надійність і міцність може бути зведено до розрахункових схем оболонок і пластин. Огляд підходів до розв'язання задач теорії пружності для пластин і оболонок наведено в низці робіт, наприклад Тимошенко С. П. [166], Григоренко Я. М. та Мольнеченко Л. В. [25, 26], Reddy J. N. [154] і тд.

В роботі Hildebrand F. B., Reissner E. та Thomas G. V. [123] описані різні системи рівнянь для аналізу малих прогинів тонких пружних оболонок. Раніше відомі результати досліджень для ізотропних оболонок, були переформульовані для оболонок, які є ортотропними в тому розумінні, що нормаль до серединної поверхні оболонки може бути пружною. Було виведено нову систему рівнянь для аналізу оболонок, яка включає вплив поперечного зсуву та нормальних напружень. Передбачувана ортотропія оболонки полегшує ідентифікацію окремих ефектів поперечних напружень, якими зазвичай нехтують.

Багато робіт присвячені дослідженню напружено-деформівного стану циліндричних ортотропних оболонок, які є моделями необхідних будівельних, промислових конструкцій (трубопроводів, баків, резервуарів). Розуміння НДС циліндричних оболонок допомагає прогнозувати появу пошкоджень, деформацій та тріщин в матеріалах. Це має велике значення для промисловості, авіації, нафтогазової галузі та інших галузей, де безпека та надійність конструкцій є критичними.

У роботі Erdogan F. E., Ratwani M., Yuseoglu U. [114] досліджуються вплив ортотропії матеріалу на напруження у циліндричній оболонці з поздовжньою тріщиною (на прикладі слабо ортотропного титану та сильно ортотропного матеріалу - графіту). В статті Maksimyyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. [141] чисельно проаналізовано НДС тонких оболонок, виготовлених з нелінійно-пружних ортотропних композитів та досліджено вплив ортотропії та нелінійності композитних матеріалів, геометрії оболонок та жорсткості підкріплення на напружено-деформівний стан.

Теоретико-експериментальний підхід до алгоритмічного визначення пружних властивостей матеріалу багат шарової композитної оболонки обертання запропоновано в роботі Дзюби А. П., Сіренко В. Н. [113].

Застосування методу граничних інтегральних рівнянь для ортотропних оболонок з розрізами й отворами присвячені роботи Довбні К. М. [40, 41] та Шевченка В. П. [82, 83, 84]. За допомогою теорії узагальнених функцій та застосовуючи двовимірне інтегральне перетворення Фур'є вихідна крайова задача зводиться до системи граничних інтегральних рівнянь.

Застосування варіаційного методу для вирішення задач про концентрацію напружень в ортотропних циліндричних оболонках з отворами описано в роботі Pytel L. P., Kukushkin V. G. [151]. Подальший розвиток варіаційного методу до варіаційного чисельно-аналітичного методу (названий RVR-методом) та його застосування для розв'язання таких задач описано в роботі [157].

Ще одним методом для аналізу задач на розрахунок циліндричних композитних ортотропних оболонок, послаблених малими та середніми отворами є метод розкладання в ряд за малим параметром, описаний у статті Revenko V. P. [155].

В роботі Трач В. М., Подворний А. В., Хоружий М. М. [79] проводиться аналіз НДС ортотропних товстих циліндричних оболонок під дією зовнішнього бокового розподіленого тиску. Тривимірна задача була приведена до одновимірної за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна, до якої був застосований метод дискретної ортогоналізації.

Коли геометрія циліндричної оболонки стає більш плоскою, наприклад, коли один з її радіусів стає значно меншим за інший, то таку оболонку можна спростити до круглої пластини. Цей підхід є досить поширеним і дозволяє використовувати методи та розрахунки, специфічні для пластин.

Однак пластини самі по собі є важливими структурними елементами, які мають широкий спектр застосувань у різних галузях промисловості. Залежно від призначення, ці пластини можуть бути ізотропними або ортотропними, при

цьому останні набувають все більшої популярності завдяки численным перевагам, які вони пропонують. Для аналізу пластин, як статичних так і динамічних потрібно використання певної теорії для отримання основних рівнянь при заданих граничних умовах. Розглянемо деякі аналітичні, чисельні та змішані методи для розв'язання подібних задач.

### 1.2.1 Аналітичні методи для розрахунку ортотропних тіл

Зазвичай аналітичні розв'язки задач про знаходження НДС пластин та оболонок отримуються за допомогою наближених методів, які базуються на зведенні початкової тривимірної задачі (з трьома незалежними змінними) до більш простої двовимірної задачі. Одним з таких методів є розглянутий в роботах Кільчинського О. О. і Массалітіної Є. В. [51, 52] метод пом'якшення нев'язок. В своїх роботах автори описують застосування методу для розв'язання задачі про НДС ортотропної пластини під дією поверхневих навантажень.

Застосування методу інтегральних перетворень для дослідження задачі розподілу згинальних напружень в околі тріщин ортотропної пластини описано в статті Chattopadhyay L. [101]. Використовуючи класичну теорію пластин та методи інтегральних перетворень, було отримано загальні формули для згинального та крутного моментів у пружній пластині, що містить тріщини, розташовані на одній лінії.

В роботі Khov H., Li W. L., Gibson R. F. [134] описується аналітичний метод розрахунку статичних прогинів ортотропних пластин із загальними пружними граничними опорами, де функція переміщення виражається у вигляді двовимірного косинусного ряду Фур'є.

Механічну реакцію на деформацію синусоїдального зсуву ортотропних пластин з використанням уточненої теорії пластин представлено у статті [133].

Наведена в статті теорія враховує ефекти поперечного зсуву та розподіл деформацій поперечного зсуву по товщині пластини.

Розроблення методики для аналітичного розрахунку згинального моменту та нормальних напружень профільованої стінки балки у вигляді ортотропної пластини наведено в роботі Chichulin V., Chichulina K. [104]. Отримані розв'язки у виді степеневих та гіперболічних функцій згинальної вісі стінки балки використовується для знаходження залежностей НДС конструкції.

Необхідно також відзначити, що напіваналітичний метод розглянутий в роботі [103]. Він дозволяє значно зменшити кількість невідомих при розв'язанні за рахунок того, що дискретизується лише межа. Таким чином, просторова розмірність задачі зменшується на одиницю, але, на відміну від МСЕ, не вимагає фундаментального розв'язку.

### **1.2.2 Чисельні методи для розрахунку ортотропних тіл**

Найчастіше при застосуванні чисельних методів для розрахунку ортотропних пластин зустрічається метод скінчених елементів і його модифікації. Так, в роботі Селіванова М. Ф., Кульбачного Є. Р., Онищенко Д. Р. [67] наведено застосування МСЕ для розв'язання задачі про визначення зміни концентрації напружень з часом у в'язкопружній ортотропній пластині. У роботі Селіванова М. Ф., Процан В. В. [68] описано алгоритм застосування МСЕ для розв'язування задачі визначення параметрів граничної рівноваги тріщини скінченної ортотропної пластини.

Методика моделювання граничної міцності ортотропної пластини з центральним отвором при розтягуванні методом скінчених елементів описана в роботі Agino S. B., Frechin M. M. [93].

У статті Gang H., Kwak H.-G. [117] розглянуто ортотропну модель матеріалу для прогнозування поведінки бетону, що зазнає динамічного

двовісного або тривісного навантаження. Для аналізу процесу руйнування бетонних конструкцій застосовувався метод скінченних елементів. Автори показують, що запропонована ортотропна модель може бути ефективно використана для аналізу ударних і вибухових впливів на бетонні конструкції і дає числові результати, нечутливі до використовуваного розміру сітки МСЕ.

В роботах Wang K. Y. [172, 173] розглядається застосування методу скінченних елементів Треффца для розв'язання деяких задач в ортотропних середовищах. У статті Petrolito J. [147] показано використання методу скінчених елементів на основі гібридної формули Треффца для аналізу коливань і стійкості товстих ортотропних пластин.

Для дослідження коливань прямокутних ортотропних пластин також застосовують метод диференціального перетворення та метод колокацій Тейлора. В статті Mukhtar F. M. [142] описано застосування цих методів для аналізу вільних коливань ортотропних пластин на основі уточненої теорії пластин з двома змінними. Також було розглянуто випадки багатопрольотних пластин і пластин зі ступінчастою товщиною, щоб показати можливості запропонованих методів.

Моделювання коливань прямокутних ортотропних пластин та визначення їх пружних констант методом Рейлі-Рітца описується у статті Deobald L. R., Gibson R. F. [108]. Характеристичні функції коливальних балок були використані як функції для пластин з граничними умовами, що складаються із защемлених і вільних країв. Власні частоти і форми коливань, отримані за допомогою розробленої програми, були перевірені за допомогою скінченно-елементного аналізу і модального аналізу для квадратних алюмінієвих і графітових (епоксидних) пластин.

Також варто зазначити ефективність застосування методу граничних елементів (МГЕ) для розрахунку ортотропних пластин. Загалом МГЕ суттєво зменшив обчислювальні зусилля причиною цього є зменшення розмірності задачі, оскільки дискретизувати потрібно лише границю.

Аналіз згинальних коливань та згину ортотропних пластин методом граничних елементів наведено в роботі Shi G. [158]. Постановка задачі виконана за схемою дискретизації постійними елементами як для границі пластини, так і для елементів як для межі пластини, так і для її внутрішньої області.

В роботах Jianguo W., Maokuang H. [132] і Dos Reis A., Lima Albuquerque E., Palermo Junior L. [109] побудовано фундаментальні розв'язки ортотропних товстих пластин з урахуванням деформації поперечного зсуву і проаналізовано за допомогою МГЕ.

Робота [162] показує, що МГЕ є ефективним і надійним при аналізі пружно-пластичних задач двовимірних ортотропних тіл.

Застосування підходу до визначення пружних констант для ортотропних матеріальних тіл за допомогою методу граничних елементів описано в роботі Ohkami T., Ichikawa Y., Kawamoto T. [145].

Модифікація МГЕ аналітичною схемою для точної оцінки граничних напружень і деформацій отвору в ортотропній пластині наведена в статті Mahajerin E., Sikarskie D. L. [139]. Валідність методу перевірено шляхом обчислення коефіцієнта концентрації напружень у подвійному з'єднанні для різних розмірів отворів і різних граничних умов.

Наближений числовий розв'язок задач реалізований методом механічних квадратур і колокації для дослідження впливу ортотропії матеріалу пластинки на розподіл компонент напруженого стану по контуру еліптичного отвору в пластинці описано в роботах Сяського А. О. [75, 164].

### **1.2.3 Чисельно-аналітичні методи розрахунку ортотропних тіл**

Для задач в яких неможливо отримати аналітичний розв'язок або процес математичних перетворень є складним, найкраще використовувати змішані методи. Один з таких є чисельно-аналітичний метод граничних елементів.

Його застосування для розрахунків ортотропних пластин описано в роботах Сур'янінова М. Г. і Павленко І. В. [61, 72, 74].

Продовжуючи свою роботу автори в статті [73] описали застосування чисельно-аналітичний метод граничних елементів для розв'язання задачі про вигин ортотропних пластин, що дозволяє отримати розв'язання при будь-яких умовах закріплення кромки пластини та будь-якому характері зовнішніх навантажень.

Застосування матрицантного чисельно-аналітичного методу (МЧАМ) для розрахунку ортотропної прямокутної пластини описано в роботах Щербини Н. М., Жук М. В. [85, 86]. Для розв'язування двовимірної крайової задачі застосовують комбінований алгоритм, спершу знижують вимірність задачі методом Канторовича. Потім отриману одновимірну задачу розв'язують за допомогою МЧАМ, який базується на редукції лінійної двоточкової крайової задачі до набору задач Коші і матрицантному представленні їхніх розв'язків.

Розв'язання задачі про статичне деформування ортотропної пластини на пружній основі під дією трансверсального навантаження наведено в роботі Жук М., Кіндибалюк А., Щербина Н. [42]. Для розв'язання поставленої задачі застосовувався аналітико-числовий підхід, який є поєднанням методу Канторовича і МЧАМ.

В статті Delyavskyy M., Rosinski K., Zdobicka N., Bilash O. [107] розглянуто новий аналітико-числовий підхід – метод макроелементів (ММЕ) для аналізу тонкої ортотропної полігональної пластини, що спирається на пружну основу Вінклера. Згідно з цим методом, реальна пластина вписується в прямокутний контур і продовжується на прямокутну область, яка називається фундаментальною пластиною, що є об'єднанням реальної пластини і додаткової частини.

Згин ортотропної пластини, що спирається на основу Пастернака або Вінклера, з використанням теорії змішаного зсувного деформування розглянуто в роботі Zenkour A. M. [179]. Результати показують, що на

характеристики прогину і напружень суттєво впливають жорсткість пружної основи, співвідношення сторін пластини і відношення довжини сторони до товщини.

В публікації Павленко І. В., Курган В. О. [62] описано експериментальні дослідження напружено-деформівного стану ортотропних пластин при декількох варіантах граничних умов і зовнішніх навантажень.

При експлуатації ортотропних пластин можуть діяти динамічні навантаження, що призводять до коливань.

В публікації Лазаревої Д. В., Курган І. В. [57] наведено методику перетворення двовимірного диференціального рівняння вільних коливань до одномірного і визначення фундаментальних розв'язків за допомогою ЧА МГЕ.

Ще один чисельно-аналітичний метод є поєднанням варіаційного принципу Рейсснера, методу І. М. Векуа і теорії R-функцій. Використання цього методу для розв'язання просторової задачі статички нетонких ортотропних оболонок з довільними отворами наведено в роботі [66].

Використання теорії R-функцій і статичного методу для розв'язку задач стійкості та коливань ортотропних пластин при неоднорідному докритичному стані було розглянуто в роботі Курпа Л. В., Лінник А. Б. [55].

### **1.3. Підходи для знаходження напружено-деформівного стану шаруватих ортотропних тіл та середовищ**

Ортотропні композиційні матеріали широко використовуються в інженерній практиці, оскільки вони мають більше переваг завдяки своїй легкості, еластичності, міцності та винятковим механічним властивостям, які залежать від напрямку та товщини шарів. Проектування конструкцій з таких матеріалів потребує надійних методів моделювання. Тому дослідження зосереджені на розробці ефективних методів визначення необхідних параметрів та властивостей шаруватих ортотропних тіл та середовищ. Ці

методи дозволяють отримати детальну інформацію про механічну поведінку таких конструкцій та забезпечують надійну основу для їх аналізу, проектування та оптимізації.

Загальна оцінка змішаних і класичних теорій для оцінки глобальної і локальної реакцій ортотропних багат шарових пластин розглянута в роботі Carrera E. [100]. Класичні теорії, сформульовані на основі принципу віртуальних переміщень, а змішані теорії засновані на теорії Рейсснера. Автором показано, що застосування змішаної варіаційної теореми Рейсснера до змішаних задач теорії пружності дає перевагу в точності розрахунків над класичним принципом можливих переміщень.

Застосування асимптотичного методу для розв'язання ряду задач механіки деформівного твердого тіла скінчених і нескінченних розмірів, пов'язаних з передачею навантаження пружними елементами шаруватим анізотропним тілам описано в роботах Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Manevitch L. I. [89, 94].

В статті Hwang S. F. [127] представлено задачі на вигин ортотропного шару пов'язаного з ізотропним або ортотропним півпростором під навантаженням при плоскій деформації, а також оцінено вплив ортотропії на вигин.

Більшість практично важливих плоских задач теорії пружності ортотропних матеріалів залежать від пружних констант. Дослідження показали, що застосування просторового перемасштабування дозволяє звести ортотропні задачі до еквівалентних задач для матеріалів з кубічною симетрією. В роботі [163] розглядається задача зміни масштабу ортотропії та наслідки для руйнування композитів.

Визначення напружено-деформівного стану ортотропних плит, що лежать на пружній основі Вінклера, методом макроелементів, наведено в статті Делявського М. В., Здолбіцької Н. В., Онишко Л. Й., Здолбіцького А. П. [30]. На відміну від МСЕ, який збільшує точність за рахунок згущення сітки поділу в усій конструкції, розроблений ММЕ збільшує кількість вузлів на

краях окремих макроелементів, що зменшує кількість рівнянь, які потрібно розв'язати.

Аналітико-чисельний метод розв'язання задачі моделювання НДС шаруватих ортотропних пластин на пружній основі Пастернака наведено в роботі [80]. Кожен шар характеризується рівняннями узагальненої теорії пластин, а для моделювання пружної основи застосовується двопараметрична модель Пастернака.

Розрахунок плоского деформівного стану ортотропної криволінійної чотиришарової пластини методом скінченних елементів у середовищі ANSYS з числовим визначенням матриці жорсткості розглянуто в роботі Кучер О. Г. [56]. Застосування скінченно-елементної моделі дозволяє спростити багатошарову пластину та представити її як умовно цілісну структуру.

В статті Jain N. K. [130] методом скінченних елементів було досліджено розподіл напружень і прогинів у прямокутних ізотропних, ортотропних і шаруватих композитних пластинах з центральним круглим отвором при поперечному статичному навантаженні. Скінченно-елементний розрахунок виконано за допомогою програмного забезпечення ANSYS.

Застосування скінченно-елементного аналізу з використанням ANSYS для дослідження коефіцієнту концентрації напружень в потайних заклепкових отворах в ортотропних шаруватих пластинах описано в роботі Darwish F., Tashtoush G., Gharaibeh M. [106].

Стаття Antony S. J., Chandrashekhara K. [92] присвячена аналізу контактних напружень для стрічкового фундаменту, що взаємодіє з однорідною і багатошаровою ортотропною півплощиною. Розв'язання задачі було отримано за допомогою МСЕ.

Для розв'язання тривимірних задач було модифіковано МСЕ, так щоб він дозволяв розв'язувати 3D-моделі, але з характерною обчислювальною складністю для 2D-моделі. Спеціально для цього методу авторами була розроблена процедура постобробки, яка дозволяє візуалізувати повну тривимірну деформацію, а також всі шість компонентів напружень [131].

Застосування методу МСЕ 2D для 3D, який називається МСЕ23 для аналізу згину багатошарових ортотропних пластин за двовимірною чисельною моделлю скінченно-елементної сітки описано в статті [149]. В роботі проаналізовано кілька прикладів для тришарових пластин та дев'ятишарових пластин.

Крім того, для дослідження хвильового руху на основі модифікованої теорії анізотропних парних напружень було розроблено метод ортогональних поліномів Лежандра. У статті [122] розглянуто застосування методу для розрахунку коефіцієнтів акустичного відбиття і пропускання на межі поділу рідина/тверде тіло багатошарових пластин. Розширення області застосування методу ортогональних поліномів Лежандра для дослідження відбиття та проходження пружних хвиль в ортотропних шаруватих пластинах з парним напруженням, затиснутих між двома пружними півпросторами наведено в роботі [137].

В роботі Kirakosyan P. M., Stepanyan S. P. [135] розв'язано задачу про згин круглої двошарової циліндричної ортотропної плити з застосуванням уточненої теорії. Авторами було показано, що узагальнення поправочних коефіцієнтів уточненої теорії пластин за наявності дотичних поверхневих навантажень значно наближає результати двовимірної теорії пластин до відповідних результатів тривимірної теорії пружності.

#### **1.4. Метод інтегральних перетворень для визначення напружено-деформівного стану багатошарових основ**

На сьогодні розроблено досить багато різних підходів для розрахунків шаруватих конструкцій, одним з таких є метод інтегральних перетворень (інтегральні перетворення Фур'є [159], Ганкеля [110], Лагерра [88], Лапласа [175], Мелінна [150] тощо). Використання інтегральних перетворень при розв'язанні задач теорії пружності для багатошарових основ дозволяє

зменшити розмірність задачі переходом до більш простих інтегральних формул або лінійних комбінацій.

Метод інтегральних перетворень Фур'є для розв'язання плоскої крайової задачі теорії пружності ізотропного багатошарового тіла з відомим поверхневим навантаженням було запропоновано в роботах Burmister D. M. [97, 98, 99].

Застосування інтегрального перетворення Ганкеля до розв'язування задач теорії пружності багатошарових тіл наведено в роботах [1, 140].

Визначення напружень і деформації у в'язкопружних багатошарових середовищах отримуються за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Так в роботі Huang Y. H. [124, 125] описано застосування методу для визначення НДС багатошарового тіла під дією рухомих навантажень. В роботі [177] наведено аналітичний розв'язок задач для багатошарових магнітоелектропружних пластин, адгезійно з'єднаних в'язкопружним прошарком.

В статті Кагадій Т. С., Шпорта А. Г., Білової О. В., Щербини І. В. [49] розглянута осесиметрична контактна задача про передачу навантаження пружного підкріплюючого елемента до в'язкопружного тіла, що складається з двох скріплених ортотропних шарів з циліндричною анізотропією.

Значний внесок в розробку підходів до дослідження пружних багатошарових основ був зроблений науковцями Дніпропетровської школи. Вони запропонували метод функцій податливості, який був викладений в роботах Шевлякова Ю. А., Приварникова А. К. [64, 65]. Розвитком запропонованого методу займалися представники Дніпропетровської школи механіків: Годес Ю. Я., Ламзюк В. Д., Наумов Ю. А., Нікішин В. С., Петришин В. І., Шапіро Г. С. пізніше залучаються й представники Запорізької школи: Величко І. Г., Величко О. В., Зіновєєв І. В., Мотузко Ю. О., Спиця О. Г., Столярчук І. А., Ткаченко І. Г. та ін. [59].

Суть методу полягає в переході від вихідної постановки задач до постановки задач в просторі інтегральних перетворень. Після чого вводяться

спеціальні допоміжні функції податливості для кожного з шарів. За допомогою функції податливості, що враховує граничні умови на нижній межі основи знаходиться частина цих допоміжних функцій і за спеціальними рекурентними співвідношеннями визначаються допоміжні функції для всіх шарів основи. Останнім етапом є одержання розв'язків поставлених задач в аналітичному вигляді (у вигляді інтегралів), що спрощує отримання чисельних результатів за допомогою комп'ютера.

Функції податливості, що є функціями параметра інтегрального перетворення і залежать від характеристик матеріалу шару, зазвичай обчислюються за допомогою рекурентних співвідношень між шарами в багатошарових тілах. В роботі Величка І. Г. [12] було запропоновано матричний підхід до реалізації методу функцій податливості при розв'язанні задач теорії пружності для простих багатошарових основ, який був розвинутий в роботах Зіновєєва І. В. [44] для багатошарових основ складних структур, Спиці О. Г. [69] для розв'язання основних граничних задач для багатошарових плит.

Запропонований метод функцій податливості з методом інтегрального перетворення Фур'є отримав продовження у роботах Антоненко Н. М., Величка І. Г. [2, 6] для розв'язання задачі про плоску деформацію ізотропної багатошарової плити та просторову деформацію багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами [5].

Дослідження НДС багатошарових плит і порівняння результатів отриманих аналітичним (метод функцій податливості) та чисельним методом (МСЕ) описано в монографії Гоменюка С. І., Спиці О. Г. [23].

Запропонований метод успішно застосовано до розв'язання осесиметричної контактної задачі вдавлювання штампа в пружну багатошарову пластину описаний в роботах [63, 161].

Поширення методу інтегрального перетворення Фур'є з побудовою функцій податливості на задачі плоскої теорії пружності для трансверсально ізотропної багатошарової основи наведено в роботах Величко І. Г. [14].

Також варто відмітити роботи Зіновєєва І. В., в яких наведено застосування інтегрального перетворення Фур'є в поєднанні з методом функції податливості для визначення НДС ізотропної багатошарової основи з тріщинами в шарах [45] та з щілиною між шарами [43].

Метод функцій податливості також є ефективним при розв'язанні задач термопружної деформації багатошарових плит з пружними зв'язками між шарами [3] та багатошарової плити пружно зчепленою з жорсткою півплощиною [4, 90].

В статті Антоненко Н. М. [1] було розвинено застосування методу функцій податливості з інтегральним перетворенням Ганкеля для розв'язання задачі про кручення двошарової та багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. В роботах Величка І. Г. та Ткаченко І. Г. [16, 17, 18] даний підхід був застосовано для розв'язання плоских та просторових задач термопружності при умовах ідеального теплового контакту між шарами багатошарової основи та плити, а також для розв'язання основних та змішаних крайових задач для багатошарової основи на випадок плоскої та осесиметричної деформації [76, 78].

Розв'язання плоских задач термопружної деформації багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами описаних в [7, 77, 91].

В роботі Бойко С. Б., Величко О. В. [11] запропоновано підхід визначення двовимірних стаціонарних та періодичних теплових полів у багатошарових плитах з застосуванням методу функцій податливості та рядів Фур'є.

Окрім того в роботах Столярчук І. А. [70, 71] та Величко О. В. вдалося поширити метод функцій податливості на плоскі та просторові задачі про періодичне навантаження пружних основ [19, 20].

Зацікавлення наукової спільноти в проблемах механіки для багатошарових середовищ залишається на високому рівні, що відображується в доповідях на конференціях [47], публікаціях [8, 160, 176], монографіях [24] та дисертаціях [59] опублікованих в останні роки.

## 1.5. Висновки до розділу 1

Проведений аналіз літературних та інтернет джерел дає стислий огляд методів та підходів, щодо постановок та розв'язання задач з визначення напружено-деформівного стану пружних тіл та багат шарових середовищ, свідчить про те, що це питання привертало та привертає зараз увагу багатьох науковців. Важливість цієї роботи обумовлена широким спектром можливого практичного застосування результатів досліджень, оскільки багат шарові середовища відображають властивості багатьох реальних об'єктів та дозволяють моделювати нові матеріали.

Згідно з аналізом інформаційних джерел в даний час більшість сучасних дослідників віддає перевагу чисельно-аналітичним методам, де аналітичні розв'язки просторових задач теорії пружності чисельно аналізуються на комп'ютері. Отже, розвиток аналітичних та чисельних підходів до розв'язання задач теорії пружності для шаруватих тіл та середовищ є актуальним як з теоретичної, так і практичної точок зору.

Аналіз відкритих джерел дозволяє зробити висновок про ефективність застосування методів інтегральних перетворень у поєднанні з методом функцій податливості до розв'язання задач теорії пружності механіки деформівного твердого тіла. Однак в такому поєднанні зазначені методи застосовувались тільки до шаруватих тіл з ізотропними, трансверсально ізотропними шарам, але відсутні дослідження для ортотропних багат шарових основ.

## РОЗДІЛ 2

### МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО – ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ ПРУЖНИХ ОРТОТРОПНИХ ТІЛ ТА СЕРЕДОВИЩ

#### **2.1. Визначення напружено-деформівного стану ортотропного шару методом інтегрального перетворення Фур'є**

Великий клас задач теорії пружності пов'язаний з аналізом тіл, які мають один із розмірів набагато менший ніж два інші, наприклад, пластин, плит. При цьому розміри цих тіл та навантаження дозволяють моделювати їх нескінченними або напівнескінченними тілами, такими як смуга, шар, півпростір, півплощина, тому що отриманий розв'язок співставленої задачі для необмежених тіл дає результат, який задовольняє вимогам постановника задачі, зокрема прийнятна точність розрахунку, адекватність експериментальним даним.

Одним з підходів, що забезпечує таке моделювання є метод інтегральних перетворень.

Такий підхід дає можливість застосовувати методи, які розроблені для аналізу нескінченних тіл, до цих скінчених об'єктів з досить високою точністю. Для окремих задач вдається отримати аналітичні вирази, але в загальному випадку такі задачі розв'язуються за допомогою чисельних методів. Наведемо застосування методу інтегрального перетворення Фур'є для аналізу напружено-деформівного стану ортотропних тіл.

### 2.1.1 Концептуальна та математична постановка для шару. Схема загального розв'язання

Розглянемо задачу визначення напружень та переміщень в пружному шарі постійної товщини  $h$  з відомими модулями пружності  $E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}, \nu_{zy}$  і  $G_{xy}$ . Матеріал шару ортотропний, суцільний, без дефектів. Шар лежить на жорсткій основі з відомими зовнішніми навантаженнями. Необхідно визначити напруження та переміщення в довільній точці цього шару, за умови, що деформація шару плоска.

Для побудови математичної моделі поставленої задачі та її подальшого дослідження віднесемо тіло до прямокутної декартової системи координат як показано на рис.2.1.

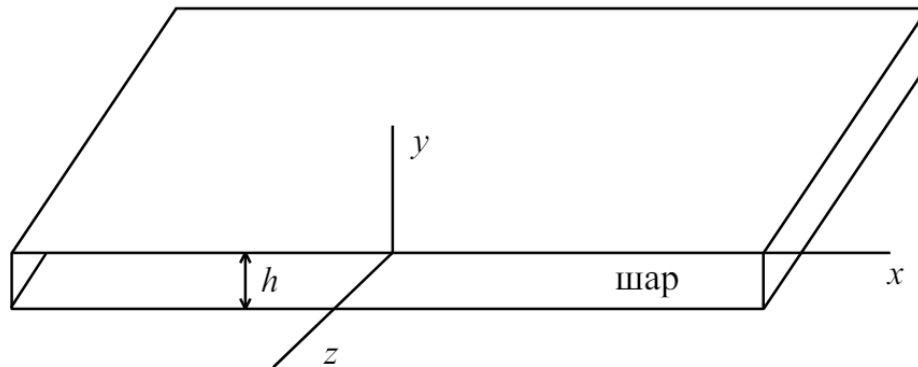


Рисунок 2.1 – Математична модель

Тоді шар займає область  $G(x, y, z)$ , обмежену площинами  $y = 0$  і  $y = -h$ , тобто  $G(x, y, z) : \{-\infty < x < +\infty, -h \leq y \leq 0, -\infty < z < +\infty\}$ .

На поверхнях шару  $y = 0$  і  $y = -h$  відомими є зовнішні навантаження

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(x, 0, z) = f_1(x, z), & \quad \tau_{xy}(x, 0, z) = f_2(x, z) \\ \sigma_y(x, -h, z) = f_3(x, z), & \quad \tau_{xy}(x, -h, z) = f_4(x, z) \end{aligned} \right\}$$

Враховуючи, що розглядається задача в умовах плоскої деформації, тоді отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= f_1^*(x), & \tau_{xy}(x, 0) &= f_2^*(x) \\ \sigma_y(x, -h) &= f_3^*(x), & \tau_{xy}(x, -h) &= f_4^*(x) \end{aligned} \right\}$$

Розв'язання граничних задач для ортотропного шару будемо знаходити методом інтегрального перетворення Фур'є, в просторі трансформант. Детальніше про метод наведено в роботі [159].

Опишемо ідею застосування інтегрального перетворення Фур'є до поставленої задачі.

Першим кроком потрібно сформулювати постановку задачі в просторі трансформант, для чого потрібно побудувати аналоги базових рівнянь, законів, граничних умов, що визначають розв'язок задачі.

В якості базових рівнянь обираються бігармонічне рівняння для ортотропного матеріалу, рівняння, що пов'язують трансформанти напружень та переміщень і трансформанту функції напружень.

Наступним кроком є побудова розв'язку поставленої в просторі трансформант задачі, що може вимагати використання різних методів, зокрема аналітичного чи числового, залежно від складності задачі.

Третім кроком необхідно знайдений розв'язок піддати оберненому інтегральному одновимірному (для плоскої задачі) перетворенню Фур'є.

Нехай функція  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  визначена на всій числовій осі і задовольняє умовам:

1.  $f(x)$  абсолютно інтегрована, тобто  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  збігається;
2. на будь-якому скінченному відрізку числової осі  $f(x)$  немає нескінченного числа точок максимумів і мінімумів, а також нескінченне число точок розриву першого роду;
3. функція  $f(x)$  немає розривів другого роду.

При виконанні цих достатніх умов, мають місце формули [159]:

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i\xi x} dx, \quad (2.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) \cdot e^{-i\xi x} d\xi. \quad (2.2)$$

Формула (2.1) визначає пряме одновимірне інтегральне перетворення Фур'є для функції  $f(x)$ , а формула (2.2) – оберене (зворотне) перетворення. Функція  $\bar{f}(\xi)$  називається трансформантою Фур'є функції  $f(x)$ .

Нехай функції  $f(x)$ ,  $f'(x)$  задовільняють достатнім умовам існування перетворення Фур'є, тоді існують інтеграли:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot e^{i\xi x} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i\xi x} dx,$$

для всіх дійсних значень параметра  $\xi$ , при  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $f'(x) \rightarrow 0$ .

Застосуємо правило інтегрування по частинам для першого інтегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} df(x) = e^{i\xi x} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx = -i\xi \bar{f}(\xi).$$

У загальному випадку властивість перетворення Фур'є до похідної  $f^k(x)$  описується формулою [159]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \cdot e^{i\xi x} dx = (-i\xi)^k \cdot \bar{f}(\xi). \quad (2.3)$$

Для визначення напружень  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  скористаємось рівняннями рівноваги (2.4), рівнянням сумісності деформацій (2.5) та співвідношеннями закону Гука в прямій формі для ортотропного матеріалу (2.6) [153]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x - c_{12}\sigma_y \\ \varepsilon_y &= -c_{21}\sigma_x + c_{22}\sigma_y \\ \gamma_{xy} &= c_{33}\tau_{xy} \end{aligned} \right\}, \quad (2.6)$$

$$\text{де } c_{11} = \frac{1-v_{xz} \cdot v_{zx}}{E_x}, c_{22} = \frac{1-v_{yz} \cdot v_{zy}}{E_y}, c_{12} = c_{21} = \frac{v_{xy} + v_{xz} \cdot v_{zy}}{E_y} = \frac{v_{yx} + v_{zx} \cdot v_{yz}}{E_x}, c_{33} = \frac{1}{G_{xy}},$$

$$G_{xy} = \frac{\sqrt{E_x \cdot E_y}}{2 \cdot (1 + \sqrt{v_{xy} \cdot v_{yx}})} - \text{коєфіцієнти пружності, } v_{xz}, v_{zx}, v_{xy}, v_{yz}, v_{zy}, E_x, E_y -$$

модулі пружності матеріалу шару.

Підставимо в (2.5) деформації із закону Гука (2.6) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (c_{11}\sigma_x - c_{12}\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (-c_{21}\sigma_x + c_{22}\sigma_y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (c_{33}\tau_{xy}), \\ c_{11} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - c_{12} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - c_{21} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} &= c_{33} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

За умови відсутності об'ємних сил ( $X = 0, Y = 0$ ) система (2.4) приймає вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Продиференціюємо перше рівняння в цій системі по  $x$ , друге рівняння по  $y$ , після почленного додавання отримаємо (2.8):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0,$$

$$-2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right). \quad (2.8)$$

Підставимо (2.8) у вираз (2.7) і зведемо подібні:

$$c_{11} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - c_{12} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - c_{21} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \cdot c_{33} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right),$$

$$c_{11} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - c_{12} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - c_{21} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{c_{33}}{2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{c_{33}}{2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -c_{21} \sigma_x + c_{22} \sigma_y + \frac{1}{2} \cdot c_{33} \sigma_x \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( c_{11} \sigma_x - c_{12} \sigma_y + \frac{1}{2} \cdot c_{33} \sigma_y \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (c_{33} - 2c_{21}) \cdot \sigma_x + 2c_{22} \sigma_y \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( 2c_{11} \sigma_x + (c_{33} - 2c_{12}) \cdot \sigma_y \right) = 0.$$

Для випадку, коли на тіло діє тільки власна вага, отримаємо рівняння нерозривності деформації записане у напруженнях:

$$\nabla^2 \left( (c_{33} - 2c_{21}) \cdot \sigma_x + 2c_{22} \sigma_y + 2c_{11} \sigma_x + (c_{33} - 2c_{12}) \cdot \sigma_y \right) = 0, \quad (2.9)$$

де  $\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$  – оператор Гамільтона або оператор набла.

Введемо нову функцію  $\varphi = \varphi(x, y)$ , так щоб рівняння рівноваги задовольнялось тотожно за допомогою функції напружень:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (2.10)$$

Підставимо (2.10) у рівняння (2.9), отримаємо:

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot (c_{33} - 2c_{21}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot 2c_{22} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot 2c_{11} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (c_{33} - 2c_{12}) \right) = 0,$$

$$\text{де } c_{12} = c_{21} = \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz} \cdot \nu_{zy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx} + \nu_{zx} \cdot \nu_{yz}}{E_x}.$$

У розгорнутому вигляді рівняння будемо мати не бігарманічне рівняння, а рівняння спільності деформацій виду (2.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} (c_{33} - 2c_{12}) + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \cdot 2c_{22} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \cdot 2c_{11} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} (c_{33} - 2c_{12}) &= 0, \\ 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} (c_{33} - 2c_{12}) + 2 \cdot c_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot c_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^4} &= 0, \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} (c_{33} - 2c_{12}) + c_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + c_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^4} &= 0, \\ c_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (c_{33} - 2c_{12}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

де  $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}$  – коефіцієнти пружності в законі Гука.

Запишемо формулу (2.11) у вигляді:

$$A_2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2A_3 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_1 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (2.12)$$

де  $A_1 = c_{11} \neq 0$ ,  $A_2 = c_{22}$ ,  $A_3 = \frac{1}{2} \cdot c_{33} - c_{12}$ .

Застосуємо до отриманого бігармонічного рівняння (2.12) інтегральне перетворення Фур'є (2.1). Помножимо обидві частини рівняння на  $e^{i\xi x}$  і проінтегруємо по змінній  $x$  в області  $(-\infty, +\infty)$ , отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} e^{i\xi x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} 2A_3 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} e^{i\xi x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} A_1 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} e^{i\xi x} dx = 0. \quad (2.13)$$

Використовуючи властивості перетворення Фур'є (2.3), рівняння (2.13) приймає вигляд

$$A_2 \xi^4 \cdot \bar{\varphi} - 2A_3 \xi^2 \cdot \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} + A_1 \cdot \frac{d^4 \bar{\varphi}}{dy^4} = 0, \quad (2.14)$$

та представляє з себе звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку відносно невідомої функції  $\bar{\varphi}(\xi, y)$

$$\bar{\varphi}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) \cdot e^{i\xi x} dx. \quad (2.15)$$

Зауважимо, що для кожного значення  $\xi$  інтегрального перетворення Фур'є (2.14) є звичайним диференціальним рівнянням четвертого порядку з постійними коефіцієнтами.

Поділимо рівняння (2.14) на  $A_1$  ( $A_1 \neq 0$ ) і запишемо відповідне йому характеристичне рівняння відносно невідомої  $r$ :

$$\frac{A_2}{A_1} \cdot \lambda^4 - \frac{2A_3}{A_1} \cdot \lambda^2 r^2 + r^4 = 0, \quad \lambda = |\xi|. \quad (2.16)$$

Для розв'язання бікватратного рівнянь зробимо заміну змінної  $t = r^2$ ,  $t > 0$ . Отримаємо квадратне рівняння:

$$t^2 - \frac{2A_3}{A_1} \cdot \lambda^2 \cdot t + \frac{A_2}{A_1} \cdot \lambda^4 = 0.$$

Знайдемо корені рівняння:

$$\begin{aligned} D &= \left( \frac{2A_3}{A_1} \cdot \lambda^2 \right)^2 - 4 \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \lambda^4 = \frac{4 \cdot A_3^2 \lambda^4}{A_1^2} - 4 \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \lambda^4 = \frac{4 \cdot A_3^2 \lambda^4 - 4 \cdot A_1 A_2 \lambda^4}{A_1^2} = \\ &= \frac{4\lambda^4 \cdot (A_3^2 - A_1 A_2)}{A_1^2} = \frac{4A_3^2 \lambda^4}{A_1^2} \cdot \left( 1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2} \right). \end{aligned}$$

Можливі всі три випадки, коли  $D > 0$ ,  $D < 0$ ,  $D = 0$ .

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{\frac{2A_3}{A_1} \cdot \lambda^2 \pm \sqrt{\frac{4A_3^2 \lambda^4}{A_1^2} \cdot \left( 1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2} \right)}}{2} = \frac{\frac{2A_3 \lambda^2}{A_1} \pm \frac{2|A_3| \lambda^2}{A_1} \cdot \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}{2} = \\ &= \frac{2 \cdot \frac{A_3 \lambda^2}{A_1} \cdot \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}} \right)}{2} = \frac{A_3 \lambda^2}{A_1} \cdot \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}} \right). \end{aligned}$$

Повернемося до змінної  $r$ :

$$r_{1,2}^2 = \frac{A_3 \lambda^2}{A_1} \cdot \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}} \right),$$

$$r_{1,4} = \pm \sqrt{\frac{A_3 \lambda^2}{A_1} \cdot \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}} \right)} = \pm \lambda \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}. \quad (2.17)$$

Отже маємо чотири корені виду  $r = \pm \lambda \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}$ .

Враховуємо особливість розрахунку для ортотропних матеріалів. Для ортотропних тіл вигляд функції  $\bar{\varphi}(\xi, y)$ , а відповідно й  $\varphi(x, y)$  залежить від коефіцієнтів  $A_1, A_2, A_3$ . Мають місце три випадки [153]:

1)  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} > 1$ , маємо  $\pm(r_1 \pm r_2 i)$  дві пари комплексно спряжених корня, а функція трансформанти буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\xi, y) = & (C_1(\xi) \cdot ch r_1 y + C_2(\xi) \cdot sh r_1 y) \cdot cos r_2 y \\ & + (C_3(\xi) \cdot ch r_1 y + C_4(\xi) \cdot sh r_1 y) \cdot sin r_2 y, \end{aligned} \quad (2.18)$$

де  $C_j(\xi)$ ,  $j = 1 \dots 4$  – довільні функції параметра  $\xi$ , корні  $r_{1,2}$  приймають вид:

$$r_{1,2} = \lambda \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_3^2}} \pm 1 \right)}. \quad (2.19)$$

2)  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ , маємо дійсні кратні корні  $r_{1,2} = \xi \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$  і  $r_{3,4} = -\xi \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$ ,

а функція  $\varphi(x, y)$  буде мати вигляд:

$$\bar{\varphi}(\xi, y) = C_1(\xi) \cdot e^{r_1 y} + C_2(\xi) \cdot r_1 y e^{r_1 y} + C_3(\xi) \cdot e^{r_2 y} + C_4(\xi) \cdot r_2 y e^{r_2 y}.$$

Або у вигляді:

$$\bar{\varphi}(\xi, y) = C_1(\xi)ch r_1 y + C_2(\xi)sh r_1 y + C_3(\xi)r_2 y ch r_2 y + C_4(\xi)r_2 y sh r_2 y. \quad (2.20)$$

3)  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1$ , маємо чотири дійсних корня  $\pm r_1$  і  $\pm r_2$ , де

$$r_{1,2} = \lambda \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}. \quad (2.21)$$

Функція  $\bar{\varphi}(\xi, y)$  буде мати вигляд:

$$\bar{\varphi}(\xi, y) = C_1(\xi) \cdot ch r_1 y + C_2(\xi) \cdot sh r_1 y + C_3(\xi) \cdot ch r_2 y + C_4(\xi) \cdot sh r_2 y, \quad (2.22)$$

де  $r_{1,2}$  визначаються формулами (2.21).

Знаходимо співвідношення між трансформантами напружень, переміщень і трансформантою функції напружень  $\bar{\varphi}(\xi, y)$ . Для цього помножимо формули (2.10) на  $e^{i\xi x}$  і проінтегруємо по змінній  $x$  в області  $(-\infty, +\infty)$ . Застосовуючи формулу (2.3) отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x \cdot e^{i\xi x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot e^{i\xi x} dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y \cdot e^{i\xi x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot e^{i\xi x} dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy} \cdot e^{i\xi x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot e^{i\xi x} dx \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x(\xi, y) &= \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} \\ \bar{\sigma}_y(\xi, y) &= (-i\xi)^2 \cdot \bar{\varphi} = -\xi^2 \bar{\varphi} \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) &= i\xi \cdot \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \end{aligned} \right\}. \quad (2.23)$$

Аналогічно для формул (2.6):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot e^{i\xi x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} c_{11} \sigma_x \cdot e^{i\xi x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} c_{12} \sigma_y \cdot e^{i\xi x} dx, \\ -i\xi \cdot \bar{u}_x(\xi, y) &= c_{11} \bar{\sigma}_x(\xi, y) - c_{12} \bar{\sigma}_y(\xi, y), \\ \bar{u}_x(\xi, y) &= \frac{i}{\xi} \cdot \left( c_{11} \bar{\sigma}_x(\xi, y) - c_{12} \bar{\sigma}_y(\xi, y) \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot e^{i\xi x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot e^{i\xi x} dx &= c_{33} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\xi, y) \cdot e^{i\xi x} dx, \\ -i\xi \cdot \bar{u}_y(\xi, y) + \frac{d\bar{u}_x}{dy} &= c_{33} \cdot \bar{\tau}_{xy}(\xi, y), \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= \frac{i}{\xi} \cdot \left( c_{33} \cdot \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) - \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

### 2.1.2 Випадок двох пар комплексно спряжених коренів

Розглянемо детальніше випадок коли  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} > 1$ , де  $A_1, A_2, A_3$ - коефіцієнти бігармонічного рівняння (2.12), (2.16). В цьому випадку рівняння (2.16) має дві пари комплексно спряжених коренів виду (2.19).

Зауважимо, що для такі значення можуть досягатись за від'ємних значень коефіцієнта Пуасона, наприклад для ауксетиків, foam structures, ortofoam [102, 115, 136].

Трансформанту функції напружень запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\xi, y) &= \left( C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \cos(ry\sqrt{a_2}) \\ &+ \left( D \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

де  $r = |\xi|$ ,  $\sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_3^2}} + 1 \right)}$ ,  $\sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_3^2}} - 1 \right)}$ ,  $A = A(\xi)$ ,

$B = B(\xi)$ ,  $C = C(\xi)$ ,  $D = D(\xi)$  – невідомі функції параметру інтегрування.

Підставимо трансформанту (2.26) в вираз (2.23) і знайдемо трансформанти напружень:

$$\begin{aligned}
 \overline{\sigma_x}(\xi, y) &= \left( C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot (a_1 - a_2) \cdot r^2 \cos(ry\sqrt{a_2}) \\
 &\quad - \left( C \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot 2r^2 \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \sin(ry\sqrt{a_2}) \\
 &\quad + \left( D \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot (a_1 - a_2) \cdot r^2 \sin(ry\sqrt{a_2}) \\
 &\quad + \left( D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot 2r^2 \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \cos(ry\sqrt{a_2}), \\
 \overline{\sigma_y}(\xi, y) &= -\xi^2 \left( C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \cos(ry\sqrt{a_2}) \\
 &\quad + \left( D \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}), \\
 \overline{\tau_{xy}}(\xi, y) &= \left( C \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot i\xi r \sqrt{a_1} \cos(ry\sqrt{a_2}) \\
 &\quad - \left( C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot i\xi r \sqrt{a_2} \sin(ry\sqrt{a_2}) \\
 &\quad + \left( D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot i\xi r \sqrt{a_1} \sin(ry\sqrt{a_2}) \\
 &\quad + \left( D \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot i\xi r \sqrt{a_2} \cos(ry\sqrt{a_2}). \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Для знаходження  $\overline{u_x}(\xi, y)$ ,  $\overline{u_y}(\xi, y)$  підставимо (2.26) в (2.23) – (2.24):

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x(\xi, y) &= \left( C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot ((a_1 - a_2)c_{11} + c_{12}) i\xi \cos(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad - \left( C \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot 2c_{11}\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} i\xi \sin(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad + \left( D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot 2c_{11}\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} i\xi \cos(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad + \left( D \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot ((a_1 - a_2)c_{11} + c_{12}) \\
&\quad \cdot i\xi \sin(ry\sqrt{a_2}), \\
\bar{u}_y(\xi, y) &= \left( C \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot a_1\sqrt{a_1} r c_{11} \cos(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad + \left( C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot a_2\sqrt{a_2} r c_{11} \sin(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad - \left( B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + D \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot a_2\sqrt{a_2} r c_{11} \cos(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad + \left( B \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot a_1\sqrt{a_1} r c_{11} \sin(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad - \left( C \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \sqrt{a_1} r \cos(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad \cdot (3a_2c_{11} - c_{12} + c_{33}) + \left( B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + D \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \\
&\quad \cdot (3a_2c_{11} - c_{12} + c_{33}) \cdot \sqrt{a_2} r \cos(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad - \left( C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \sqrt{a_2} r \sin(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad \cdot (3a_2c_{11} - c_{12} + c_{33}) - \left( B \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \\
&\quad \cdot (3a_2c_{11} - c_{12} + c_{33}) \cdot \sqrt{a_1} r \sin(ry\sqrt{a_2}). \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Одним із поширених підходів подання розв'язків задач теорії пружності є представлення цих розв'язків через допоміжні функції, що пов'язані з граничними умовами задачі, зокрема метод функцій Власова В. З. [170, 171], метод функцій податливості [64, 81].

Враховуючи, що розв'язок більшості задач у цій роботі буде будуватись на основі методу функцій податливості, то доцільним є перехід до представлення шуканих трансформант через функції  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$ ,

які пов'язані з граничними умовами на верхній межі шару, півплощини, багат шарової основи.

Введемо в розгляд функції  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  пов'язані з умовами на межі  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= \overline{\sigma}_y|_{y=0}, & \delta(\xi) &= -\frac{i\xi}{r^2} \cdot \overline{\tau}_{xy}|_{y=0}, \\ \beta(\xi) &= \frac{1}{2(a_1 + a_2)c_{11}} \cdot \overline{u}_y|_{y=0}, & \gamma(\xi) &= -\frac{i\xi}{2c_{11}} \cdot \overline{u}_x|_{y=0}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Із (2.27)–(2.28), отримаємо:

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= -Cr^2, & \delta(\xi) &= r \cdot (A\sqrt{a_1} + D\sqrt{a_2}), \\ \beta(\xi) &= Dr\sqrt{a_2} + \frac{\delta(\xi) \cdot (a_1c_{11} - 3a_2c_{11} + c_{12} - c_{33})}{2(a_1 + a_2)c_{11}}, \\ \gamma(\xi) &= Br^2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} - \frac{\alpha(\xi) \cdot ((a_1 - a_2) \cdot c_{11} + c_{12})}{2c_{11}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Виразимо  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  через  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2(a_1 + a_2)c_{11}\beta - 3a_1c_{11}\delta + a_2c_{11}\delta - c_{12}\delta + c_{33}\delta}{2(a_1 + a_2)\sqrt{a_1}rc_{11}}, \\ B &= \frac{(a_1 - a_2)c_{11}\alpha + c_{12}\alpha + 2c_{11}\gamma}{2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}r^2c_{11}}, & C &= -\frac{\alpha}{r^2}, \\ D &= \frac{2(a_1 + a_2)c_{11}\beta - a_1c_{11}\delta + 3a_2c_{11}\delta - c_{12}\delta + c_{33}\delta}{2(a_1 + a_2)\sqrt{a_2}rc_{11}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Тепер підставимо отримані вирази у трансформанти напружень  $\overline{\sigma}_x(\xi, y)$ ,  $\overline{\sigma}_y(\xi, y)$ ,  $\overline{\tau}_{xy}(\xi, y)$  (2.27), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x &= \frac{1}{-2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}c_{11}} \left( (-\alpha c_{11}(a_1 + a_2)^2 - 2\gamma c_{11}(a_1 - a_2) - \alpha c_{12}(a_1 - a_2)) \right. \\
&\quad \cdot sh(ry\sqrt{a_1}) \cdot sin(ry\sqrt{a_2}) - r \cdot sh(ry\sqrt{a_1}) \cdot cos(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad \cdot (a_2\sqrt{a_2}c_{11}(\delta + 2\beta) + a_1\sqrt{a_2}c_{11}(\delta + 2\beta) - \sqrt{a_2}\delta(c_{12} - c_{33})) \\
&\quad + r(a_1\sqrt{a_1}c_{11}(\delta - 2\beta) + a_2\sqrt{a_1}c_{11}(\delta - 2\beta) + \sqrt{a_1}\delta(c_{12} - c_{33})) \\
&\quad \cdot ch(ry\sqrt{a_1}) \cdot sin(ry\sqrt{a_2}) - ch(ry\sqrt{a_1}) \cdot cos(ry\sqrt{a_2}) \cdot 4\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} \\
&\quad \left. \cdot \left( \gamma c_{11} + \frac{1}{2}\alpha c_{12} \right) \right), \\
\bar{\sigma}_y &= \frac{1}{-2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}c_{11}(a_1 + a_2)} \left( ((a_1 - a_2) \cdot \alpha c_{11} + 2\gamma c_{11} + \alpha c_{12}) \cdot (a_1 + a_2) \right. \\
&\quad \cdot sin(ry\sqrt{a_2}) \cdot sh(ry\sqrt{a_1}) - \sqrt{a_2} \cdot r \cdot cos(ry\sqrt{a_2}) \cdot sh(ry\sqrt{a_1}) \\
&\quad \cdot (2\beta c_{11}(a_1 + a_2) + (a_2 c_{11} - 3a_1 c_{11} - c_{12} + c_{33})\delta) + \sqrt{a_1} \cdot r \\
&\quad \cdot (2\beta c_{11}(a_1 + a_2) - (a_1 c_{11} - 3a_2 c_{11} + c_{12} - c_{33})\delta) \cdot sin(ry\sqrt{a_2}) \\
&\quad \left. \cdot ch(ry\sqrt{a_1}) - 2\alpha c_{11}\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}(a_1 + a_2) \cdot cos(ry\sqrt{a_2})ch(ry\sqrt{a_1}) \right), \\
\bar{\tau}_{xy} &= \frac{i\xi}{-2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}c_{11}r} \left( (((a_1 - a_2)\delta - 2\beta(a_1 + a_2)) \cdot c_{11} + \delta(c_{12} - c_{33})) \right. \\
&\quad \cdot r \cdot sin(ry\sqrt{a_2}) \cdot sh(ry\sqrt{a_1}) + \sqrt{a_2} \cdot cos(ry\sqrt{a_2}) \cdot sh(ry\sqrt{a_1}) \\
&\quad \cdot (a_2 c_{11} \alpha + ((a_1 \alpha - 2\gamma)c_{11} - \alpha c_{12})) - sin(ry\sqrt{a_2}) \cdot ch(ry\sqrt{a_1}) \\
&\quad \cdot \sqrt{a_1}(a_1 c_{11} + (a_2 \alpha + 2\gamma) \cdot c_{11} + \alpha c_{12}) - 2\delta r c_{11} \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \\
&\quad \left. \cdot cos(ry\sqrt{a_2}) \cdot ch(ry\sqrt{a_1}) \right). \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Аналогічно підставимо отримані вирази (2.31) у трансформанти переміщень (2.28) і отримаємо:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x(\xi, y) = & \frac{i\xi}{-2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}c_{11}r^2(a_1 + a_2)} \left( -(a_1 + a_2) \right. \\
& \cdot \left( (\alpha a_1^2 + 2a_1(a_2\alpha + \gamma) + a_2(a_2\alpha - 2\gamma)) \cdot c_{11}^2 \right. \\
& + 2c_{12}(a_1\alpha - a_2\alpha + \gamma)c_{11} + \alpha c_{12}^2 \left. \right) \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}) \cdot \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \\
& - \left( a_2\sqrt{a_2}c_{11}(2a_1c_{11}(\delta + 2\beta) + (c_{33} - 2c_{12})\delta - \beta c_{12}) + \sqrt{a_2} \right. \\
& \cdot \left( a_1^2c_{11}^2(\delta + 2\beta) + a_1c_{11} \cdot ((2c_{12} + c_{33}) \cdot \delta - \beta c_{12}) + \delta c_{12} \right. \\
& \cdot (c_{12} - c_{33}) \left. \right) + a_2^2\sqrt{a_2}c_{11}^2(\delta + 2\beta) \left. \right) \cdot r \cos(ry\sqrt{a_2}) \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \\
& + \left( a_1\sqrt{a_1}c_{11}(2a_2c_{11} \cdot (\delta - 2\beta) + (2c_{12} - c_{33})\delta - \beta c_{12}) + \sqrt{a_1} \right. \\
& \cdot \left( a_2^2c_{11}^2 \cdot (\delta - 2\beta) - a_2 \cdot ((2c_{12} + c_{33})\delta + \beta c_{12})c_{11} \right. \\
& + \delta c_{12}(c_{12} - c_{33}) \left. \right) + a_1^2\sqrt{a_1}c_{11}^2(\delta - 2\beta) \left. \right) \cdot r \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}) \\
& \cdot \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) - 4\gamma\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}c_{11}^2(a_1 + a_2)\cos(ry\sqrt{a_2}) \cdot \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \left. \right), \\
\bar{u}_y(\xi, y) = & \frac{1}{-2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}c_{11} \cdot r} \left( \left( (a_1(\delta - 2\beta) + a_2(\delta + 2\beta)) \cdot (a_1 + a_2) \cdot c_{11}^2 \right. \right. \\
& + 2(c_{12} - c_{33}) \cdot (a_1(\delta - \beta) - a_2(\delta + \beta))c_{11} + \delta(c_{12} - c_{33})^2 \left. \right) \cdot r \\
& \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}) \cdot \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) - \sqrt{a_2} \cdot \cos(ry\sqrt{a_2}) \cdot \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \\
& \cdot \left( a_2c_{11}(2c_{11}(a_1\alpha + \gamma) - \alpha(2c_{12} - c_{33})) + a_2^2c_{11}^2\alpha \right. \\
& + a_1c_{11}^2(a_1\alpha + 6\gamma) + c_{11} \cdot (a_1\alpha \cdot (2c_{12} + c_{33}) + 2\gamma(c_{12} - c_{33})) \\
& + c_{12}\alpha(c_{12} - c_{33}) \left. \right) - \sqrt{a_1} \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}) \cdot \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \\
& \cdot \left( a_1c_{11} \cdot (2c_{11}(a_2\alpha + \gamma) + \alpha(2c_{12} - c_{33})) + 4a_1^2c_{11}^2\alpha - a_2c_{11}^2 \right. \\
& \cdot (6\gamma - a_2\alpha) - a_2c_{11}\alpha(2c_{12} + c_{33}) + 2\gamma c_{11}(c_{12} - c_{33}) + c_{12}\alpha \\
& \cdot (c_{12} - c_{33}) \left. \right) - 4\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}c_{11}^2r\beta \cdot (a_1 + a_2) \cdot \cos(ry\sqrt{a_2}) \\
& \cdot \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \left. \right). \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Із умов на верхній межі шару знаходяться дві з чотирьох допоміжних функцій  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , а інші дві знаходяться із умов на нижній межі.

Обчислюємо істинні значення напружень та переміщень за допомогою зворотного інтегрального перетворення Фур'є (2.2).

### 2.1.3 Випадок з дійсними кратними коренями

Розглянемо випадок коли  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ , де  $A_1, A_2, A_3$  – коефіцієнти бігармонічного рівняння (2.12), (2.16). Зробимо перетворення формули (2.20), враховуючи, що  $r_{1,2} = -r_{3,4}$ , а  $C_j(\xi)$ ,  $j = 1 \dots 4$  – довільні функції параметра  $\xi$ , отримаємо:

$$\bar{\varphi} = A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + B\sqrt{a}y \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}) + D\sqrt{a}y \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}), \quad (2.34)$$

де  $r = |\xi|$ ,  $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$ ,  $A, B, C, D$  – функції параметра  $\xi$ .

Підставимо трансформанту (2.34) в вираз (2.23) і знайдемо трансформанти напружень:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x(\xi, y) &= r^2 a \bar{\varphi} + 2ra \cdot (B \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}) + D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a})), \\ \bar{\sigma}_y(\xi, y) &= -\xi^2 (A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + B\sqrt{a}y \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}) \\ &\quad + D\sqrt{a}y \operatorname{ch}(ry\sqrt{a})), \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) &= i\xi ((A\sqrt{a}r + Bary + D\sqrt{a}) \cdot \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}) + (C\sqrt{a}r + Dary + B\sqrt{a}) \\ &\quad \cdot \operatorname{sh}(ry\sqrt{a})). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Аналогічно підставимо у формули (2.24), (2.25) знайдемо переміщення:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(\xi, y) &= \frac{i}{\xi} \cdot \left( \xi^2 \bar{\varphi} \cdot (c_{11}a + c_{12}) + 2rac_{11} \left( B \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}) + D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) \right) \right), \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= -\frac{2rac_{11}}{\xi^2} \cdot \left( Br\sqrt{a} \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + Dr\sqrt{a} \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}) \right) \\ &\quad + (ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{d\bar{\varphi}}{dy}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Введемо в розгляд функції  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  пов'язані з умовами на межі  $y = 0$ :

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= \bar{\sigma}_y|_{y=0}, & \delta(\xi) &= -\frac{i\xi}{r\sqrt{a}} \cdot \bar{\tau}_{xy}|_{y=0}, \\ \beta(\xi) &= \frac{r}{\sqrt{a}} \cdot \bar{u}_y|_{y=0}, & \gamma(\xi) &= -i\xi \cdot \bar{u}_x|_{y=0}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Із (2.35)-(2.36) отримаємо:

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= -C\xi^2, & \beta(\xi) &= 2Dac_{11}r + \delta(\xi) \cdot (ac_{11} + c_{12} - c_{33}), \\ \gamma(\xi) &= 2Bac_{11}r - \alpha(\xi) \cdot (ac_{11} + c_{12}), & \delta(\xi) &= r \cdot (Ar + D).\end{aligned}\quad (2.38)$$

Виразимо  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  через  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$ , отримаємо:

$$\begin{aligned}A &= \frac{(3ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \delta - \beta}{2r^2ac_{11}}, & B &= \frac{\gamma - (ac_{11} + c_{12}) \cdot \alpha}{2ac_{11}r}, \\ C &= -\frac{\alpha}{r^2}, & D &= \frac{\beta - (ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \delta}{2ac_{11}r}.\end{aligned}$$

Тепер підставимо отримані вирази у трансформанти напружень (2.35):

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x(\xi, y) &= (-a\sqrt{ac_{11}}\delta ry - \sqrt{ac_{12}}\delta ry + \sqrt{ac_{33}}\delta ry + \sqrt{a}\beta ry - 4ac_{11}\alpha - 2c_{12}\alpha \\
&\quad + 2\gamma) \cdot \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2c_{11}} + \frac{sh(ry\sqrt{a})}{2c_{11}} \cdot (-a\sqrt{ac_{11}}\alpha ry - \sqrt{ac_{12}}\alpha ry \\
&\quad + \sqrt{a}\gamma ry + ac_{11}\delta - c_{12}\delta + c_{33}\delta + \beta), \\
\bar{\sigma}_y(\xi, y) &= (-3a\sqrt{ac_{11}}\delta - \sqrt{ac_{12}}\delta + \sqrt{ac_{33}}\delta + \sqrt{a}\beta + a^2c_{11}\alpha ry + ac_{12}\alpha ry \\
&\quad - a\gamma ry) \cdot \frac{sh(ry\sqrt{a})}{2a\sqrt{ac_{11}}} + \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2a\sqrt{ac_{11}}} \cdot (2a\sqrt{ac_{11}}\alpha + a^2c_{11}\delta ry \\
&\quad + ac_{12}\delta ry - ac_{33}\delta ry - a\beta ry), \\
\bar{\tau}_{xy}(\xi, y) &= (a\sqrt{ac_{11}}\delta ry + \sqrt{ac_{12}}\delta ry - \sqrt{ac_{33}}\delta ry - \sqrt{a}\beta ry + 3ac_{11}\alpha + c_{12}\alpha \\
&\quad - \gamma) \cdot \frac{i\xi \cdot sh(ry\sqrt{a})}{-2\sqrt{ac_{11}}r} + \frac{i\xi \cdot ch(ry\sqrt{a})}{2\sqrt{ac_{11}}r} \\
&\quad \cdot (-a\sqrt{ac_{11}}\alpha ry - \sqrt{ac_{12}}\alpha ry + \sqrt{a}\gamma ry + 2ac_{11}\delta). \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Аналогічно підставимо отримані вирази у трансформанти переміщень:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x(\xi, y) &= (ac_{11}(2c_{12}\delta + c_{33}\delta + \beta) + a^2c_{11}^2\delta + (c_{12}\delta - c_{33}\delta - \beta) \cdot c_{12} \\
&\quad + \sqrt{a}\alpha ry \cdot (ac_{11} + c_{12}) \cdot (\gamma - ac_{11}\alpha - c_{12}\alpha)) \cdot \frac{i \cdot sh(ry\sqrt{a})}{2a\xi c_{11}} \\
&\quad - (ry \cdot (ac_{11} + c_{12})(ac_{11}\delta + c_{12}\delta - c_{33}\delta - \beta) + 4a\sqrt{ac_{11}}^2\alpha \\
&\quad - 2\sqrt{ac_{11}}(\gamma - 2c_{12}\alpha)) \cdot \frac{i \cdot ch(ry\sqrt{a})}{2\sqrt{a}\xi c_{11}}, \\
\bar{u}_y(\xi, y) &= (-ac_{11}ry(2c_{12}\delta - 2c_{33}\delta - \beta) - a^2c_{11}^2\delta ry - ry(c_{12} - c_{33}) \\
&\quad \cdot (c_{12}\delta - c_{33}\delta - \beta) - 5a\sqrt{ac_{11}}^2\alpha + 3\sqrt{ac_{11}}(\gamma - 2c_{12}\alpha + c_{33}\alpha) \\
&\quad + (c_{12} - c_{33})(\gamma - c_{12}\alpha)) \cdot \frac{sh(ry\sqrt{a})}{2rc_{11}} + \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2rc_{11}} \\
&\quad \cdot (ac_{11}ry \cdot (\gamma - 2c_{12}\alpha + c_{33}\alpha) - a^2c_{11}^2\alpha ry + ry \cdot (c_{12} - c_{33}) \\
&\quad \cdot (\gamma - c_{12}\alpha) + 2\sqrt{ac_{11}}\beta). \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Розглянемо задачу визначення напружень та переміщень в пружному шарі в трьох постановках, що відповідають основним крайовим (межовим) задачам механіки деформованого твердого тіла.

Перша основна крайова задача для ортотропного шару.

1) на межах  $y = 0$  та  $y = -h$  задані навантаження:

$$\sigma_y(x, 0) = f_1(x), \tau_{xy}(x, 0) = f_2(x), \sigma_y(x, -h) = f_3(x), \tau_{xy}(x, -h) = f_4(x).$$

2) на нескінченності напруження прямують до нуля:

$$\lim_{x^2 \rightarrow \infty} \sigma_y(x, y) = 0, \lim_{x^2 \rightarrow \infty} \tau_{xy}(x, y) = 0.$$

Друга основна крайова задача для ортотропного шару.

На межах  $y = 0$  та  $y = -h$  задані переміщення:

$$u_y(x, 0) = g_1(x), u_x(x, 0) = g_2(x), u_y(x, -h) = g_3(x), u_x(x, -h) = g_4(x).$$

Змішана крайова задача для ортотропного шару.

1) на верхній межі  $y = 0$  задані напруження:

$$\sigma_y(x, 0) = p_1(x), \tau_{xy}(x, 0) = p_2(x).$$

2) на нижній межі  $y = -h$  переміщення дорівнюють нулю:

$$u_y(x, -h) = 0, u_x(x, -h) = 0.$$

3) на нескінченності напруження прямують до нуля.

Із умов на верхній межі шару знаходяться дві з чотирьох допоміжних функцій  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  (2.37), а інші дві знаходяться із умов на нижній межі.

Наприклад для першої основної граничної задачі відомими є функції  $\alpha(\xi) = \bar{f}_1(\xi)$  і  $\delta(\xi) = -\frac{i\xi}{|\xi|\sqrt{a}} \cdot \bar{f}_2(\xi)$ , а для другої основної граничної задачі  $\beta(\xi) = \frac{|\xi|}{\sqrt{a}} \cdot \bar{g}_1(\xi)$  і  $\gamma(\xi) = -i\xi \bar{g}_2(\xi)$ .

Розглянемо першу основну задачі  $\alpha(\xi) = \bar{f}_1(\xi)$  і  $\delta(\xi) = -\frac{i\xi}{|\xi|\sqrt{a}} \cdot \bar{f}_2(\xi)$ . Із умов на нижній межі шару отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій  $\beta(\xi)$  і  $\gamma(\xi)$ . Розв'язавши систему отримаємо:

$$\begin{aligned} \beta(\xi) &= \frac{1}{\Delta} \cdot \left( ir\bar{f}_2(3ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot C^2 + 2a\sqrt{a}c_{11}\xi(\sqrt{a}rh\bar{f}_3 - \bar{f}_1S) \cdot C \right. \\ &\quad \left. + 2a\sqrt{a}c_{11} \cdot (ir^2h\bar{f}_4 + \bar{f}_3\xi) \cdot S - 2a^2c_{11}\xi^2rh\bar{f}_1 - r \right. \\ &\quad \left. \cdot (iar^2h^2\bar{f}_2 \cdot (ac_{11} + c_{12} - c_{33}) + i\bar{f}_2 \cdot (3ac_{11} + c_{12} - c_{33})) \right), \\ \gamma(\xi) &= \frac{1}{\Delta} \cdot \left( -\sqrt{a}\bar{f}_1\xi(c_{12} + 3ac_{11}) \cdot C^2 + 2irac_{11}(\sqrt{a}rh\bar{f}_4 + \bar{f}_2S) \cdot C + 2ac_{11}r \right. \\ &\quad \left. \cdot (\xi ah\bar{f}_3 - i\bar{f}_4) \cdot S + a^2\sqrt{a}\xi c_{11}\bar{f}_1r^2h^2 + a\sqrt{a}\xi c_{12}\bar{f}_1r^2h^2 - \xi\sqrt{a} \right. \\ &\quad \left. \cdot (-ac_{12}\bar{f}_1r^2h^2 + 2i\xi ac_{11}\bar{f}_2h - 3ac_{11}\bar{f}_1 - c_{12}\bar{f}_1) \right), \end{aligned}$$

де  $\Delta = \sqrt{a}\xi \cdot (ar^2h^2 - C^2 + 1)$ ,  $C = ch(rh\sqrt{a})$ ,  $S = sh(rh\sqrt{a})$ .

Отримані вирази підставляємо у трансформанти напружень (2.39) і переміщень (2.40), щоб отримати остаточні вирази для трансформант, які потім піддаємо оберненому інтегральному перетворенню і отримуємо істинні значення.

Аналогічні дії застосовуються для розв'язання другої основної та змішаної задач. Наведемо необхідні формули, допоміжних функцій.

Для другої крайової задачі – відомими є функції  $\beta(\xi) = \frac{r}{\sqrt{a}} \cdot \bar{g}_1(\xi)$  і  $\gamma(\xi) = -i\xi \bar{g}_2(\xi)$ , а  $\alpha(\xi)$  і  $\delta(\xi)$  знаходяться з умов на нижній межі.

$$\alpha(\xi) = \frac{2ir\xi\sqrt{a}c_{11}}{\Delta_1} \left( -ac_{11}\bar{g}_2(2c_{12} + c_{33}) - a^2c_{11}^2\bar{g}_2 - c_{12}\bar{g}_2 \cdot (c_{12} - c_{33}) \right. \\ \left. + \sqrt{a}rh\bar{g}_1 \cdot (ac_{11} + c_{12} - c_{33})^2 \right) \cdot S + \frac{2ir^2h\xi ac_{11}\bar{g}_2}{\Delta_1} \\ \cdot (ac_{11} + c_{12})(ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot C,$$

$$\delta(\xi) = \frac{2ir\xi ac_{11}}{\Delta_1} \left( 4a\sqrt{a}c_{11}^2\bar{g}_2 + 4\sqrt{a}c_{11}c_{12}\bar{g}_2 + rh\bar{g}_1 \cdot (ac_{11} + c_{12}) \right. \\ \left. \cdot (ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \right) \cdot C + \frac{2ir\xi\sqrt{a}c_{11}}{\Delta_1} \\ \cdot \left( 2a\sqrt{a}c_{11}c_{12}rh\bar{g}_2 + a^2\sqrt{a}c_{11}^2rh\bar{g}_2 + \sqrt{a}c_{12}^2rh\bar{g}_2 + 5a^2c_{11}^2\bar{g}_1 \right. \\ \left. + 3ac_{11}\bar{g}_1(2c_{12} - c_{33}) + c_{12}\bar{g}_1(c_{12} - c_{33}) \right) \cdot S,$$

$$\Delta_1 = (5a^2c_{11}^2 + 3ac_{11}(2c_{12} - c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33}))(a^2c_{11}^2 + ac_{11}(2c_{12} + c_{33}) \\ + c_{12}(c_{12} - c_{33})) \cdot C^2 - c_{11}^4(a^2\sqrt{a}r^2h^2 + 5a^4) - 2a^3c_{11}^3 \\ \cdot (2ac_{12}r^2h^2 - ac_{33}r^2h^2 + 8c_{12} + c_{33}) - 6a^2c_{11}^2c_{12}^2(ar^2h^2 + 3) \\ + 6a^2c_{11}^2c_{12} \cdot (ac_{33}r^2h^2 + c_{33}) - a^2c_{11}^2c_{33}^2 \cdot (ar^2h^2 - 3) \\ - 2ac_{11}c_{12} \cdot (c_{12} - c_{33}) \cdot (2c_{12}(ar^2h^2 + 2) - c_{33}(ar^2h^2 + 1)) \\ - c_{12}^2 \cdot (c_{12} - c_{33})^2 \cdot (ar^2h^2 + 1),$$

де  $C = ch(rh\sqrt{a}), S = sh(rh\sqrt{a})$ .

Для змішаної задачі заданими допоміжними функціями є  $\alpha(\xi) = \bar{p}_1(\xi)$  і  $\delta(\xi) = \bar{p}_2(\xi)$ . Нижня межа шару закріплена абсолютно жорстко. Тоді  $u_x(x, -h) = u_y(x, -h) = 0$  і отримаємо два лінійних рівняння виду:

$$a_{11}\alpha(\xi) + a_{12}\beta(\xi) + a_{13}\gamma(\xi) + a_{14}\delta(\xi) = 0, \\ a_{21}\alpha(\xi) + a_{22}\beta(\xi) + a_{23}\gamma(\xi) + a_{24}\delta(\xi) = 0,$$

де  $a_{ij}, i = 1, 2, j = \overline{1, 4}$  – відповідні коефіцієнти в  $\overline{u}_x(\xi, -h), \overline{u}_y(\xi, -h)$  при  $\alpha(\xi), \delta(\xi), \beta(\xi), \gamma(\xi)$ .

Виразимо з рівнянь дві функції  $\beta(\xi), \gamma(\xi)$ :

$$\begin{aligned}\beta(\xi) &= \frac{(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) \cdot \alpha(\xi) + (a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) \cdot \delta(\xi)}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}, \\ \gamma_k(\xi) &= \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot \alpha(\xi) + (a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) \cdot \delta(\xi)}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}.\end{aligned}\quad (2.41)$$

Підставимо відповідні коефіцієнти, отримаємо:

$$\begin{aligned}\beta &= -(a^2c_{11}^2 + ac_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33})) \cdot (3ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{C^2\delta}{\Delta_3} \\ &\quad - 2ac_{11}(a^2c_{11}^2 + ac_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33})) \cdot \frac{SC\alpha}{\Delta_3} \\ &\quad - 2a\sqrt{ar}hc_{11}c_{12}(c_{12} - c_{33}) \cdot \alpha - 2a^2\sqrt{ar}hc_{11}^2(2c_{12} - c_{33}) \cdot \alpha \\ &\quad - 2a^3\sqrt{ar}hc_{11}^3 \cdot \alpha + c_{11}^3(a^4r^2h^2 + 3a^3) \cdot \delta + a^2c_{11}^2 \\ &\quad \cdot (ar^2h^2 \cdot (3c_{12} - 2c_{33}) + 7c_{12} + 2c_{33}) \cdot \delta \\ &\quad + (3c_{11}c_{12}a^2r^2h^2 - a^2r^2h^2c_{11}c_{33} + ac_{12}^2r^2h^2 - ar^2h^2c_{12}c_{33} \\ &\quad + 5ac_{11}c_{12} + ac_{11}c_{33} + c_{12}^2 - c_{12}c_{33}) \cdot (c_{12} - c_{33}) \cdot \delta, \\ \gamma &= -(5a\sqrt{ac_{11}c_{12}^2} - 2a\sqrt{ac_{11}c_{12}c_{33}} + a^2\sqrt{ac_{11}^2}(c_{12} + 3c_{33}) + 3a^3\sqrt{ac_{11}^3} \\ &\quad + \sqrt{ac_{12}^2}(c_{12} - c_{33})) \cdot \frac{C^2\alpha}{\Delta_3} - 2c_{11} \cdot \frac{SC\delta}{\Delta_3} \\ &\quad \cdot (a\sqrt{ac_{12}} \cdot (c_{12} - c_{33}) + a^2\sqrt{ac_{11}^2} \cdot (ac_{11} + c_{12} + c_{33})) + a\sqrt{ac_{12}}\alpha \\ &\quad \cdot (c_{11}(5c_{12} - 2c_{33}) + r^2h^2c_{12}(c_{12} - c_{33})) + a^2\sqrt{ac_{11}^2}\alpha \\ &\quad \cdot (c_{11}(3c_{33} - c_{12}) + c_{12}r^2h^2(3c_{12} - 2c_{33})) + a^3\sqrt{ac_{11}^2}ar^2h^2 \\ &\quad \cdot (3c_{12} - c_{33}) - 5a^3\sqrt{ac_{11}^3}\alpha + a^4\sqrt{ac_{11}^3}ar^2h^2 + \sqrt{ac_{11}^2}\alpha(c_{12} - c_{33}) \\ &\quad + 2a^2c_{11}rh\delta(ac_{11} + c_{12})(ac_{11} + c_{12} - c_{33}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & - (a_1^2 c_{11}^2 + a_1 c_{11} (2c_{12} + c_{33}) + c_{12} (c_{12} - c_{33})) \cdot C^2 + c_{11}^2 (a^3 r^2 h^2 - 3a^2) \\ & + a c_{11} \cdot (a r^2 h^2 \cdot (2c_{12} - c_{33}) + 2c_{12} + c_{33}) + c_{12} \cdot (c_{12} - c_{33}) \\ & \cdot (a r^2 h^2 + 1), \end{aligned}$$

де  $C = ch(ry\sqrt{a_1}), S = sh(ry\sqrt{a_1})$ .

Таким чином маємо всі необхідні формули для розв'язання поставлених задач. Отримані формули піддаємо оберненому інтегральному перетворенню Фур'є (2.2). Для окремих випадків вдається отримати аналітичні вирази, в загальному випадку проводиться чисельне інтегрування за допомогою адаптивних алгоритмів.

#### 2.1.4 Випадок з чотирма дійсними коренями

Розглянемо випадок коли  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1$ , де  $A_1, A_2, A_3$  - коефіцієнти бігармонічного рівняння (2.12), (2.16). Запишемо формулу (2.22) у виді:

$$\bar{\varphi} = A ch(ry\sqrt{a_1}) + B sh(ry\sqrt{a_1}) + C ch(ry\sqrt{a_2}) + D sh(ry\sqrt{a_2}), \quad (2.42)$$

де  $r = |\xi|$ ,  $\sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}$ ,  $\sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}$ ,  $A, B,$

$C, D$  - функції параметра  $\xi$ .

Підставимо трансформанту (2.42) у вираз (2.23) і знайдемо трансформанти напружень:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x = & r^2 a_1 \left( A ch(ry\sqrt{a_1}) + B sh(ry\sqrt{a_1}) \right) + r^2 a_2 \\ & \cdot \left( C ch(ry\sqrt{a_2}) + D sh(ry\sqrt{a_2}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_y &= -\xi^2 \left( A \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_2}) + D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_2}) \right), \\ \bar{\tau}_{xy} &= i\xi \left( Ar\sqrt{a_1} \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + Br\sqrt{a_1} \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + Cr\sqrt{a_2} \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_2}) \right. \\ &\quad \left. + Dr\sqrt{a_2} \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_2}) \right).\end{aligned}\quad (2.43)$$

Аналогічно підставимо трансформанту (2.42) у формули (2.24), (2.25) знайдемо переміщення:

$$\begin{aligned}\bar{u}_y(\xi, y) &= \left( Ar\sqrt{a_1} \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + Br\sqrt{a_1} \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot (a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}) \\ &\quad + \left( Cr\sqrt{a_2} \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_2}) + Dr\sqrt{a_2} \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_2}) \right) \cdot (a_2 c_{11} + c_{12} - c_{33}), \\ \bar{u}_x(\xi, y) &= i\xi \left( \left( A \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot (a_1 c_{11} + c_{12}) \right. \\ &\quad \left. + \left( C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_2}) + D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_2}) \right) \cdot (a_2 c_{11} + c_{12}) \right),\end{aligned}\quad (2.44)$$

Введемо в розгляд функції  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  пов'язані з умовами на межі  $y = 0$ :

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= \bar{\sigma}_y|_{y=0}, & \delta(\xi) &= -\frac{i\xi}{r} \cdot \bar{\tau}_{xy}|_{y=0}, \\ \beta(\xi) &= r \cdot \bar{u}_y|_{y=0}, & \gamma(\xi) &= -i\xi \cdot \bar{u}_x|_{y=0}.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Із (2.43)-(2.44) отримаємо:

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= -\xi^2(A + C), & \beta(\xi) &= r^2 c_{11} (Ba_1\sqrt{a_1} + Da_2\sqrt{a_2}) + \delta(\xi)(c_{12} - c_{33}), \\ \gamma(\xi) &= r^2 c_{11} (Aa_1 + Ca_2) - \alpha(\xi)c_{12}, & \delta(\xi) &= r^2 (B\sqrt{a_1} + D\sqrt{a_2}).\end{aligned}\quad (2.46)$$

Виразимо  $A, B, C, D$  через  $\alpha(\xi), \delta(\xi), \beta(\xi), \gamma(\xi)$ , отримаємо:

$$A = \frac{\alpha \cdot (a_2 c_{11} + c_{12}) + \gamma}{r^2 c_{11} \cdot (a_1 - a_2)}, \quad B = \frac{\beta - \delta \cdot (a_2 c_{11} + c_{12} - c_{33})}{\sqrt{a_1} r^2 c_{11} \cdot (a_1 - a_2)},$$

$$C = \frac{-\alpha \cdot (a_1 c_{11} + c_{12}) - \gamma}{r^2 c_{11} \cdot (a_1 - a_2)}, \quad D = \frac{\delta \cdot (a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}) - \beta}{\sqrt{a_2} r^2 c_{11} \cdot (a_1 - a_2)}.$$

Тепер підставимо отримані вирази у трансформанти (2.43), (2.44):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x(\xi, y) &= (\gamma + \alpha \cdot (a_2 c_{11} + c_{12})) \cdot \frac{a_1 ch(ry\sqrt{a_1})}{(a_1 - a_2) \cdot c_{11}} - \frac{\sqrt{a_1} sh(ry\sqrt{a_1})}{(a_1 - a_2) \cdot c_{11}} \\ &\quad \cdot (\delta \cdot (a_2 c_{11} + c_{12} - c_{33}) - \beta) - (\alpha \cdot (a_1 c_{11} + c_{12}) + \gamma) \\ &\quad \cdot \frac{a_2 ch(ry\sqrt{a_2})}{(a_1 - a_2) \cdot c_{11}} + \frac{\sqrt{a_2} sh(ry\sqrt{a_2})}{(a_1 - a_2) \cdot c_{11}} \cdot (\delta \cdot (a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}) - \beta), \\ \bar{\sigma}_y(\xi, y) &= -((a_2 c_{11} + c_{12}) \cdot \alpha + \gamma) \cdot \frac{ch(ry\sqrt{a_1})}{(a_1 - a_2) \cdot c_{11}} + \frac{sh(ry\sqrt{a_1})}{(a_1 - a_2) \cdot \sqrt{a_1} c_{11}} \\ &\quad \cdot (\delta \cdot (a_2 c_{11} + c_{12} - c_{33}) - \beta) + (\alpha \cdot (a_1 c_{11} + c_{12}) + \gamma) \\ &\quad \cdot \frac{ch(ry\sqrt{a_2})}{(a_1 - a_2) \cdot c_{11}} - \frac{sh(ry\sqrt{a_2})}{(a_1 - a_2) \sqrt{a_2} c_{11}} \cdot (\delta \cdot (a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}) - \beta), \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) &= (\beta - \delta \cdot (a_2 c_{11} + c_{12} - c_{33})) \cdot \frac{ich(ry\sqrt{a_1})}{(a_1 - a_2) \cdot r c_{11}} + \frac{i\sqrt{a_1} sh(ry\sqrt{a_1})}{(a_1 - a_2) \cdot r c_{11}} \\ &\quad \cdot (\alpha \cdot (a_2 c_{11} + c_{12}) + \gamma) + (\delta \cdot (a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}) - \beta) \\ &\quad \cdot \frac{ich(ry\sqrt{a_2})}{(a_1 - a_2) \cdot r c_{11}} - \frac{i\sqrt{a_2} sh(ry\sqrt{a_2})}{(a_1 - a_2) \cdot r c_{11}} \cdot (\alpha \cdot (a_1 c_{11} + c_{12}) + \gamma); \quad (2.47) \\ \bar{u}_y &= (\beta - \delta \cdot (a_2 c_{11} + c_{12} - c_{33})) \cdot (a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{ch(ry\sqrt{a_1})}{(a_1 - a_2) \cdot r c_{11}} \\ &\quad + (\alpha \cdot (a_2 c_{11} + c_{12}) + \gamma) \cdot (a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{\sqrt{a_1} sh(ry\sqrt{a_1})}{(a_1 - a_2) \cdot r c_{11}} \\ &\quad + (\delta \cdot (a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}) - \beta) \cdot (a_2 c_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{ch(ry\sqrt{a_2})}{(a_1 - a_2) \cdot r c_{11}} \\ &\quad - (\alpha \cdot (a_1 c_{11} + c_{12}) + \gamma) \cdot (a_2 c_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{\sqrt{a_2} sh(ry\sqrt{a_2})}{(a_1 - a_2) \cdot r c_{11}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x = & (\alpha \cdot (a_2 c_{11} + c_{12}) + \gamma)(a_1 c_{11} + c_{12}) \cdot \frac{ich(ry\sqrt{a_1})}{(a_1 - a_2)\xi c_{11}} - \frac{ish(ry\sqrt{a_1})}{(a_1 - a_2)\sqrt{a_1}c_{11}\xi} \\
& \cdot (\delta \cdot (a_2 c_{11} + c_{12} - c_{33}) - \beta) \cdot (a_1 c_{11} + c_{12}) - (a_2 c_{11} + c_{12}) \\
& \cdot (\alpha \cdot (a_1 c_{11} + c_{12}) + \gamma) \cdot \frac{ich(ry\sqrt{a_2})}{(a_1 - a_2) \cdot \xi c_{11}} - \frac{ish(ry\sqrt{a_2})}{(a_1 - a_2)\sqrt{a_2}c_{11}\xi} \\
& \cdot (\delta \cdot (a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}) - \beta) \cdot (a_2 c_{11} + c_{12}). \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Із умов на верхній межі шару знаходяться дві з чотирьох допоміжних функцій  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , а інші дві знаходяться із умов на нижній межі.

Отримані вирази  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  підставляємо у трансформанти напружень (2.47) і переміщень (2.48), потім піддаємо оберненому інтегральному перетворенню і отримуємо істинні значення.

## 2.2. Визначення напружено-деформівного стану ортотропної півплощини в умовах плоскої деформації

### 2.2.1 Концептуальна та математична постановка для півплощини.

#### Схема загального розв'язання

Розглянемо задачу визначення напружень та переміщень в пружному ортотропному півпросторі в умовах плоскої деформації.

Задано пружна суцільна, однорідна ортотропна півплощина, яка займає область  $G(x, y) : \{-\infty < x < +\infty, -\infty < y \leq 0\}$  (рис. 2.2) з відомими модулями пружності  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{xz}$ ,  $\nu_{yz}$ ,  $\nu_{zy}$  і  $G_{xy}$ .

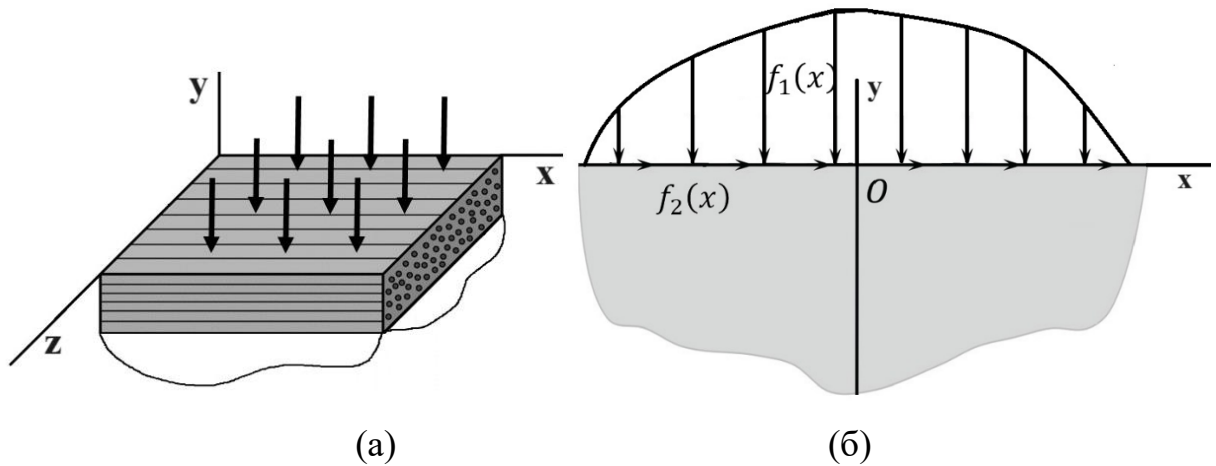


Рис. 2.2 – Фізична (а) та геометрична (б) постановка задачі

На межі  $y = 0$  відомі навантаження  $\sigma_y(x, 0) = f_1(x)$ ,  $\tau_{xy}(x, 0) = f_2(x)$ . На нескінченності напруження прямують до нуля. Потрібно визначити напруження та переміщення в довільній точці півплощини.

Розв'язок поставленої задачі шукається в просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є. При цьому всі основні рівняння задачі та граничні умови піддаються прямому перетворенню одновимірного інтегрального перетворення Фур'є (2.1).

Розв'язання задачі зводиться до знаходження трансформанти функції напружень, яка задовольняє відповідному аналогу бігармонічного диференціального рівняння в просторі трансформант Фур'є для випадку ортотропного матеріалу, описаному в пункті 2.1.1.

Вигляд трансформанти функції напружень залежить від значень пружних сталей ортотропного матеріалу, а саме від значень коренів отриманого в просторі трансформант характеристичного рівняння (2.16).

Наведемо всі випадки:

1)  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} > 1$ , трансформанта функції напруження має вигляд (2.26):

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\xi, y) = & \left( C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \cos(ry\sqrt{a_2}) \\ & + \left( D \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}), \end{aligned}$$

$$\text{де } \sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_3^2}} + 1 \right)}, \quad \sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_3^2}} - 1 \right)}.$$

2)  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ , трансформанта функції напруження має вигляд (2.34):

$$\bar{\varphi}(\xi, y) = A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + B\sqrt{a}y \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}) + D\sqrt{a}y \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}),$$

$$\text{де } \sqrt{a} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}.$$

3)  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1$ , трансформанта функції напруження має вигляд (2.42):

$$\bar{\varphi}(\xi, y) = A \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_2}) + D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_2}),$$

$$\text{де } \sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}, \quad \sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}.$$

В цих формулах  $r = |\xi|$ ,  $A = A(\xi)$ ,  $B = B(\xi)$ ,  $C = C(\xi)$ ,  $D = D(\xi)$  – невідомі функції параметру інтегрування  $\xi$ .

Встановлюються співвідношення між трансформантою функції напружень та трансформантами напружень за формулою (2.23) і переміщень (2.24)-(2.25).

Трансформанти функції напружень виражаються через чотири допоміжні функції  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$ , які пов'язані з навантаженнями на поверхні півплощини, як і в пункті 2.1.1.

Для  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} > 1$  функції  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  визначаються (2.29), для  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$  формулами (2.37), для  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1$  формулами (2.45).

З умов на межі  $y = 0$  знаходимо дві з чотирьох допоміжних функцій: для першої основної граничної задачі  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$  для другої основної граничної задачі  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$ .

Умови на нескінченності дозволяють встановити зв'язок між двома знайденими допоміжними функціями та двома іншими.

За умовою задачі при  $y \rightarrow -\infty$  всі напруження прямують до нуля, тому й трансформанти всіх шуканих величин також прямують до нуля при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ . Формули для трансформант напружень є лінійними комбінаціями функцій  $sh(ry\sqrt{a})$ ,  $ch(ry\sqrt{a})$  і  $ry sh(ry\sqrt{a})$ ,  $ry ch(ry\sqrt{a})$ , кожна з яких при  $r \neq 0$  і  $y \rightarrow -\infty$  необмежено зростає.

Однак лінійні комбінації  $Ash(ry\sqrt{a}) + Bch(ry\sqrt{a})$ , і  $Cry sh(ry\sqrt{a}) + Dry ch(ry\sqrt{a})$  прямують до нуля при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ . Аналіз виразів для трансформант напружень дає можливість зробити висновок, що виконання цих умов можливо, якщо коефіцієнти при  $e^{-ry\sqrt{a}}$  прирівняти до нуля. Отримаємо  $-A + B = 0$  та  $-C + D = 0$ . Дійсно, якщо розпишемо  $sh(ry\sqrt{a})$ ,  $ch(ry\sqrt{a})$  маємо:

$$\begin{aligned} & A \cdot 0,5(e^{ry\sqrt{a}} - e^{-ry\sqrt{a}}) + B \cdot 0,5(e^{ry\sqrt{a}} + e^{-ry\sqrt{a}}) = \\ & = (A + B) \cdot 0,5e^{ry\sqrt{a}} + (-A + B) \cdot 0,5e^{-ry\sqrt{a}}, \\ & Cry \cdot 0,5(e^{ry\sqrt{a}} - e^{-ry\sqrt{a}}) + Dry \cdot 0,5(e^{ry\sqrt{a}} + e^{-ry\sqrt{a}}) = \\ & = (C + D) \cdot 0,5rye^{ry\sqrt{a}} + (-C + D) \cdot 0,5rye^{-ry\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

За даних умов знаходяться дві з чотирьох допоміжних функцій  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  через інші дві. Наприклад для першої основної задачі функції  $\beta(\xi)$  і  $\gamma(\xi)$ , а для другої  $\alpha(\xi)$  і  $\delta(\xi)$ .

Отримані вирази допоміжних функцій підставляємо у трансформанти напружень і переміщень, отримаємо остаточні вирази для трансформант, які потім піддаємо оберненому інтегральному перетворенню і отримаємо істинні значення.

Наприклад для функції трансформанти (2.26) (випадок  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} > 1$ ), виражаємо  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  через  $\alpha(\xi)$  і  $\delta(\xi)$ , отримаємо:

$$\beta(\xi) = \frac{3ra_1c_{11}\delta(\xi) - (a_2c_{11} - c_{12} + c_{33}) \cdot r\delta(\xi) - 2\sqrt{a_1}c_{11}(a_1 + a_2) \cdot \alpha(\xi)}{2rc_{11} \cdot (a_1 + a_2)},$$

$$\gamma(\xi) = \frac{((a_1 + a_2)c_{11} - c_{12}) \cdot \alpha(\xi) - 2\sqrt{a_1}rc_{11} \cdot \delta(\xi)}{2c_{11}}. \quad (2.49)$$

Для функції трансформанти (2.34) (випадок  $\frac{A_1A_2}{A_3^2} = 1$ ), виражаємо  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  через  $\alpha(\xi)$  і  $\delta(\xi)$ , отримаємо:

$$\beta(\xi) = \frac{2a\sqrt{a}c_{11} \cdot \alpha(\xi) + (3ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \delta(\xi)}{2ac_{11}},$$

$$\gamma(\xi) = \frac{(ac_{11} - c_{12}) \cdot \alpha(\xi) + 2\sqrt{a}c_{11} \cdot \delta(\xi)}{2ac_{11}}. \quad (2.50)$$

Для функції трансформанти (2.42) (випадок  $\frac{A_1A_2}{A_3^2} < 1$ ), виражаємо  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  через  $\alpha(\xi)$  і  $\delta(\xi)$ , отримаємо:

$$\beta = \frac{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}c_{11}(a_2 - a_1) \cdot \alpha(\xi)}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}$$

$$- \frac{(c_{11}(a_1\sqrt{a_1} - a_2\sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})(c_{12} - c_{33})) \cdot \delta(\xi)}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}},$$

$$\gamma = \frac{(\sqrt{a_2}(a_1c_{11} + c_{12}) - \sqrt{a_1}(a_2c_{11} + c_{12}))\alpha(\xi) - c_{11}(a_1 - a_2)\delta(\xi)}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}. \quad (2.51)$$

Отримані вирази підставляємо у трансформанти напружень і переміщень, які потім піддаємо оберненому інтегральному перетворенню і отримаємо істинні значення.

### 2.2.2 Задача про дію зосередженої сили на півплощину

Окремим випадком навантаження на тіло (шар або півплощину) можна розглядати дію зосередженого нормального навантаження (задача Фламана).

Розглянемо задачу про дію зосередженої сили нормальної до поверхні пружної однорідної, суцільної ортотропної півплощини (рис. 2.3). На нескінченності напруження прямують до нуля. Потрібно визначити напруження та переміщення в довільній точці півплощини.

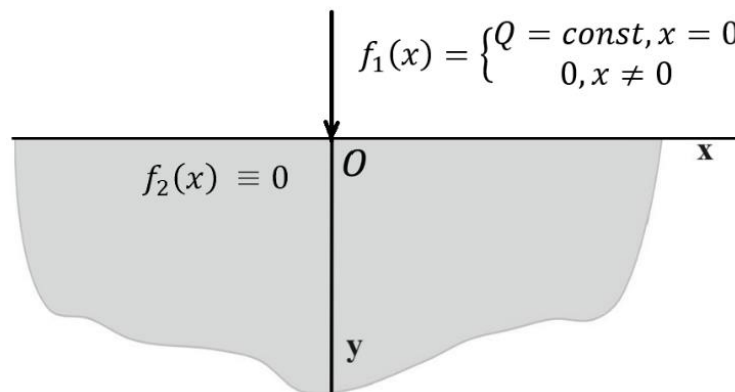


Рис. 2.3 – Постановка задачі

Введемо прямокутну декартову систему координат як на рис. 2.3. Тоді півплощина займає область  $G(x, y) : \{-\infty < x < +\infty, -\infty < y \leq 0\}$ . Матеріал півплощини характеризується модулями пружності  $E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}, \nu_{zy}$ .

В точці з координатами  $(0,0)$  діє зосереджене нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, 0) = f_1(x) = \begin{cases} Q = \text{const}, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \tau_{xy}(x, 0) = f_2(x) \equiv 0.$$

На нескінченності напруження прямують до нуля:

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \sigma_x(x, y) = 0, \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \sigma_y(x, y) = 0, \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \tau_{xy}(x, y) = 0.$$

Потрібно визначити напруження  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$  та переміщення  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  в довільній точці півплощини.

Щоб розв'язати поставлену задачу необхідно визначити допоміжні функції  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$ , які пов'язані з навантаженнями на поверхні півплощини, як описано в пункті 2.1.1.

Для  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} > 1$  функції  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  визначаються формулами (2.49), для  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$  формулами (2.50), для  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1$  формулами (2.51).

Так як  $\tau_{xy}(x, 0) = 0$  то і  $\delta(\xi) = 0$ . Щоб знайти  $\alpha(\xi)$ , замінимо зосереджену силу  $Q$  на еквівалентне рівномірно розподілене по області  $[-\tilde{a}; \tilde{a}]$  навантаження з інтенсивністю  $\frac{Q}{2\tilde{a}}$ .

$$\sigma_y(x, 0) = \begin{cases} \frac{Q}{2\tilde{a}}, & |x| \leq \tilde{a} \\ 0, & |x| > \tilde{a} \end{cases}.$$

$$\alpha(\xi) = \lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} \frac{Q}{2\tilde{a}} \cdot e^{i\xi x} dx = \lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} \frac{Q}{2\tilde{a}} \cdot \frac{e^{i\xi x}}{i\xi} \Big|_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} = \lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} Q \frac{\sin(\xi \tilde{a})}{\xi \tilde{a}} = Q.$$

Таким чином  $\alpha(\xi) = Q$ .

З урахуванням отриманих значень  $\alpha(\xi) = Q$ ,  $\delta(\xi) = 0$  для трансформанти напружень (2.34) (випадок  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ ) отримаємо:

$$\overline{\sigma_x}(\xi, y) = \left( \sqrt{a} \beta r y + 2\gamma - 2Q \cdot (2ac_{11} + c_{12}) \right) \cdot \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2c_{11}} + \frac{sh(ry\sqrt{a})}{2c_{11}} \cdot \left( \beta + \sqrt{a} \gamma r y - \sqrt{a} r y Q \cdot (ac_{11} + c_{12}) \right),$$

$$\overline{\sigma_y}(\xi, y) = \left( \beta - \sqrt{a} \gamma r y + \sqrt{a} r y Q \cdot (ac_{11} + c_{12} r y) \right) \cdot \frac{sh(ry\sqrt{a})}{2ac_{11}} + \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2\sqrt{a}c_{11}} \cdot (2\sqrt{a}c_{11}Q - \beta r y),$$

$$\begin{aligned} \overline{\tau_{xy}}(\xi, y) = & \left( \sqrt{a}\beta ry + \gamma - Q \cdot (3ac_{11} + c_{12}) \right) \cdot \frac{i\xi \cdot sh(ry\sqrt{a})}{2\sqrt{a}c_{11}r} + \frac{i\xi \cdot ch(ry\sqrt{a})}{2c_{11}r} \\ & \cdot (\gamma ry - ryQ \cdot (ac_{11} + c_{12})). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Аналогічно підставимо  $\alpha(\xi) = Q$ ,  $\delta(\xi) = 0$  у трансформанти (2.40):

$$\begin{aligned} \overline{u_x} = & \left( \beta(ac_{11} - c_{12}) + \sqrt{a}ry(ac_{11} + c_{12})(\gamma - Q(ac_{11} - c_{12})) \right) \cdot \frac{ish(ry\sqrt{a})}{2a\xi c_{11}} \\ & + \frac{ich(ry\sqrt{a})}{2\sqrt{a}\xi c_{11}} \left( \beta ry(ac_{11} + c_{12}) - 2\sqrt{a}c_{11}((2ac_{11} + 2c_{12})Q - \gamma) \right), \\ \overline{u_y}(\xi, y) = & \left( (ac_{11}ry + ry(c_{12} - c_{33}))\beta - 5a\sqrt{a}c_{11}^2Q + 3\sqrt{a}c_{11} \right. \\ & \cdot (\gamma - 2c_{12}Q + c_{33}Q) + (c_{12} - c_{33}) \cdot (\gamma - c_{12}Q) \left. \right) \cdot \frac{sh(ry\sqrt{a})}{2rc_{11}} \\ & + \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2rc_{11}} \left( ac_{11}ry \cdot (\gamma - 2c_{12}Q + c_{33}Q) - a^2c_{11}^2ryQ + ry \right. \\ & \cdot (c_{12} - c_{33})(\gamma - c_{12}Q) + 2\sqrt{a}c_{11}\beta \left. \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Умови на нескінченності дозволяють встановити зв'язок між двома знайденими допоміжними функціями та  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$ .

За умовою задачі при  $y \rightarrow -\infty$  всі напруження прямують до нуля, тому й трансформанти шуканих величин також прямують до нуля при  $y \rightarrow -\infty$ .

Формули для трансформант напружень містять функції  $sh(ry\sqrt{a})$ ,  $ch(ry\sqrt{a})$  і  $ry sh(ry\sqrt{a})$ ,  $ry ch(ry\sqrt{a})$ , кожна з яких при  $r \neq 0$  і  $y \rightarrow -\infty$  необмежено зростає, однак їх лінійні комбінації  $\lambda sh(ry\sqrt{a}) + \mu ch(ry\sqrt{a})$  і  $\tilde{\lambda} ry sh(ry\sqrt{a}) + \tilde{\mu} ry ch(ry\sqrt{a})$  повинні забезпечувати прямування до нуля при  $y \rightarrow -\infty$ .

Аналіз виразів для трансформант напружень дає можливість зробити висновок, що виконання цих умов можливо, якщо коефіцієнти при  $e^{-ry\sqrt{a}}$  дорівнюють нулю. Звідки отримаємо  $-\lambda + \mu = 0$  та  $-\tilde{\lambda} + \tilde{\mu} = 0$

З яких ми отримаємо функції  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  для випадку  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ :

$$\begin{aligned}\beta(\xi) &= \frac{2a\sqrt{a}c_{11} \cdot \alpha(\xi) + (3ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \delta(\xi)}{2ac_{11}} = Q\sqrt{a}, \\ \gamma(\xi) &= \frac{(ac_{11} - c_{12}) \cdot \alpha(\xi) + 2\sqrt{a}c_{11} \cdot \delta(\xi)}{2ac_{11}} = \frac{(ac_{11} - c_{12}) \cdot Q}{2ac_{11}}.\end{aligned}\quad (2.54)$$

Отримані вирази (2.54) підставляємо у трансформанти напружень (2.52) і переміщень (2.53) для випадку  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ , маємо:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x(\xi, y) &= Qe^{ry\sqrt{a}}a \cdot (ry\sqrt{a} + 1), & \bar{\sigma}_y(\xi, y) &= -Qe^{ry\sqrt{a}}a \cdot (ry\sqrt{a} - 1), \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) &= iQay\xi e^{ry\sqrt{a}}, \\ \bar{u}_x(\xi, y) &= \frac{iQe^{ry\sqrt{a}}(a\sqrt{a}c_{11}ry + ac_{11} + \sqrt{a}c_{12}ry - c_{12})}{\xi}, \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= \frac{Qe^{ry\sqrt{a}}a(ac_{11}ry + c_{12}ry - ryc_{33} + 2\sqrt{a}c_{11})}{r},\end{aligned}$$

$$\text{де } r = |\xi|, \sqrt{a} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}.$$

Аналогічно знаходимо формули трансформант напружень і переміщень для випадку  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1$ , де  $\alpha(\xi) = Q$ ,  $\beta(\xi) = \frac{\sqrt{a_1}Q}{r}$ ,  $\gamma(\xi) = \frac{Q((a_1+a_2)c_{11}-c_{12})}{2c_{11}}$ ,  $\delta(\xi) = 0$ .

$$\bar{\sigma}_x(\xi, y) = \frac{Qe^{ry\sqrt{a_1}}(\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}(a_2 + a_1) \cos(ry\sqrt{a_2}) + a_1(a_2 + a_2) \sin(ry\sqrt{a_2}))}{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}},$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_y(\xi, y) &= \frac{Qe^{ry\sqrt{a_1}} \cdot (\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} \cdot \cos(ry\sqrt{a_2}) - a_1 \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}))}{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}}, \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) &= \frac{i\xi Qe^{ry\sqrt{a_1}} \cdot (a_2 + a_2) \cdot \sin(ry\sqrt{a_2})}{\sqrt{a_2}r}, \\ \bar{u}_x(\xi, y) &= \frac{iQe^{ry\sqrt{a_1}}((a_1 + a_2)c_{11} - c_{12}) \cdot \cos(ry\sqrt{a_2})}{\xi} \\ &\quad + \frac{i\sqrt{a_1}Qe^{ry\sqrt{a_1}}((a_1 + a_2)c_{11} + c_{12}) \cdot \sin(ry\sqrt{a_2})}{\xi}, \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= \frac{2Qe^{ry\sqrt{a_1}} \cdot \sqrt{a_1}c_{11}(a_1 + a_2) \cdot \cos(ry\sqrt{a_2})}{r} \\ &\quad + \frac{Qe^{ry\sqrt{a_1}} \cdot (a_1 + a_2) \cdot ((a_1 - a_2)c_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \sin(ry\sqrt{a_2})}{\sqrt{a_2}r}.\end{aligned}$$

Для випадку  $\frac{A_1A_2}{A_3^2} > 1$ , де  $\alpha(\xi) = Q, \beta(\xi) = Qc_{11}(a_1\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}a_2)$ ,  $\delta(\xi) = 0, \gamma(\xi) = Q(\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}c_{11} - c_{12})$  отримаємо формули трансформант напружень і переміщень у вигляді:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x(\xi, y) &= \frac{Q \left( e^{ry\sqrt{a_1}}(a_1a_2 + a_1\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}) - e^{ry\sqrt{a_2}}(a_1a_2 + \sqrt{a_1}a_2\sqrt{a_2}) \right)}{(a_1 - a_2)}, \\ \bar{\sigma}_y(\xi, y) &= \frac{Q \left( e^{ry\sqrt{a_2}}(\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} + a_1) - e^{ry\sqrt{a_1}}(\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} + a_2) \right)}{(a_1 - a_2)}, \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) &= \frac{-i\xi Q \cdot (e^{ry\sqrt{a_2}} - e^{ry\sqrt{a_1}}) \cdot (a_1\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}a_2)}{r(a_1 - a_2)}, \\ \bar{u}_x(\xi, y) &= \frac{iQe^{ry\sqrt{a_1}}\sqrt{a_2}(a_1\sqrt{a_2}c_{11} + a_1\sqrt{a_1}c_{11} + c_{12}\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}c_{12})}{\xi(a_1 - a_2)} \\ &\quad - \frac{iQe^{ry\sqrt{a_2}}\sqrt{a_1}(\sqrt{a_1}a_2c_{11} + a_2\sqrt{a_2}c_{11} + c_{12}\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}c_{12})}{\xi(a_1 - a_2)}, \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= (a_1\sqrt{a_2}c_{11} + \sqrt{a_2}(c_{12} - c_{33}) + \sqrt{a_1}(a_1c_{11} + c_{12} - c_{33})) \\ &\quad \cdot \frac{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}Qe^{ry\sqrt{a_1}}}{r(a_1 - a_2)} - \frac{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}Qe^{ry\sqrt{a_2}}}{r(a_1 - a_2)} \\ &\quad \cdot \left( \sqrt{a_1}a_2c_{11} + \sqrt{a_1}(c_{12} - c_{33}) + \sqrt{a_2}(a_2c_{11} + c_{12} - c_{33}) \right).\end{aligned}$$

Таким чином маємо всі необхідні формули для розв'язання поставленої задачі. Отримані формули піддаємо оберненому інтегральному перетворенню Фур'є (2.2).

## 2.3. Практична реалізація

### 2.3.1 Приклад 1

Розглянемо ортотропний шар постійної товщини  $h = 10$ , матеріал якого характеризується такими пружними константами  $\nu_{xy} = -1.01, \nu_{xz} = -1.3, \nu_{yz} = -1.312, \nu_{zy} = -1.4, E_x = 5.9 \cdot 10^{11}$  Па,  $E_y = 2.4 \cdot 10^{11}$  Па.

На верхній межі  $y = 0$  задано навантаження  $\sigma_y(x, 0) = \frac{10^8}{x^2+1}$  (Па),  $\tau_{xy}(x, 0) = 0$  (Па), що в просторі трансформант буде приймати вигляд  $\overline{\sigma}_y(\xi, 0) = \pi e^{-|\xi|} \cdot 10^8, \overline{\tau}_{xy}(\xi, 0) = 0$ .

На нижній межі  $y = -h$  переміщення дорівнюють нулю  $u_y(x, -h) = 0, u_x(x, -h) = 0$ .

Отримані числові результати відносяться до випадку з двома парами комплексно спряжених коренів  $\left(\frac{A_1 A_2}{A_3^2} > 1\right)$  описаному в пункті 2.1.2 для трансформант функції напруження  $\overline{\varphi}(\xi, y)$  описаною формулою (2.26).

З умов на верхній шару маємо  $\alpha(\xi) = \pi \cdot e^{-|\xi|} \cdot 10^8, \delta(\xi) = 0$ . Із умов на нижній межі шару отримаємо функцій  $\beta(\xi), \gamma(\xi)$  через  $\alpha(\xi)$  і  $\delta(\xi)$  за формулою (2.41).

Знайдені вирази  $\alpha(\xi), \delta(\xi), \beta(\xi), \gamma(\xi)$  підставляємо у вирази трансформант напружень (2.32) та трансформант переміщень (2.33). Отримані вирази піддаємо зворотному інтегральному перетворенню Фур'є (2.2) і отримаємо значення шуканих величин.

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до трансформант  $\overline{\sigma}_x(\xi, y)$ ,  $\overline{\sigma}_y(\xi, y)$  отримаємо значення напружень точок шару (рис.2.4), аналогічно знаходимо значення переміщень  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  точок шару (рис.2.5).

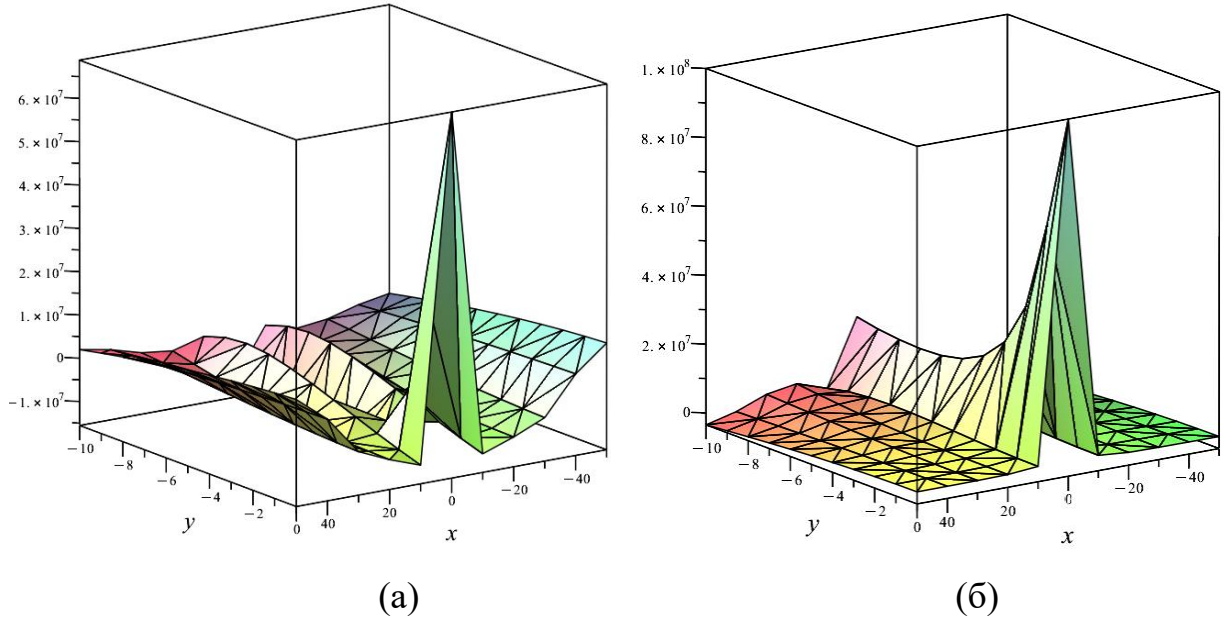


Рисунок 2.4 – Значення напружень  $\sigma_x(x, y)$  (а),  $\sigma_y(x, y)$  (б)

Як бачимо з наведених розрахунків найбільші значення в околі  $x = 0$ . При віддалені від нуля значення зменшуються. Отримані результати свідчать про виконання межових умов та умов на нескінченності  $\sigma_y(0,0) = 10^8$  (Па).

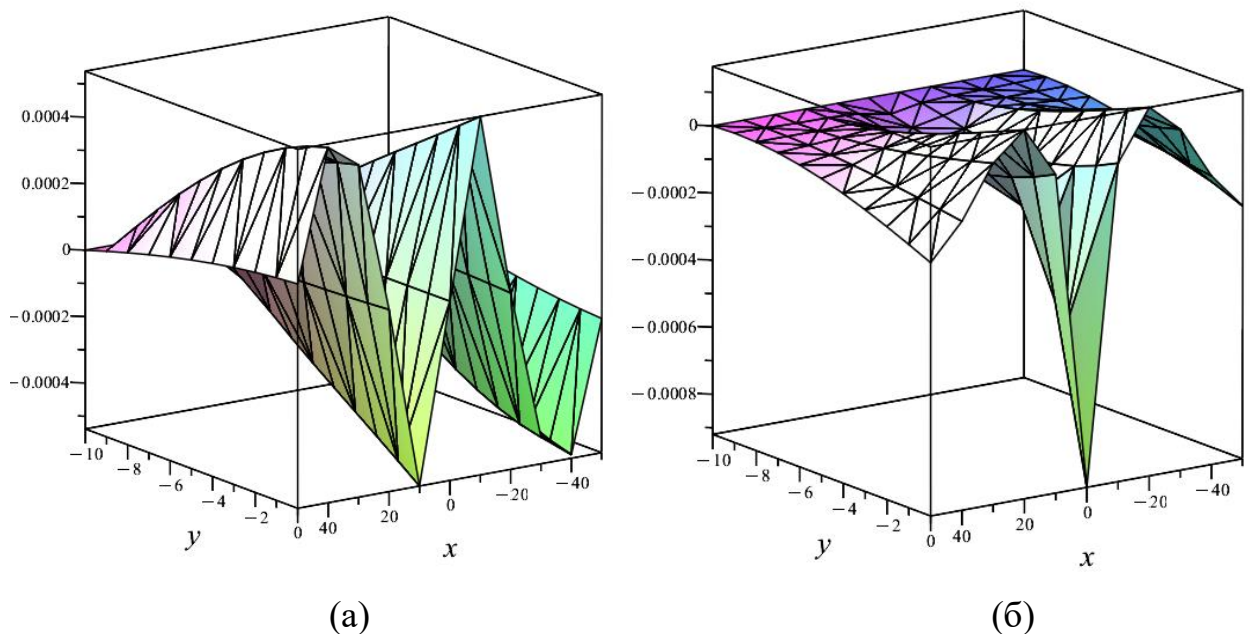


Рисунок 2.5 – Значення переміщень  $u_x(x, y)$  (а),  $u_y(x, y)$  (б)

Отримані результати свідчать про виконання межових умов  $u_y(x, -10) = 0$ ,  $u_x(x, -10) = 0$ .

### 2.3.2 Приклад 2

Розглянемо ортотропний шар постійної товщини  $h = 10$ , матеріал якого характеризується такими пружними константами  $\nu_{xy} = 0.26$ ,  $\nu_{xz} = 0.19$ ,  $\nu_{zy} = 0.3$ ,  $\nu_{yz} = 0.41$ ,  $E_x = 3.86 \cdot 10^4$  Па,  $E_y = 8.27 \cdot 10^3$  Па.

На верхній межі  $y = 0$  задано навантаження  $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}$  (Па),  $\tau_{xy}(x, 0) = 0$  (Па), що в просторі трансформант має вид  $\overline{\sigma}_y(\xi, 0) = \pi \cdot e^{-|\xi|}$ ,  $\overline{\tau}_{xy}(\xi, 0) = 0$ .

На нижній межі  $y = -h$  переміщення дорівнюють нулю  $u_y(x, -h) = 0$ ,  $u_x(x, -h) = 0$ .

Отримані числові результати відносяться до випадку з дійсними коренями  $\left(\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1\right)$  описаному в пункті 2.1.3. для трансформант функції напруження  $\overline{\varphi}(\xi, y)$  описаною формулою (2.34).

З умов на верхній шару маємо:  $\alpha(\xi) = \pi \cdot e^{-|\xi|}$ ,  $\delta(\xi) = 0$ . Із умов на нижній межі шару отримаємо функцій  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  через  $\alpha(\xi)$  і  $\delta(\xi)$  за формулою (2.41).

Знайдені вирази для  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  підставляємо у вирази трансформант напружень (2.39) та трансформант переміщень (2.40). Отримані вирази піддаємо зворотному інтегральному перетворенню Фур'є (2.2) і отримаємо значення шуканих величин.

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до трансформант  $\overline{\sigma}_x(\xi, y)$ ,  $\overline{\sigma}_y(\xi, y)$ ,  $\overline{\tau}_{xy}(\xi, y)$  отримаємо істинні значення напружень точок шару (рис.2.6).

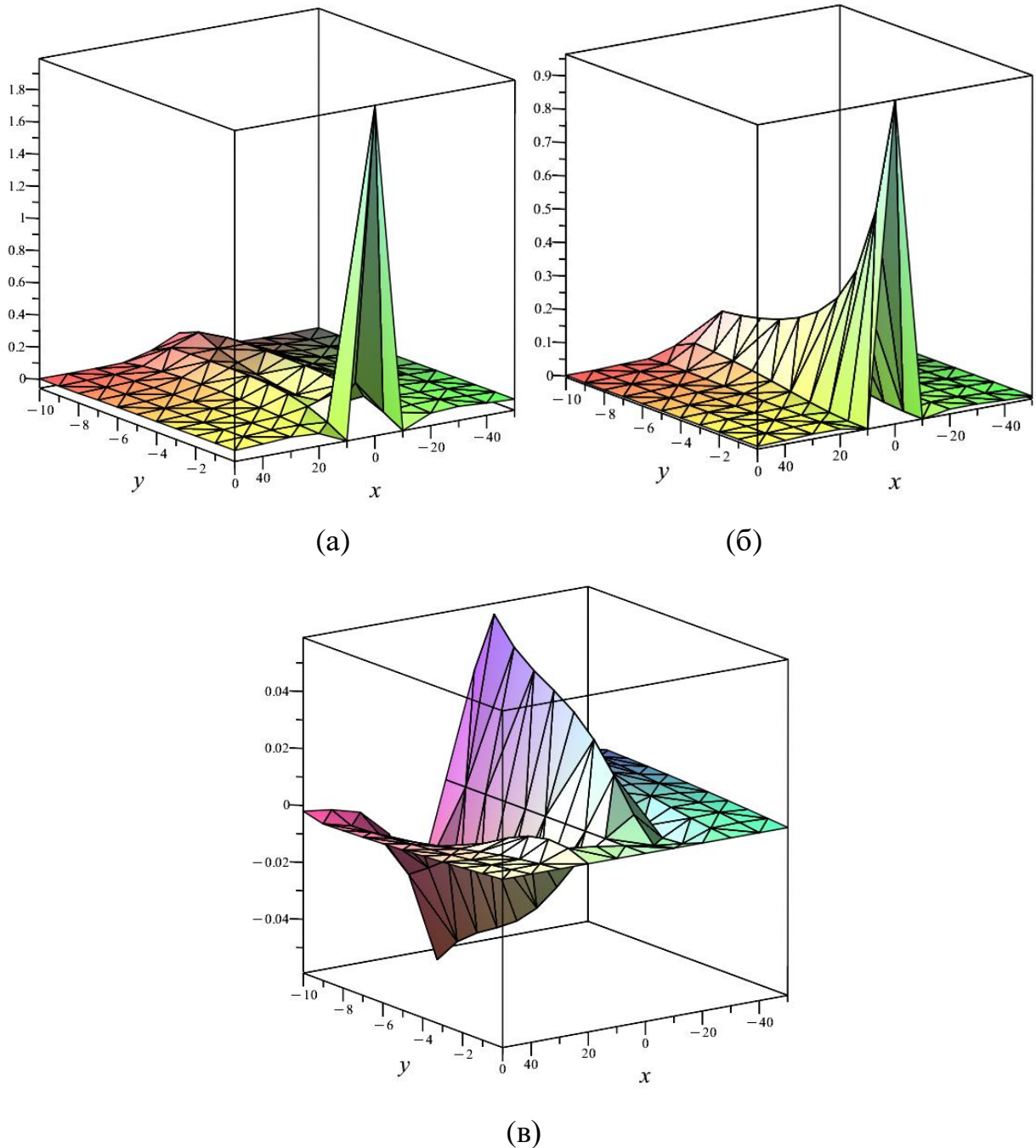


Рисунок 2.6 – Значення напружень  $\sigma_x(x, y)$  (а),  $\sigma_y(x, y)$  (б) та  $\tau_{xy}(x, y)$  (в)

Як бачимо з наведених розрахунків найбільші значення  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  в околі  $x = 0$ . При віддалені від нуля значення зменшуються. Отримані результати свідчать про виконання межових умов  $\sigma_y(0,0) = 1$  (Па),  $\tau_{xy}(0,0) = 0$  (Па) та умов на нескінченності.

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є (2.2) до трансформант переміщень  $\bar{u}_x(\xi, y)$ ,  $\bar{u}_y(\xi, y)$  отримаємо значення переміщень шару рис. 2.7.

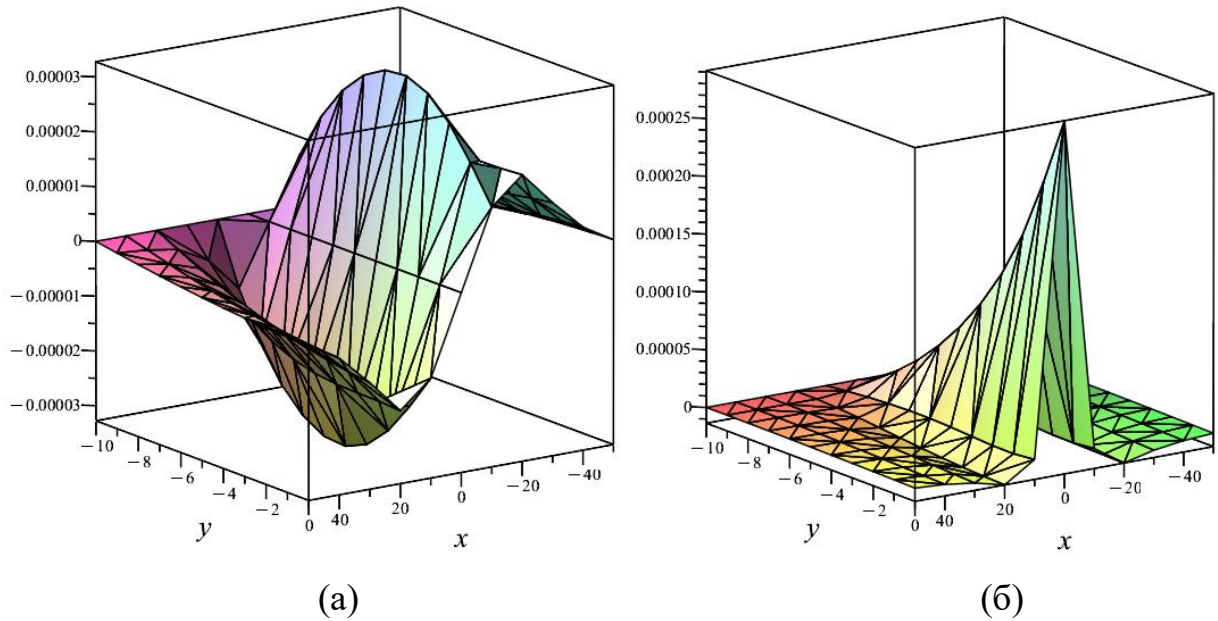


Рисунок 2.7 – Значення переміщень  $u_x(x, y)$  (а),  $u_y(x, y)$  (б)

Отримані результати свідчать про виконання межових умов  $u_y(x, -10) = 0$ ,  $u_x(x, -10) = 0$ .

### 2.3.3 Приклад 3

Розглянемо ортотропний шар постійної товщини  $h = 10$ , матеріал якого характеризується такими пружними константами  $\nu_{xy} = 0.28$ ,  $\nu_{xz} = 0.39$ ,  $\nu_{yz} = 0.13$ ,  $\nu_{zy} = 0.49$ ,  $E_x = 1.73 \cdot 10^{10}$  Па,  $E_y = 3.31 \cdot 10^{10}$  Па.

На верхній межі  $y = 0$  задано навантаження  $\sigma_y(x, 0) = \frac{10^8}{x^2+1}$  (Па),  $\tau_{xy}(x, 0) = 0$  (Па), що в просторі трансформант має вид  $\overline{\sigma}_y(\xi, 0) = \pi e^{-|\xi|} 10^8$ ,  $\overline{\tau}_{xy}(\xi, 0) = 0$ . На нижній межі  $y = -h$  переміщення дорівнюють нулю  $u_y(x, -h) = 0$ ,  $u_x(x, -h) = 0$ .

Отримані числові результати відносяться до випадку з чотирма дійсними коренями  $\left(\frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1\right)$  описаному в пункті 2.1.4 для трансформант функції напруження  $\overline{\varphi}(\xi, y)$  (2.42).

З умов на верхній шару отримаємо:  $\alpha(\xi) = \pi \cdot e^{-|\xi|} \cdot 10^8$ ,  $\delta(\xi) = 0$ . Із умов на нижній межі шару отримаємо функцій  $\beta(\xi), \gamma(\xi)$  через  $\alpha(\xi)$  і  $\delta(\xi)$  за формулою (2.41).

Знайдені вирази  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  підставляємо в трансформанти напружень (2.47) та трансформанти переміщень (2.48). Отримані вирази піддаємо зворотному інтегральному перетворенню Фур'є (2.2) і отримаємо значення шуканих величин.

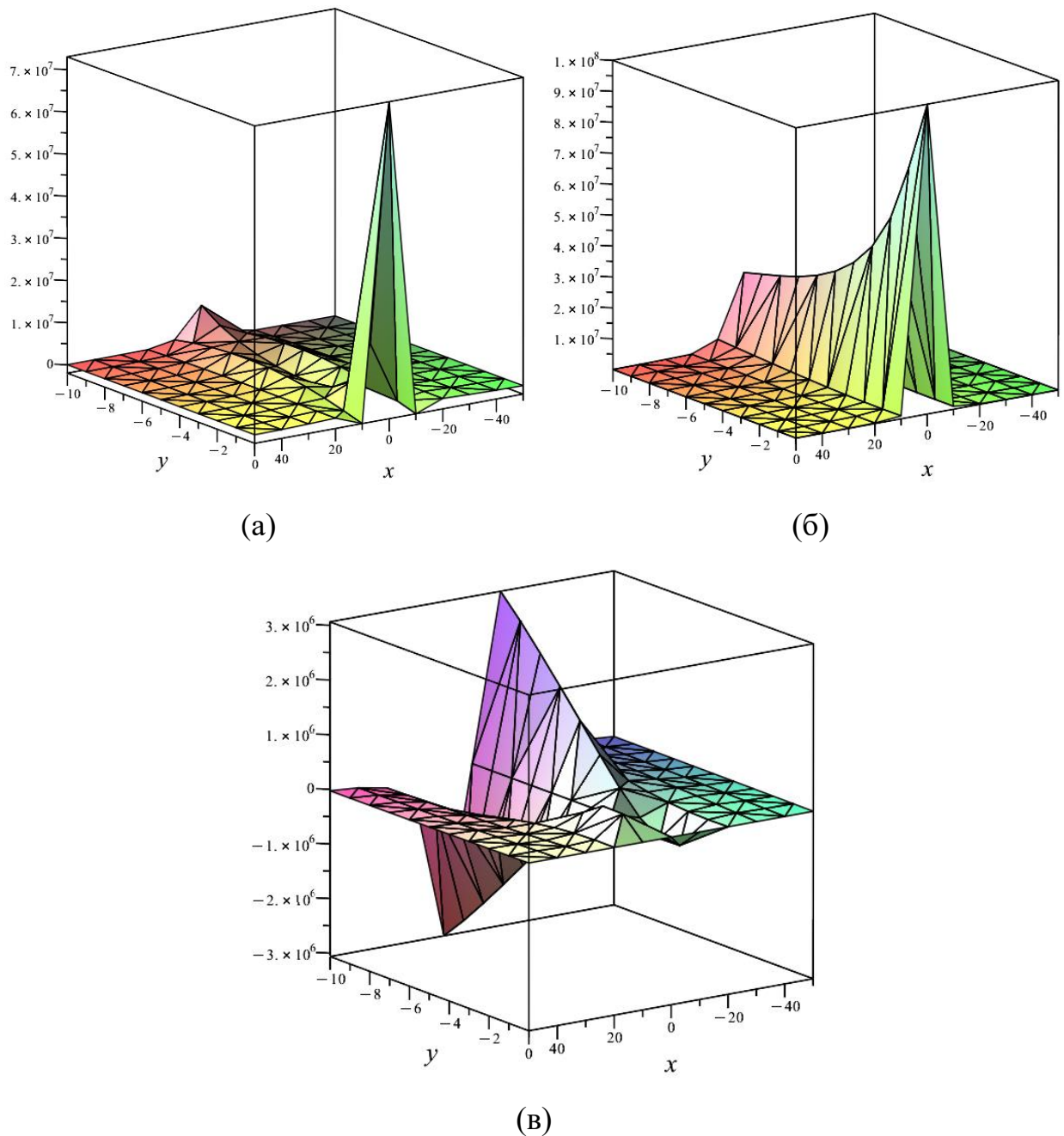


Рисунок 2.8 – Значення напружень  $\sigma_x(x, y)$  (а),  $\sigma_y(x, y)$  (б) та  $\tau_{xy}(x, y)$  (в)

Як бачимо з наведених розрахунків найбільші значення  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  в околі  $x = 0$ . При віддалені від нуля значення зменшуються. Отримані результати свідчать про виконання межових умов  $\sigma_y(0,0) = 10^8$ (Па) та  $\tau_{xy}(0,0) = 0$  (Па) та умов на нескінченності.

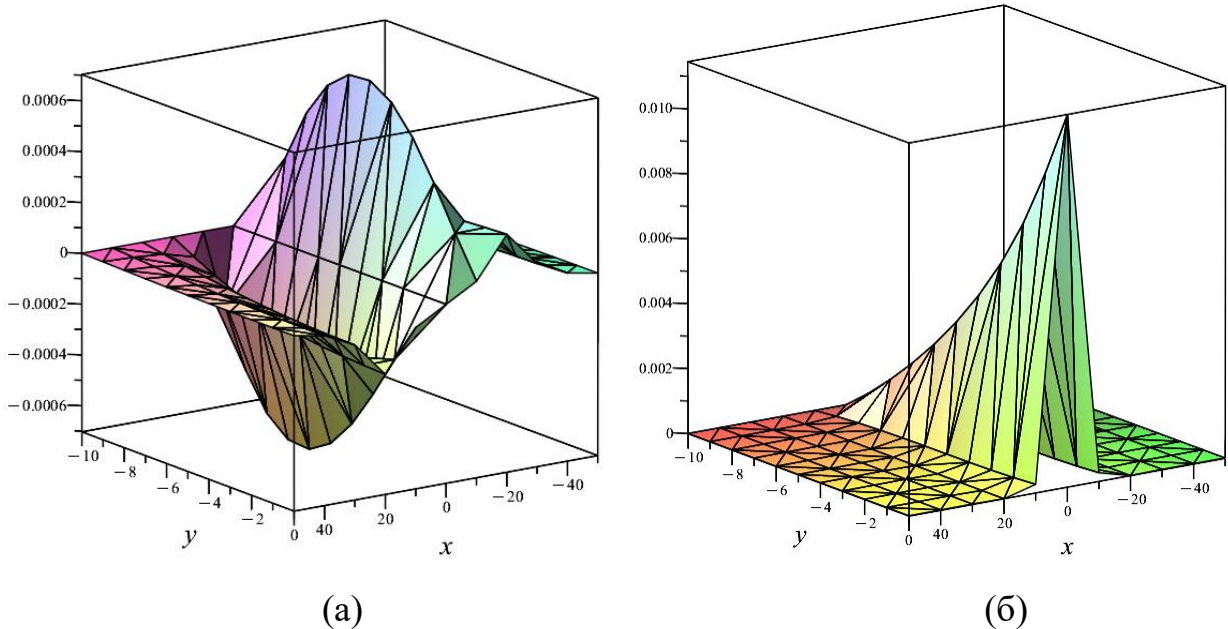


Рисунок 2.9 – Значення переміщень  $u_x(x, y)$  (а),  $u_y(x, y)$  (б)

Отримані результати для переміщень  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  демонструють симетричний характер деформування та свідчать про виконання межових умов  $u_x(x, -10) = 0, u_y(x, -10) = 0$ .

#### 2.3.4 Приклад 4

Розглянемо ортотропну півплощину, матеріал якої характеризується пружними константами  $E_x = 1.73 \cdot 10^3$  Па,  $E_y = 3.31 \cdot 10^3$  Па,  $\nu_{zy} = 0.3$ ,  $\nu_{xz} = 0.235$ ,  $\nu_{xy} = 0.26$ ,  $\nu_{yz} = 0.17$ .

На межі  $y = 0$  задано  $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}$  (Па),  $\tau_{xy}(x, 0) = e^{-|x|}$  (Па). При  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  напруження дорівнюють нулю.

Отримані числові результати відносяться до випадку з дійсними коренями ( $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ ) описаному в пункті 2.1.3. для трансформанти  $\bar{\varphi}(\xi, y)$  за формулою (2.34).

З умов на верхній межі отримаємо:

$$\alpha(\xi) = \pi \cdot e^{-|\xi|}, \quad \delta(\xi) = -\frac{2 i \xi}{(\xi^2 + 1) \cdot r}.$$

З формул (2.49) отримаємо функцій  $\beta(\xi)$  і  $\gamma(\xi)$ :

$$\gamma(\xi) = \frac{1.175320840 \cdot r e^{-|\xi|} (\xi^2 + 1) - 2.352246170 i \xi}{(\xi^2 + 1) \cdot r},$$

$$\beta(\xi) = \frac{2.671142753 \cdot r e^{-|\xi|} (\xi^2 + 1) - 0.7482324860 i \xi}{(\xi^2 + 1) \cdot r}.$$

Знайдені вирази  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  підставляємо у вирази трансформант напружень (2.39) та трансформант переміщень (2.40).

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є (2.2) отримаємо істинні значення напружень (рис.2.11) та переміщень (рис.2.10) точок півплощини.

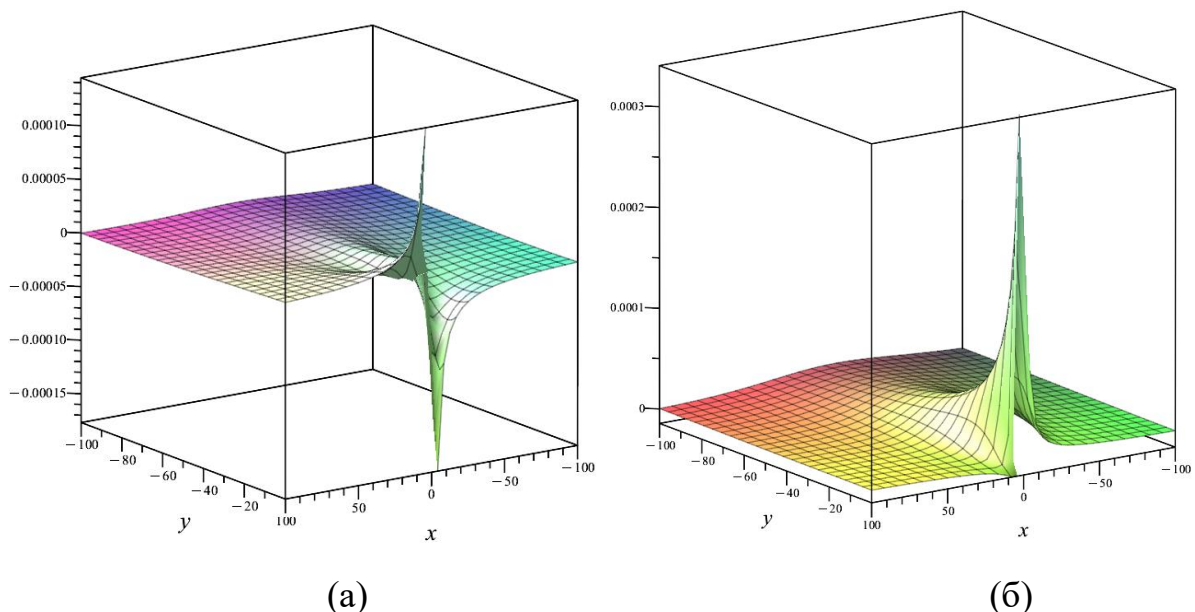


Рисунок 2.10 – Значення переміщень  $u_x(x, y)$  (а),  $u_y(x, y)$  (б)

Отримані результати цілком узгоджуються з очікуваною фізичною картиною розподілу переміщень в півплощині.

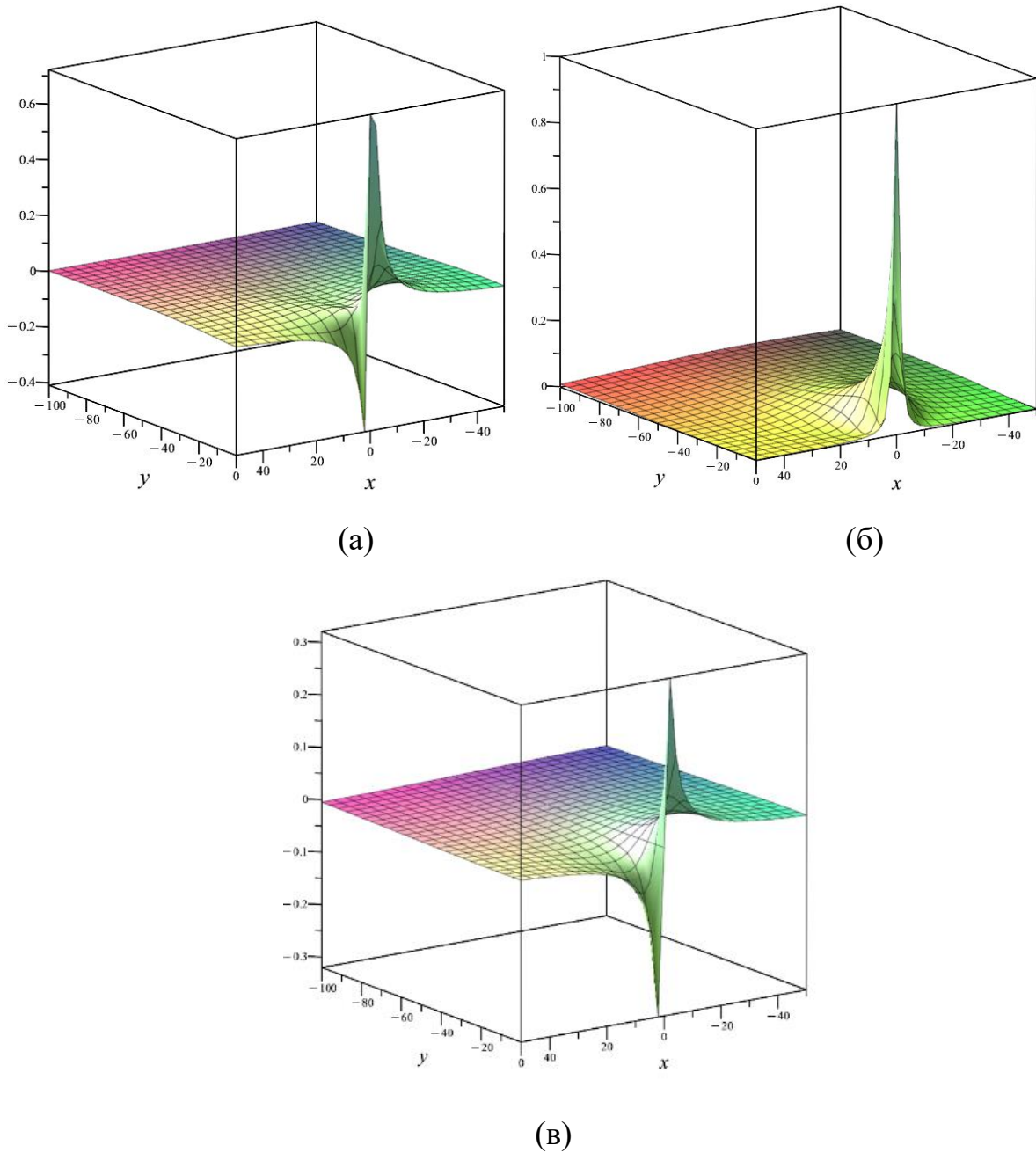


Рисунок 2.11 – Значення напружень  $\sigma_x(x, y)$  (а),  $\sigma_y(x, y)$  (б) та  $\tau_{xy}(x, y)$  (в)

Як бачимо з наведених розрахунків найбільші значення в околі  $x = 0$ . При віддалені від нуля значення зменшуються. Отримані результати свідчать про виконання межових умов та умов на нескінченності  $\sigma_y(0,0) = 1$  (Па).

### 2.3.5 Приклад 5

Розглянемо ортотропну півплощину, матеріал якої характеризується пружними константами  $E_x = 1.73 \cdot 10^3$  Па,  $E_y = 3.31 \cdot 10^3$  Па,  $\nu_{xz} = 0.39$ ,  $\nu_{xy} = 0.28$ ,  $\nu_{yz} = 0.13$ ,  $\nu_{zy} = 0.49$ .

На межі  $y = 0$  задано напруження  $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}$  (Па),  $\tau_{xy}(x, 0) = 0$  (Па). При  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  напруження дорівнюють нулю.

Отримані числові результати відносяться до випадку з чотирма дійсними коренями ( $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1$ ) описаному в пункті 2.1.4 для трансформант функції напруження  $\bar{\varphi}(\xi, y)$  (2.42).

З умов на верхній шару маємо  $\alpha(\xi) = \pi \cdot e^{-|\xi|}$ ,  $\delta(\xi) = 0$ .

Із умов на нижній межі шару отримаємо функцій  $\beta(\xi)$  і  $\gamma(\xi)$  за формулою (2.41):  $\beta(\xi) = \frac{-8.010073596 \cdot e^{-|\xi|}}{r}$ ,  $\gamma(\xi) = -2.49831721 \cdot e^{-|\xi|}$ .

Знайдені вирази  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  підставляємо в трансформанти напружень (2.43) та трансформанти переміщень (2.44).

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є (2.2) отримаємо істинні значення напружень (рис.2.12) та переміщень точок півплощини (рис.2.13).

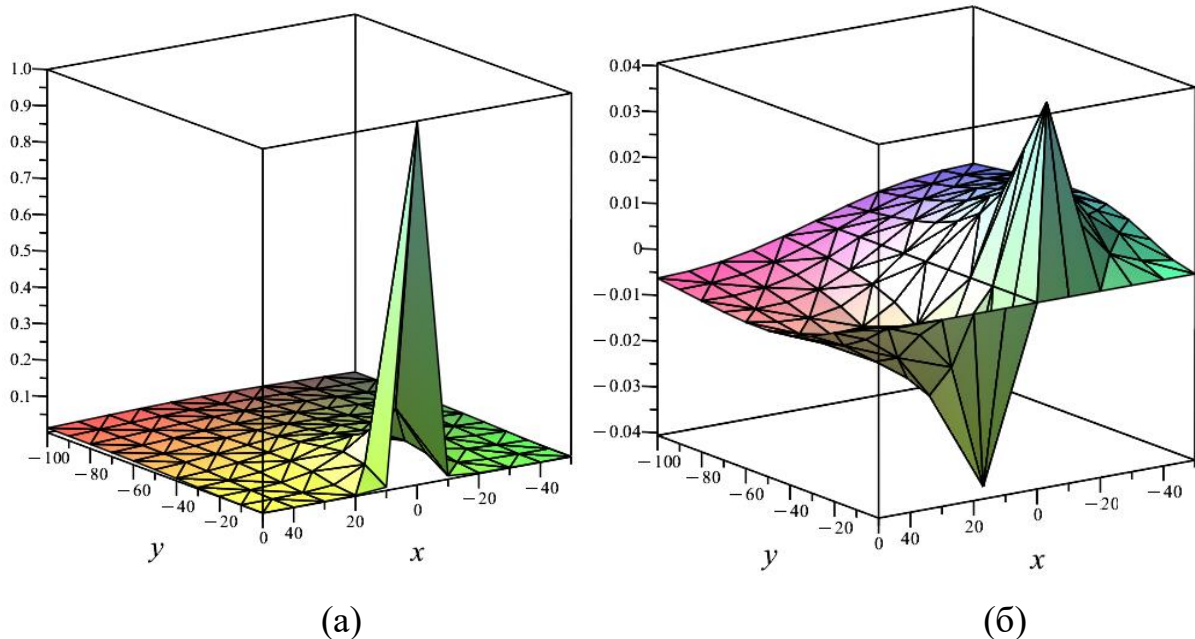


Рисунок 2.12 – Значення напружень  $\sigma_y(x, y)$  (а) та  $\tau_{xy}(x, y)$  (б)

Як бачимо з наведених розрахунків найбільші значення в околі  $x = 0$ . При віддалені від нуля значення зменшуються. Отримані результати свідчать про виконання межових умов  $\sigma_y(0,0) = 1$  (Па),  $\tau_{xy}(0,0) = 0$  (Па) та умов на нескінченності.

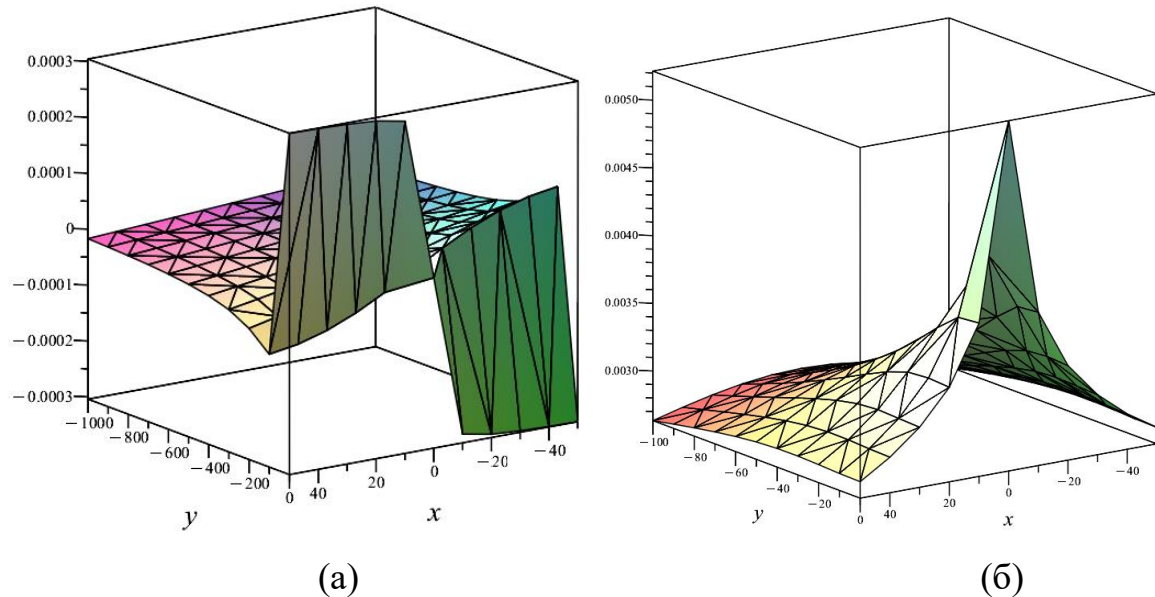


Рисунок 2.13 –Значення переміщень  $u_x(x, y)$  (а),  $u_y(x, y)$  (б)

Отримані результати цілком узгоджуються з очікуваною фізичною картиною розподілу переміщень в півплощині.

### 2.3.6 Приклад 6

Розглянемо ортотропну півплощину, матеріал якої характеризується пружними константами  $E_x = 1.73 \cdot 10^9$  Па,  $E_y = 3.31 \cdot 10^9$  Па,  $\nu_{zy} = 0.3$ ,  $\nu_{xz} = 0.235$ ,  $\nu_{xy} = 0.26$ ,  $\nu_{yz} = 0.17$ .

Розглянемо зосередженого навантаження  $\sigma_y(x, 0) = 2 \cdot 10^6$  (Па),  $\tau_{xy}(x, 0) = 0$  (Па) які задано на межі  $y = 0$ . При  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  напруження дорівнюють нулю.

Отримані числові результати відносяться до випадку з дійсними коренями ( $\frac{A_1 A_2}{A_3} = 1$ ) описаному в пункті 2.1.3. для трансформант функції  $\bar{\varphi}(\xi, y)$  за формулою (2.34).

З умов на верхній шару маємо  $\alpha(\xi) = 2 \cdot 10^6$ ,  $\delta(\xi) = 0$ . Значення  $\beta(\xi)$  і  $\gamma(\xi)$  отримаємо за формулою (2.54):

$$\beta(\xi) = 1.700502291 \cdot 10^6, \quad \gamma(\xi) = 748232.4855.$$

Знайдені вирази  $\alpha(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  підставляємо в трансформанти напружень (2.52) та трансформанти переміщень (2.53).

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є отримаємо істинні значення напружень (рис.2.14) та переміщень (рис.2.15) точок півплощини.

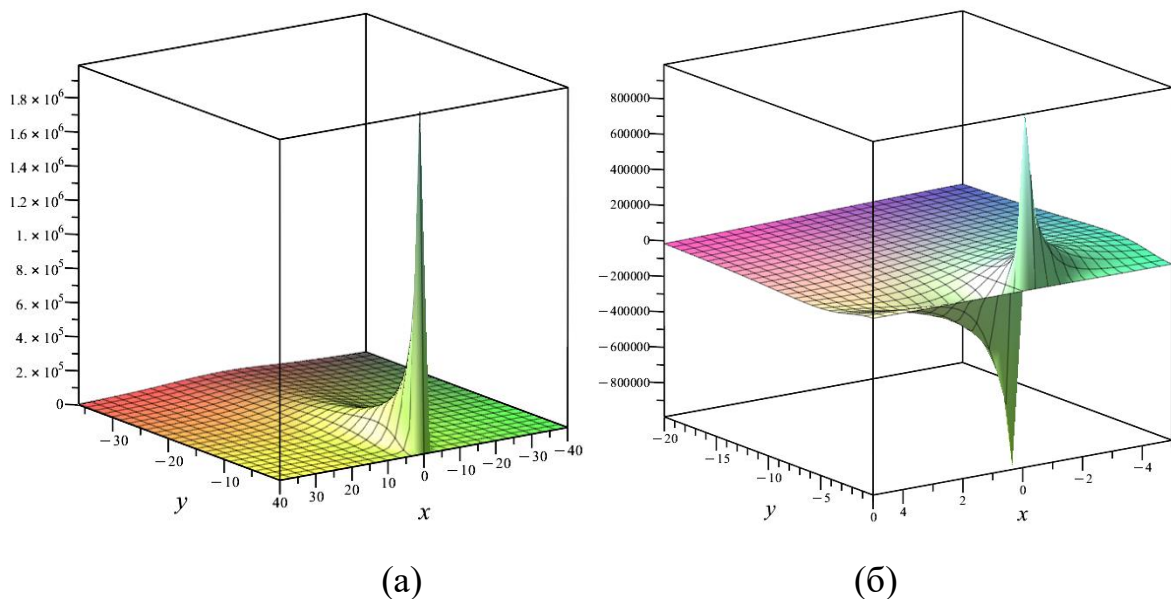


Рисунок 2.14 – Значення напружень  $\sigma_y(x, y)$  (а) та  $\tau_{xy}(x, y)$  (б)

Як бачимо з наведених розрахунків найбільші значення в околі  $x = 0$ . При віддалені від нуля значення зменшуються. Отримані результати свідчать про виконання межових умов  $\sigma_y(0,0) = 2 \cdot 10^6$  (Па),  $\tau_{xy}(0,0) = 0$  (Па) та умов на нескінченності ( $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  напруження дорівнюють нулю).

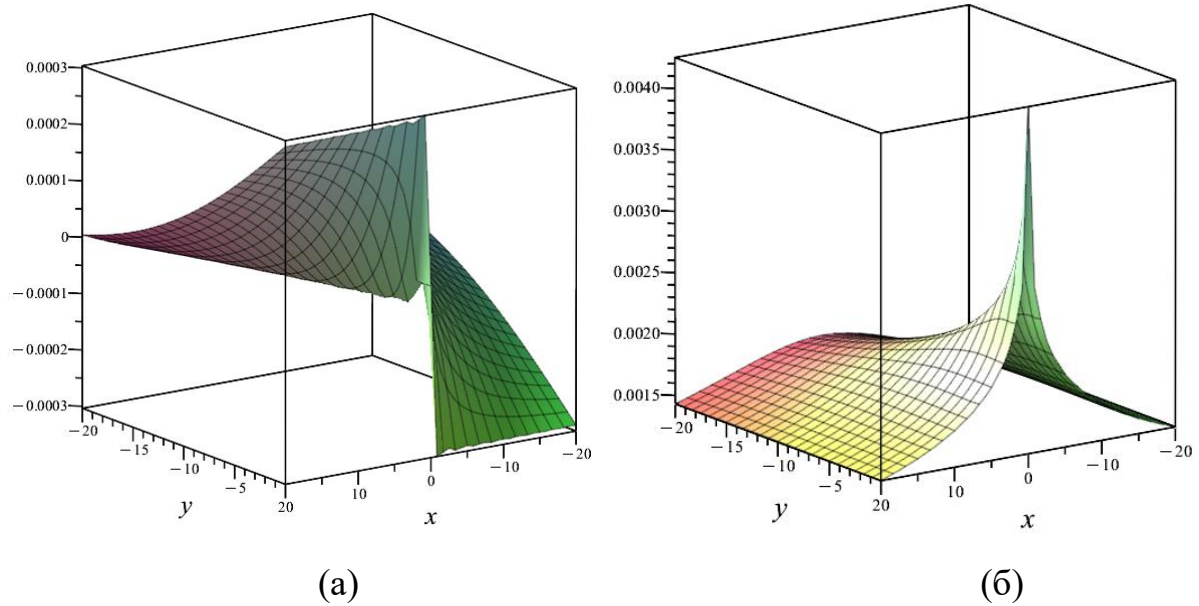


Рисунок 2.15 – Значення переміщень  $u_x(x, y)$  (а),  $u_y(x, y)$  (б)

Отримані результати для переміщень  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  демонструють симетричний характер деформування. Максимальні значення нормальних переміщень  $u_y(x, y)$  відповідають лінії дії максимального нормального навантаження.

#### 2.4. Висновки до розділу 2

Другий розділ присвячений розв'язанню задач про визначення напружено-деформівного стану пружних ортотропних тіл, таких як шар та півпростір в умовах плоскої деформації.

Розв'язання задач базується на побудові трансформанти Фур'є функції напружень, яка задовольняє відповідному аналогу бігармонічного диференціального рівняння в просторі трансформант одновимірного перетворення Фур'є для випадку ортотропного матеріалу.

Розглянуто всі випадки трансформант функції напружень у залежності від значень коренів характеристичного рівняння бігармонічного диференціального рівняння для ортотропного матеріалу.

Вперше отримано розрахункові формули поставлених задач для ортотропного шару та ортотропного півпростору в умовах плоскої деформації, що враховують три види коренів характеристичного рівняння. Проведено дослідження особливостей напружено-деформівного стану в ортотропному шарі та в ортотропній півплощині.

Розв'язано конкретні задачі про дію поверхневого навантаження на шар і півплощину. На базі отриманих аналітичних розв'язків для ортотропного шару та півплощини були зроблені числові розрахунки, побудовані графіки та виконаний їх аналіз.

Отримано аналітичний розв'язок задачі Фламана про дію зосередженої нормальної сили до поверхні пружної однорідної, суцільної ортотропної півплощини. Зроблено числові розрахунки, побудовано графіки та виконаний їх аналіз.

Отримані розрахунки свідчать про адекватність результатів і логічність застосування обраного методу для розв'язання поставлених задач.

Наступним етапом досліджень є поширення описаного підходу на клас задач про визначення напружено-деформівного стану пружних шарів та багатошарових основ з урахуванням ортотропії матеріалу шарів.

Основні наукові і практичні результати даного розділу опубліковано в роботах [31–37, 39, 46].

## РОЗДІЛ 3

### ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ ДВОШАРОВИХ ОРТОТРОПНИХ ТІЛ

#### 3.1. Напружено-деформівний стан ортотропного шару зчепленого з ортотропною півплощиною

##### 3.1.1 Концептуальна та математична постановка

Розглянемо плоску задачу визначення напружень та переміщень в будь якій точці ортотропного тіла, що складається з ортотропного шару постійної товщини  $h$  зчепленого з ортотропним півпростіром. На верхній межі шару діє зовнішнє навантаження  $P$ . На нескінченності напруження прямують до нуля. Деформація шару та півпростору є плоскою.

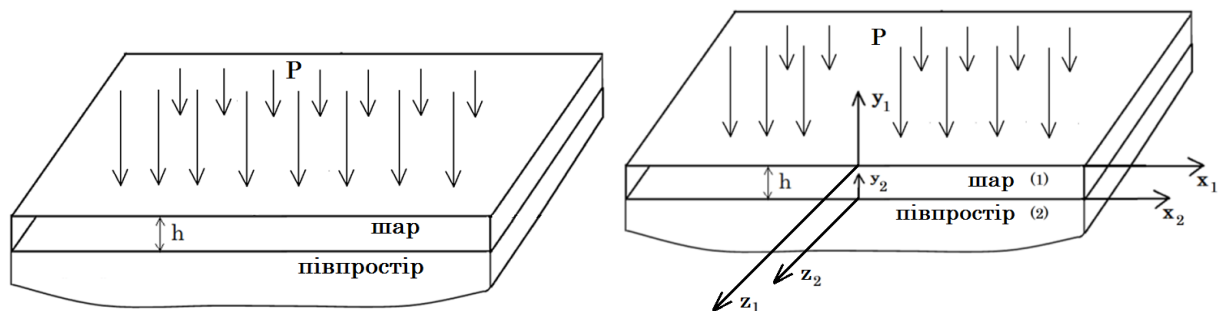


Рисунок 3.1 – Постановка задачі

Математична постановка задачі.

Будемо позначати верхнім індексом  $i = 1$  всі величини, що відносяться до шару та  $i = 2$  які відносяться до півпростору. Для побудови математичної моделі задачі введемо узгоджені між собою локальні системи координат  $O_1X_1Y_1$  для шару та  $O_2X_2Y_2$  для півпростору як зображено на рисунку 3.1.

Геометричні області які займають шар та півпростір:

$$G_1(x_1, y_1, z_1) : \{-\infty < x_1 < +\infty, -h \leq y_1 \leq 0, -\infty < z_1 < +\infty, \},$$

$$G_2(x_2, y_2, z_2) : \{-\infty < x_2 < +\infty, -\infty < y_2 \leq 0, -\infty < z_2 < +\infty\}.$$

Верхня межа шару  $y_1 = 0$ , а верхня межа півплощини  $y_2 = 0$ . Матеріали шару та півпростору характеризується пружними константами  $\nu_{xz}^1, \nu_{xy}^1, \nu_{yz}^1, \nu_{zy}^1, E_x^1, E_y^1$  та відповідно  $\nu_{xz}^2, \nu_{xy}^2, \nu_{yz}^2, \nu_{zy}^2, E_x^2, E_y^2$ .

Зовнішнє навантаження  $P^1(x, z)$  є таким, що деформація шару та півпростору є плоскою, переміщення точок тіла відбуваються паралельно площині  $O_1X_1Y_1$  ( $O_2X_2Y_2$ ):

$$W(x_1, y_1, z_1^*) = u_z(x_1, y_1, z_1^*) = 0, \quad U(x_1, y_1, z_1^*) = u_x(x_1, y_1, z_1^*) = u_x(x_1, y_1),$$

$$V(x_1, y_1, z_1^*) = u_y(x_1, y_1, z_1^*) = u_y(x_1, y_1).$$

$$W(x_2, y_2, z_2^*) = u_z(x_2, y_2, z_2^*) = 0, \quad U(x_2, y_2, z_2^*) = u_x(x_2, y_2, z_2^*) = u_x(x_2, y_2),$$

$$V(x_2, y_2, z_2^*) = u_y(x_2, y_2, z_2^*) = u_y(x_2, y_2).$$

Таким чином приходимо до плоскої задачі теорії пружності (рис.3.2).

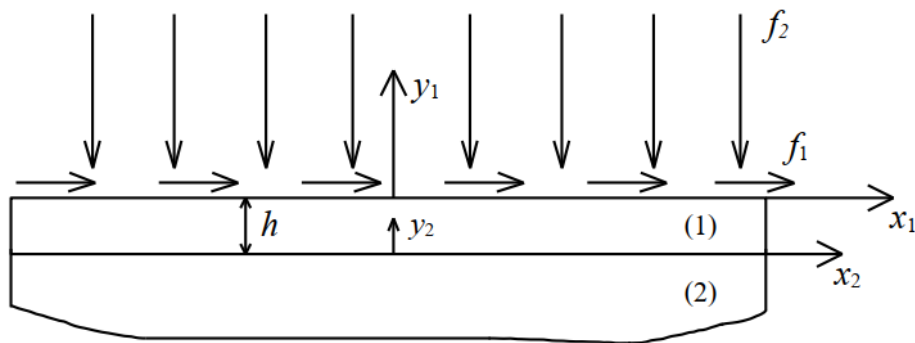


Рисунок 3.2 – Двовимірна постановка задачі

Крайові умови:

1) на межі  $y_1 = 0$ :

$$\sigma_y^1(x_1, 0) = f_1(x_1), \quad \tau_{xy}^1(x_1, 0) = f_2(x_1); \quad (3.1)$$

2) на спільній межі шару та півплощини:

$$\sigma_y^1(x_1, -h) = \sigma_y^2(x_2, 0), \quad u_x^1(x_1, -h) = u_x^2(x_2, 0); \quad (3.2)$$

3) на нескінченності:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1^2+y_1^2 \rightarrow \infty} \sigma_y^1(x_1, y_1) = 0, \quad \lim_{x_1^2+y_1^2 \rightarrow \infty} \tau_{xy}^1(x_1, y_1) = 0, \\ \lim_{x_2^2+y_2^2 \rightarrow \infty} \sigma_y^2(x_2, y_2) = 0, \quad \lim_{x_2^2+y_2^2 \rightarrow \infty} \tau_{xy}^2(x_2, y_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Необхідно знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь плоскої теорії пружності для ортотропного матеріалу який задовольняє крайовим умовам (3.1) – (3.3).

Розв'язок поставленої граничної задачі шукається в просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є (2.1) аналогічно описаному в розділі 2. При цьому всі основні рівняння задачі та граничні умови піддаються прямому перетворенню одновимірного інтегрального перетворення Фур'є.

Крайові умови в просторі трансформант приймають вигляд:

$$\overline{\sigma_y^1}(\xi, 0) = \overline{f_1}(\xi), \quad \overline{\tau_{xy}^1}(\xi, 0) = \overline{f_2}(\xi); \quad (3.4)$$

$$\overline{\sigma_y^1}(\xi, -h) = \overline{\sigma_y^2}(\xi, 0), \quad \overline{u_x^1}(\xi, -h) = \overline{u_x^2}(\xi, 0); \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x_1^2+y_1^2 \rightarrow \infty} \overline{\sigma_y^1}(\xi, y_1) = 0, \quad \lim_{x_1^2+y_1^2 \rightarrow \infty} \overline{\tau_{xy}^1}(\xi, y_1) = 0, \\ \lim_{x_2^2+y_2^2 \rightarrow \infty} \overline{\sigma_y^2}(\xi, y_2) = 0, \quad \lim_{x_2^2+y_2^2 \rightarrow \infty} \overline{\tau_{xy}^2}(\xi, y_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Спираючись на результати розділу 2 трансформанти функції напружень шару та півплощини можуть приймати один з трьох можливих виразів  $\overline{\varphi}_i(\xi, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$  (2.26), (2.34), (2.42).

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_1(\xi, y) &= C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \cdot \cos(ry\sqrt{a_2}) + A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \cdot \cos(ry\sqrt{a_2}) \\ &\quad + D \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}), \\ \overline{\varphi}_2(\xi, y) &= A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + B\sqrt{a}y \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}) + D\sqrt{a}y \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}), \\ \overline{\varphi}_3(\xi, y) &= A \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_2}) + D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_2}).\end{aligned}$$

### 3.1.2 Схема загального розв'язання

Розглянемо один із можливих випадків – матеріали шару та півплощини є такими, що їм відповідають трансформанти функцій напружень виду (2.34). Запишемо ці трансформанти функцій напружень для шару  $\overline{\varphi}_{21}(\xi, y)$  та півплощини  $\overline{\varphi}_{22}(\xi, y)$ :

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_{21}(\xi, y) &= A_{21} \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + B_{21}\sqrt{a_1}y \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + C_{21} \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) \\ &\quad + D_{21}\sqrt{a_1}y \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}), \\ \overline{\varphi}_{22}(\xi, y) &= A_{22} \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_2}) + B_{22}\sqrt{a_2}y \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_2}) + C_{22} \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_2}) \\ &\quad + D_{22}\sqrt{a_2}y \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_2}),\end{aligned}\tag{3.7}$$

де  $r = |\xi|$ ,  $\sqrt{a_j} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$ ,  $A_{2j}, B_{2j}, C_{2j}, D_{2j}$  – функції параметра  $\xi$ ,  $j = 1, 2$ .

Запишемо трансформанти напружень для шару та півплощини:

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_x^j(\xi, y) &= (D_{2j}\sqrt{a_j}ry + rC_{2j} + 2B_{2j}) \cdot a_j r \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_j}) \\ &\quad + (B_{2j}\sqrt{a_j}ry + rA_{2j} + 2D_{2j}) \cdot a_j r \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_j}), \\ \overline{\sigma}_y^j(\xi, y) &= (D_{2i}\sqrt{a_j}y + C_{2j}) \cdot \xi^2 \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_j}) - (B_{2i}\sqrt{a_j}y + A_{2j}) \cdot \xi^2 \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_j}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\tau}_{xy}^J(\xi, y) &= (A_{2j}\sqrt{a_j}r + B_{2j}a_jry + D_{2j}\sqrt{a_j}) \cdot i\xi ch(ry\sqrt{a_j}) \\ &+ (C_{2j}\sqrt{a_j}r + D_{2j}a_jry + B_{2j}\sqrt{a_j}) \cdot i\xi sh(ry\sqrt{a_j}).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Трансформанти переміщень для шару та півплощини приймають вид:

$$\begin{aligned}\overline{u}_x^J(\xi, y) &= (iD_{2j}\sqrt{a_j}r^2y(a_jc_{j11} + c_{j12}) + ia_jrc_{j11}(rC_{2j} + 2B_{2j}) + iC_{2j}c_{j12}\xi^2) \\ &\cdot \frac{ch(ry\sqrt{a_j})}{\xi} + \frac{ish(ry\sqrt{a_j})}{\xi} \\ &\cdot (B_{2j}\sqrt{a_j}r^2y(a_jc_{j11} + c_{j12}) + a_jrc_{j11}(rC_{2j} + 2B_{2j}) + A_{2j}c_{j12}\xi^2), \\ \overline{u}_y^J(\xi, y) &= (c_{j11}a_j\sqrt{a_j} \cdot (A_{2j}r + 3D_{2j}) - \sqrt{a_j} \cdot (c_{j33} - c_{j12}) \cdot (A_{2j}r + D_{2j}) \\ &- ry a_j B_{2j} \cdot (c_{j33} - c_{j12} - a_j c_{j11})) \cdot ch(ry\sqrt{a_j}) - sh(ry\sqrt{a_j}) \\ &\cdot (-c_{j11}a_j\sqrt{a_j} \cdot (C_{2j}r + 3B_{2j}) + \sqrt{a_j} \cdot (c_{j33} - c_{j12}) \cdot (C_{2j}r + B_{2j}) \\ &+ ry a_j D_{2j} \cdot (c_{j33} - c_{j12} - a_j c_{j11})),\end{aligned}\quad (3.9)$$

де  $c_{j11}, c_{j22}, c_{j33}, c_{j12}$  – коефіцієнти пружності в законі Гука.

У формулах (3.8), (3.9) застосовується індекс  $j = 1$  для шару та  $j = 2$  для півплощини.

Крайові умови (3.4)-(3.6) в просторі трансформант з урахуванням виду трансформанти функції напружень (3.7) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_y^1(\xi, 0) &= -\xi^2 C_{21} = \overline{f}_1(\xi), \quad \overline{\tau}_{xy}^1(\xi, 0) = i\xi\sqrt{a_1}(rA_{21} + D_{21}) = \overline{f}_2(\xi); \quad (3.4') \\ (D_{21}\sqrt{a_1}h - C_{21}) \cdot \xi^2 ch(rh\sqrt{a_1}) - (B_{21}\sqrt{a_1}h - A_{21}) \cdot \xi^2 sh(rh\sqrt{a_1}) &= -\xi^2 C_{22}, \\ (rc_{112}C_{21} + a_1c_{111}(rC_{21} + 2B_{21}) - hr\sqrt{a_1}c_{112}D_{21} - hra_1\sqrt{a_1}c_{111}D_{21}) \\ &\cdot irch(rh\sqrt{a_1}) + irsh(rh\sqrt{a_1}) \\ &\cdot (B_{21}hr\sqrt{a_1}(c_{112} + a_1c_{111}) - rc_{112}A_{21} - a_1c_{111}(rA_{21} + 2D_{21})) \\ &= ia_2rc_{211}(rC_{22} + 2B_{22}) + i\xi^2c_{212}C_{22}.\end{aligned}\quad (3.5')$$

Формули для трансформант напружень  $\overline{\sigma}_y^J(\xi, y), \overline{\tau}_{xy}^J(\xi, y)$  є лінійними комбінаціями функцій  $ch(ry\sqrt{a_j}), sh(ry\sqrt{a_j})$  і  $ych(ry\sqrt{a_j}), ysh(ry\sqrt{a_j})$  кожна з яких при  $r \neq 0$  і  $y \rightarrow \infty$  необмежено зростає. При цьому  $A_{2j}sh(ry\sqrt{a_j}) + C_{2j}ch(ry\sqrt{a_j})$  і  $B_{2j}\sqrt{a_j}y sh(ry\sqrt{a_j}) + D_{2j}\sqrt{a_j}ych(ry\sqrt{a_j})$  прямує до 0 при нескінченності у випадках  $A_{2j} = C_{2j}$  та  $B_{2j} = D_{2j}, j = 1, 2$ .

Із крайових умов на верхній межі шару, умов контакту між шаром та півплощиною, умов на нескінченності отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій  $A_{21}, B_{21}, C_{21}, D_{21}, A_{22}, B_{22}, C_{22}, D_{22}$ . Розв'язки системи подаються виразами:

$$A_{21} = C_{21} = -\frac{\bar{f}_1}{\xi^2}, \quad B_{21} = D_{21} = \frac{-i(i\bar{f}_1\sqrt{a_1}r + \bar{f}_2\xi)}{\xi^2\sqrt{a_1}},$$

$$A_{22} = C_{22} = \frac{(sh(rh\sqrt{a_1}) - ch(rh\sqrt{a_1}))(\bar{f}_1\sqrt{a_1}rh - i\bar{f}_2h\xi + \bar{f}_1)}{\xi^2},$$

$$B_{22} = D_{22} = \frac{(sh(rh\sqrt{a_1}) - ch(rh\sqrt{a_1}))}{\xi^2\sqrt{a_2}} (i\bar{f}_2rh\xi(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) - \sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\bar{f}_1r^2h + a_1\bar{f}_1r^2h + i\bar{f}_2\xi - \sqrt{a_2}\bar{f}_1r).$$

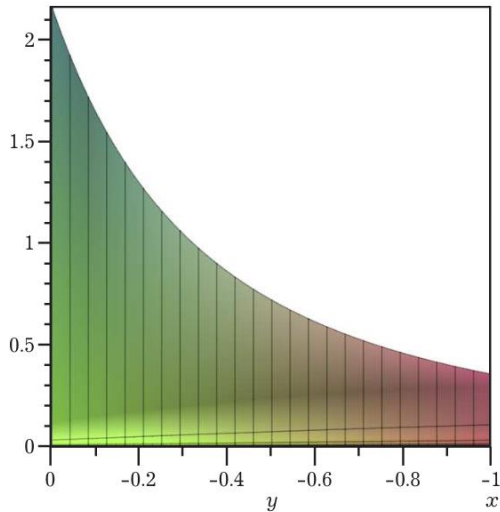
Отримані вирази підставляємо у трансформанти напружень  $\overline{\sigma}_x^J(\xi, y), \overline{\sigma}_y^J(\xi, y), \overline{\tau}_{xy}^J(\xi, y)$  (3.8) та переміщень  $\overline{u}_x^J(\xi, y), \overline{u}_y^J(\xi, y)$  (3.9), після чого піддаємо оберненому інтегральному перетворенню Фур'є і отримуємо істинні значення напружень та переміщень шару і півплощини.

### 3.2. Приклад практичної реалізації

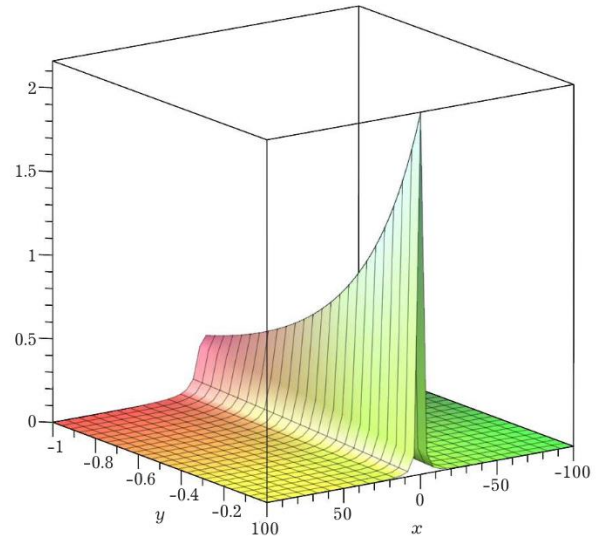
Розглянемо ортотропний шар, матеріал якого характеризується пружними константами  $\nu_{xy} = 0.26, \nu_{xz} = 0.19, \nu_{yz} = 0.41, \nu_{zy} = 0.30,$

$E_x = 3.86 \cdot 10^4$  Па,  $E_y = 8.27 \cdot 10^3$  Па, ортотропний півпростір  $\nu_{xy} = 0.26$ ,  
 $\nu_{xz} = 0.235$ ,  $\nu_{yz} = 0.17$ ,  $\nu_{zy} = 0.3$ ,  $E_x = 1.73 \cdot 10^3$  Па,  $E_y = 3.31 \cdot 10^3$  Па.

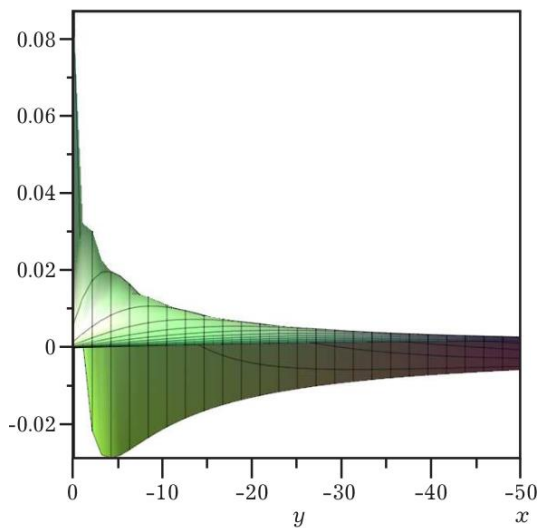
На верхній межі шару  $y_1 = 0$  задано навантаження  $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}$  (Па),  
 $\tau_{xy}(x, 0) = 0$  (Па). Отже трансформанти  $\overline{\sigma_y^1}(\xi, 0) = \pi \cdot e^{-|\xi|}$ ,  $\overline{\tau_{xy}^1}(\xi, 0) = 0$ .



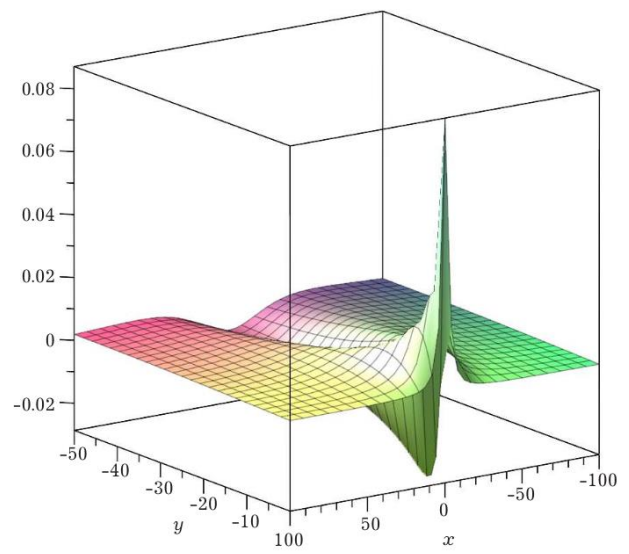
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 3.3 – Значення  $\sigma_x(x, y)$  шару (а, б) та півплощини (в, г)

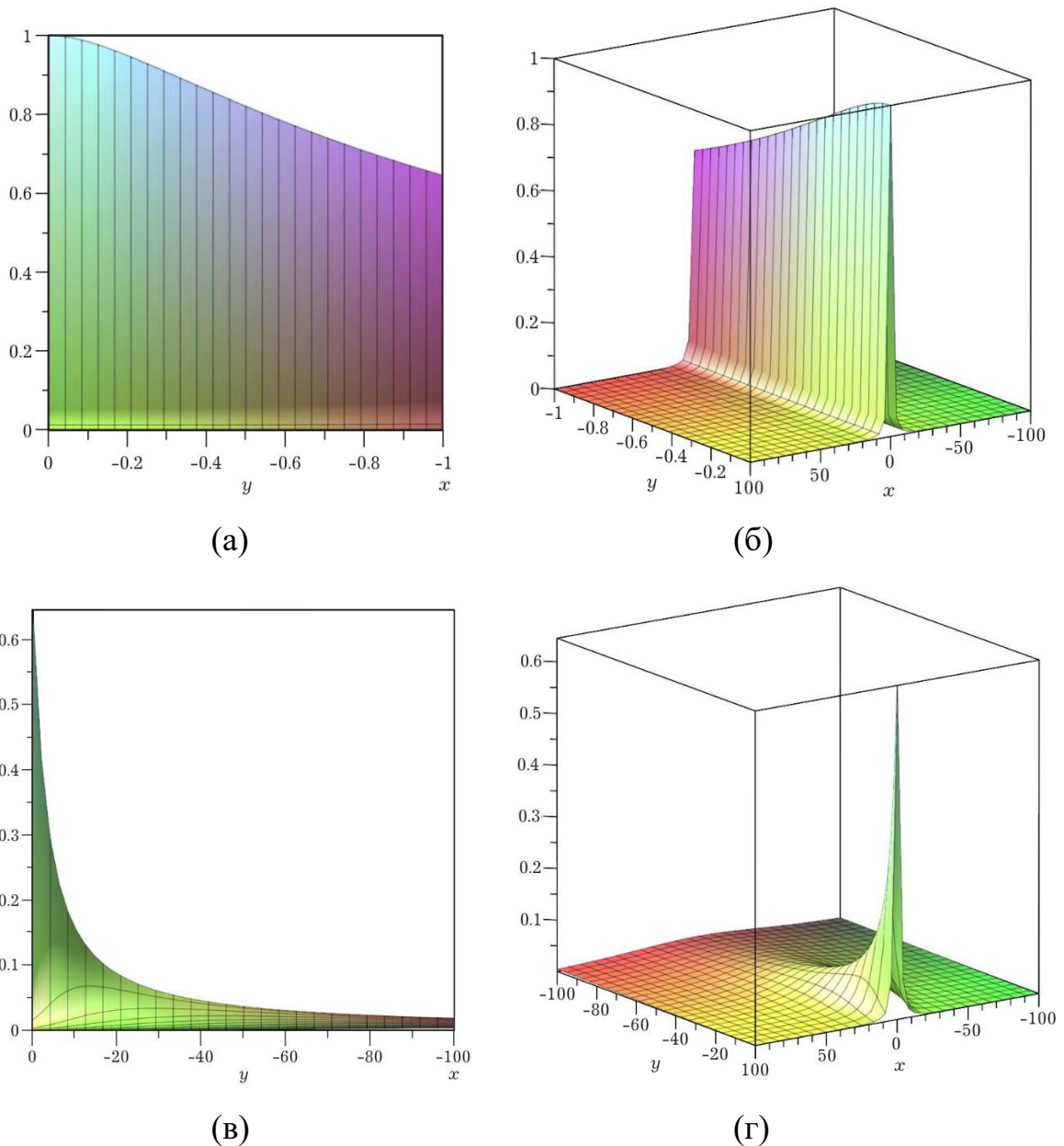


Рисунок 3.4 – Значення  $\sigma_y(x, y)$  шару (а, б) та півплощини (в, г)

Характер навантаження шару обумовлює симетричність розподілу напружень в шарі та півплощині, при цьому максимальні по модулю значення напружень спостерігаються вздовж лінії дії максимального нормального навантаження.

Як бачимо на рис. 3.3-3.4 значення напружень  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  шару та півплощини приймають найбільші значення поблизу  $x = 0$  для кожного  $y$ , а при віддалені від  $x = 0$  значення напружень зменшуються та на нескінченності прямують до нуля. Це свідчить про виконання умов (3.6) на

нескінченності, та виконання умов (3.4) на межі  $y = 0$ . Також отримані результати свідчать про виконання умов (3.5) контакту між шаром та півплощиною (зчеплення).

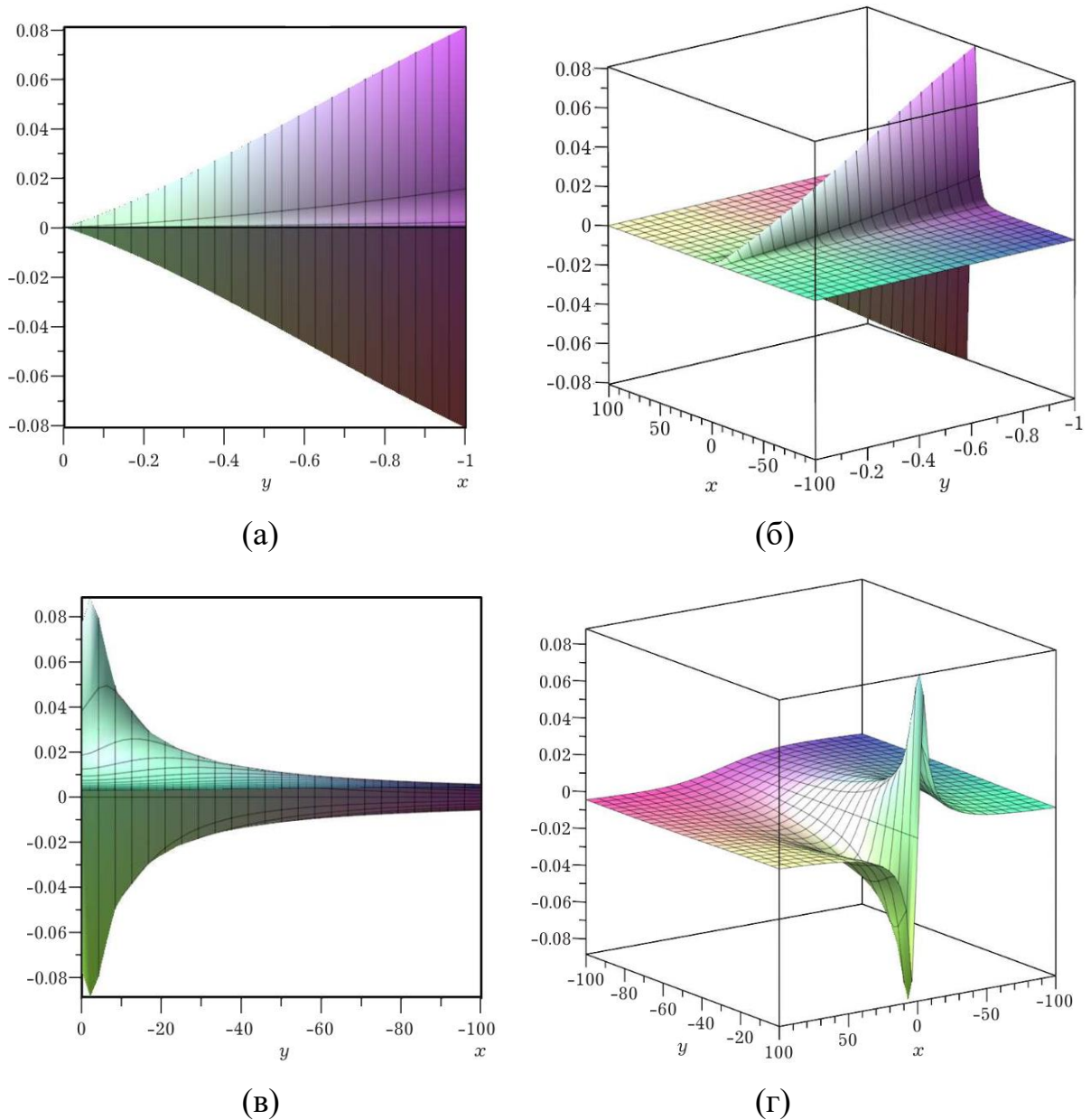


Рисунок 3.5 – Значення  $\tau_{xy}$  шару (а, б) та півплощини (в, г)

В точках шару симетричних відносно площини  $x = 0$  спостерігаємо симетрію розподілу дотичних напружень. Наведені графічні результати свідчать про виконання граничних умов (3.4) та (3.6). Порівняння графіків 3.5а і 3.5г свідчать про виконання умов (3.5). Отримані результати демонструють зростання абсолютних значень  $\tau_{xy}$  із збільшенням глибини в шарі. В

півплощині поведінка зберігається до досягання максимального значення при  $y_2 = -3$  з подальшим монотонним спаданням і при цьому на нескінченності прямують до нуля.

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є (2.2) до трансформант переміщень  $\overline{u}_x^J(\xi, y)$ ,  $\overline{u}_y^J(\xi, y)$  отримаємо істинні значення переміщень шару та півплощини (рис.3.6-3.7).

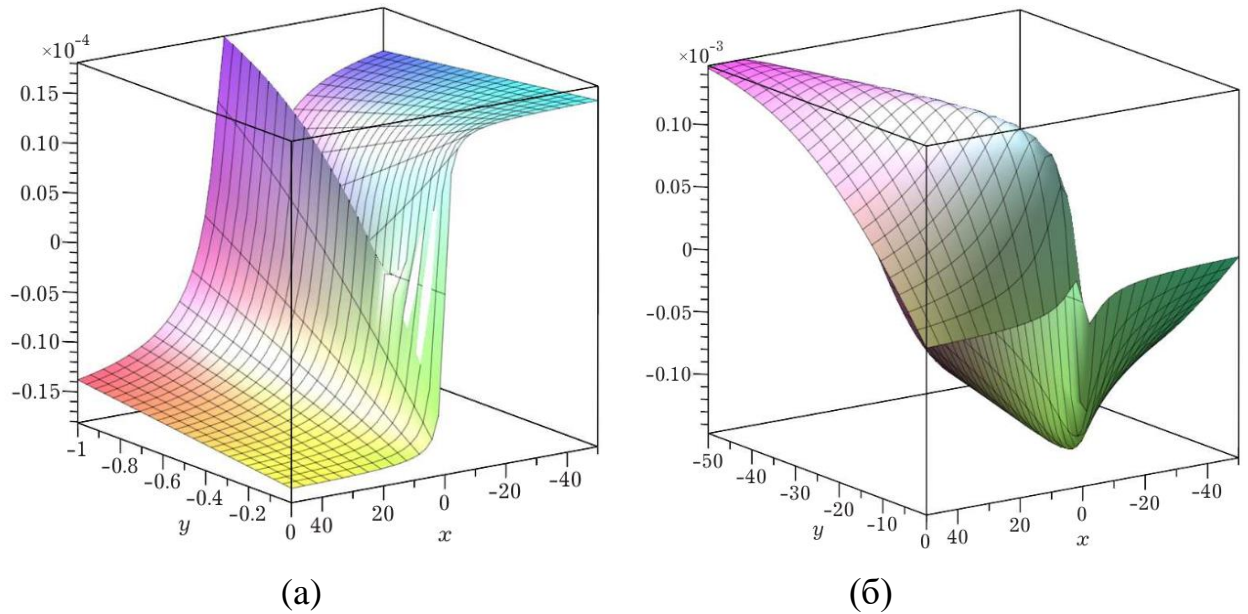


Рисунок 3.6 – Значення  $u_x(x, y)$  шару (а) та півплощини (б)

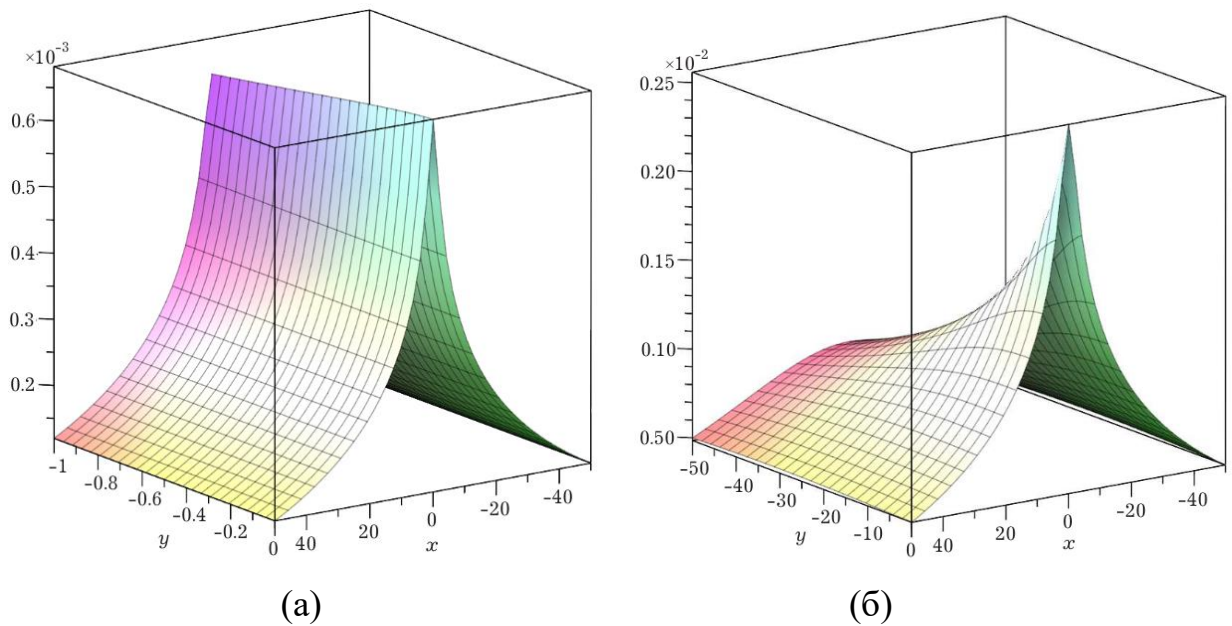


Рисунок 3.7 – Значення  $u_y(x, y)$  шару (а) та півплощини (б)

Отримані результати для переміщень шару і півплощини  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  цілком узгоджуються з очікуваною картиною переміщень. Спостерігається симетричний характер деформування. Максимальні значення нормальних переміщень  $u_y(x, y)$  відповідають лінії дії максимального нормального навантаження. За глибиною абсолютні значення переміщень зменшуються і прямують до 0.

### 3.3. Порівняння отриманих результатів

Для перевірки адекватності запропонованого підходу визначення напружень та переміщень шару та півплощини, проводилось порівняння отриманого розв'язку для задачі з ізотропними матеріалами з розв'язком отриманим методом скінченних елементів (МСЕ) з використанням скінченно-елементного пакету QFEM [152].

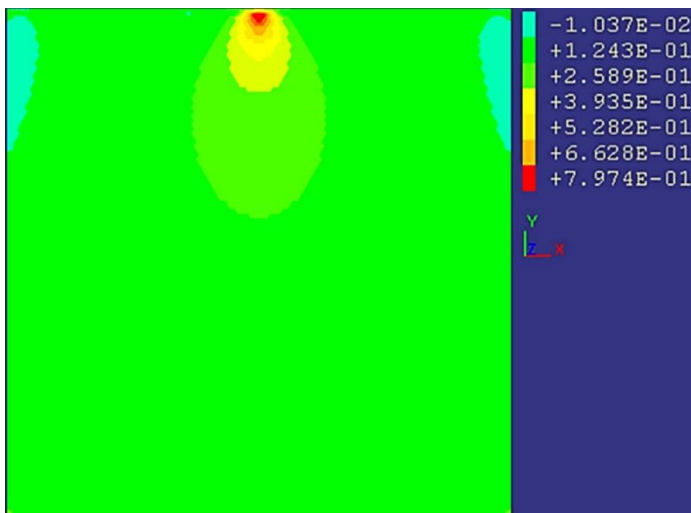
В наведених нижче рис. 3.8а, 3.9а, 3.10а, 3.11а наведені розв'язки отримані за допомогою QFEM, на рис. 3.8б, 3.9б, 3.10б, 3.11б – за запропонованою схемою.

Розрахунки проводились за таких параметрів:  $E_x^1 = E_y^1 = 3.86 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_{xy}^1 = \nu_{xz}^1 = \nu_{zy}^1 = \nu_{yz}^1 = 0.2$ ,  $E_x^2 = E_y^2 = 3.31 \cdot 10^9$  Па,  $\nu_{xy}^2 = \nu_{xz}^2 = \nu_{zy}^2 = \nu_{yz}^2 = 0.3$ . Товщина шару  $h = 1$  м.

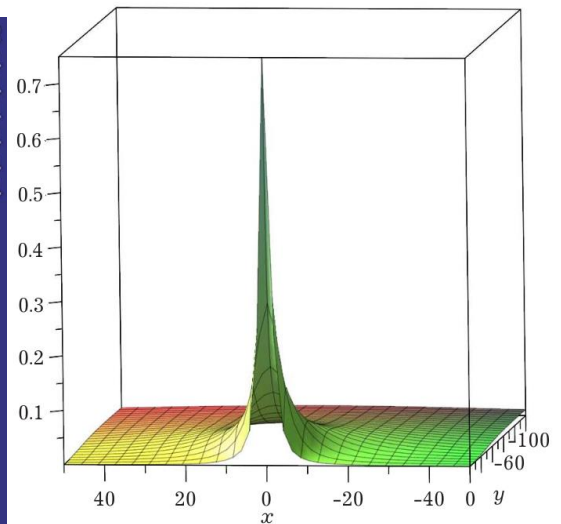
Параметри тіла для розрахунків за МСЕ:

$$G_1 : \{-50 < x_1 < 50, -1 \leq y_1 \leq 0\}, \quad G_2 : \{-50 < x_2 < 50, -100 < y_2 \leq 0\}.$$

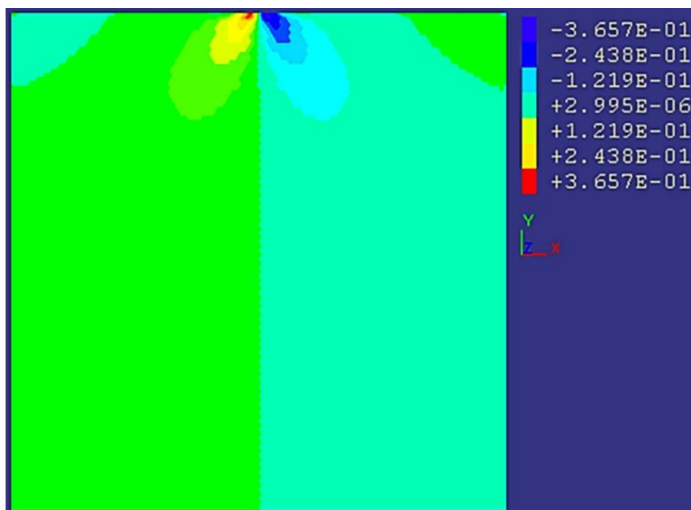
На верхній межі шару  $y_1 = 0$  задано навантаження  $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}$ ,  $\tau_{xy}(x, 0) = 0$ .



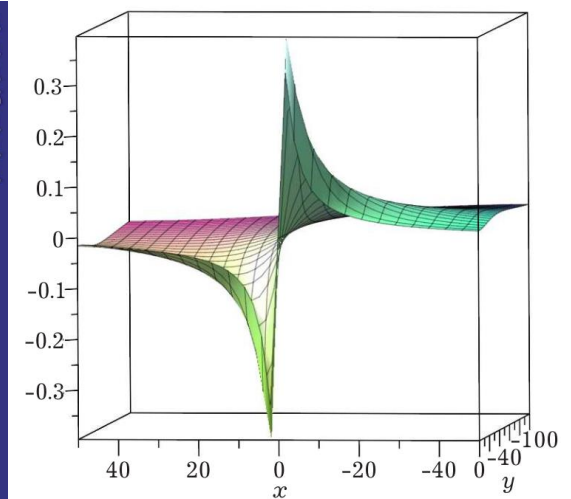
(a)



(б)

Рисунок 3.8 – Значення  $\sigma_y(x, y)$ 

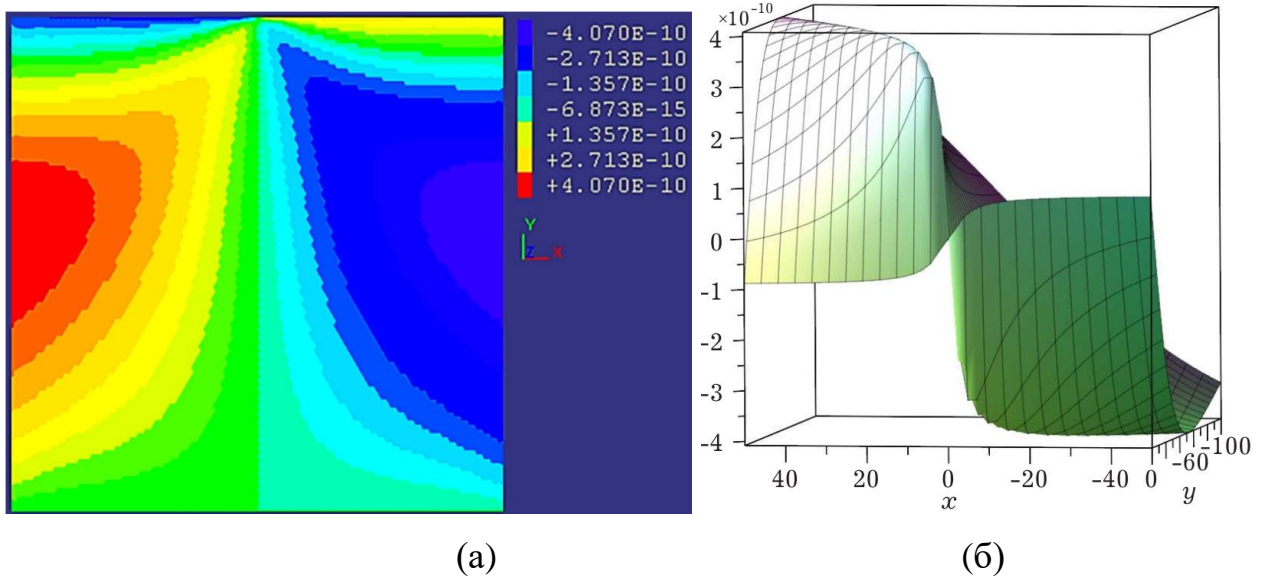
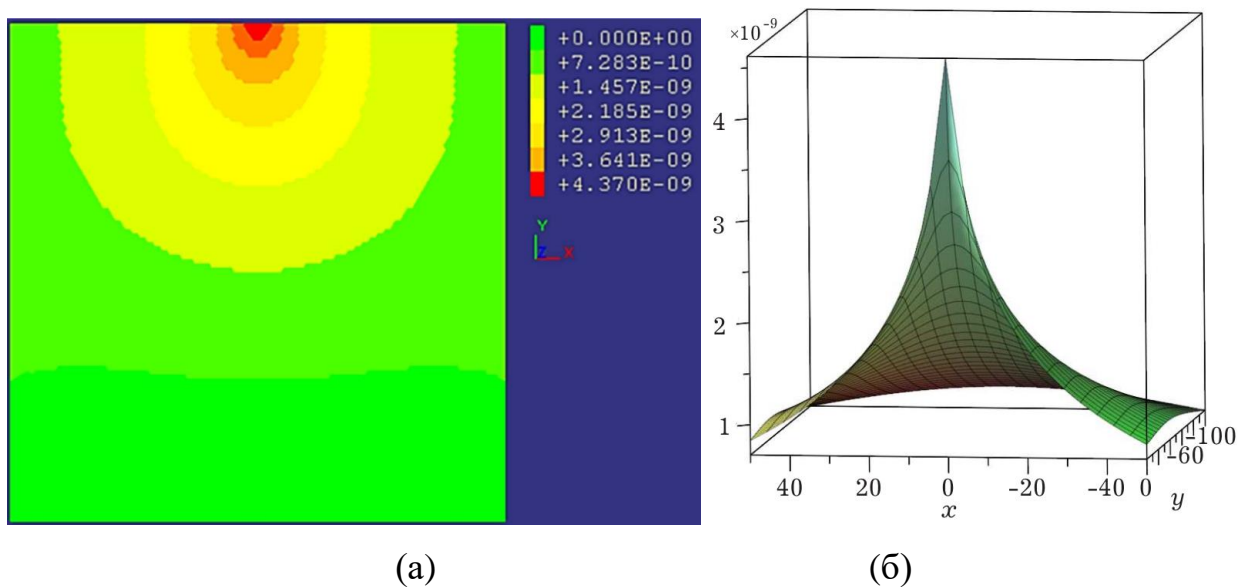
(a)



(б)

Рисунок 3.9 – Значення  $\tau_{xy}(x, y)$ 

На наведених рисунках 3.8-3.9 спостерігаємо однаковий характер розподілу відповідних напружень  $\sigma_y(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$ . Отримані числові результати за обома методами можна вважати такими, що співпадають.

Рисунок 3.10 – Значення  $u_x(x, y)$ Рисунок 3.11 – Значення  $u_y(x, y)$ 

На наведених рисунках 3.10-3.11 спостерігаємо однаковий характер розподілу відповідних переміщень. Отримані числові результати за обома методами можна вважати такими, що співпадають.

Отримані розв'язки цілком узгоджуються, що свідчить про адекватність розробленого підходу та можливість його застосування до визначення напружено-деформівного стану шаруватих тіл з достатньою для технічних застосувань точністю.

### 3.4. Висновки до розділу 3

В третьому розділі розглядається задача визначення напружено-деформівного стану ортотропного шару постійної товщини зчепленого з ортотропною півплощиною, на який діють зовнішні нормальні та дотичні навантаження.

Запропонований підхід до розв'язання задачі про визначення напружено-деформівного стану двошарового ортотропного тіла методом одновимірною інтегрального перетворення Фур'є. Пошук невідомих величин ведеться в просторі трансформант Фур'є.

Проведено дослідження особливостей напружено-деформівного стану в ортотропному двошаровому тілі. Вперше отримано розрахункові формули необхідні для реалізації алгоритму для знаходження напружень і переміщень для ортотропного двошарового тіла в умовах плоскої деформації. Отримано чисельно-аналітичний розв'язок поставленої задачі, проведено числові розрахунки та виконано їх аналіз.

Було проведене порівняння отриманого розв'язку задачі за запропонованою схемою з розв'язком отриманим методом скінченних елементів (МСЕ) за допомогою скінченно-елементного пакету QFEM.

Наступним етапом досліджень є поширення описаного підходу на клас задач про визначення напружено-деформівного стану багатошарових основ з ортотропними шарами.

Основні наукові і практичні результати даного розділу опубліковано в роботі [112].

## РОЗДІЛ 4

### НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ПРУЖНОЇ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ З ОРТОТРОПНИМИ ШАРАМИ

#### 4.1. Концептуальна та математична постановка задачі

Розглянемо багатошарову основу, що являє собою пакет з  $n$  необмежених в плані плоско паралельних зчеплених між собою пружних ортотропних шарів, які зчеплені з півпростором, пружним або абсолютно жорстким. Кожен шар вважається однорідним, невагомим, ортотропним та характеризується товщиною  $h$  і пружними константами – коефіцієнтами Пуасона  $\nu$  та модулями Юнга  $E$ . Зовнішнє навантаження основи є таким, що деформація основи є плоскою. Об'ємні навантаження відсутні. Потрібно визначити напруження та переміщення в шарах основи, якщо відомі зовнішні навантаження (перша основна гранична задача).

Нумерацію шарів в основі здійснюємо зверху вниз, починаючи з одиниці, при цьому шар, який лежить на півпросторі, має номер  $n$ , а півпростір  $n + 1$ . Шар з номером 1 будемо називати верхнім, а шар з номером  $n$  - нижнім. Всі величини, що будуть відноситись до шарів основи будемо позначати верхнім або нижнім індексом  $k = \overline{1, n}$  (як правилом нижнім). Наприклад товщину шару з номером  $k$  позначаємо  $h_k$ .

Матеріали шарів та півпростору характеризуються пружними константами – коефіцієнтами Пуасона  $\nu_{ij}^k$  та модулями Юнга  $E_i^k$ , де  $i, j = 1, 2$ ,  $k = \overline{1, n + 1}$ .

Для кожного з шарів та півпростору введемо узгоджені між собою локальні прямокутні декартові системи координат  $O_k X_k Y_k Z_k$  ( $k$  – номер шару). Всі початки локальних систем координат розташовані на одній прямій, що перпендикулярна поверхні основи. Напрям всіх осей  $O_k X_k$  паралельні між собою, як і осі  $O_k Z_k$ . Локальні координатні площини  $O_k X_k Z_k$  співпадають з

верхніми площинами відповідного шару. Для півпростору локальна система вводиться аналогічно (див. рис. 4.1).

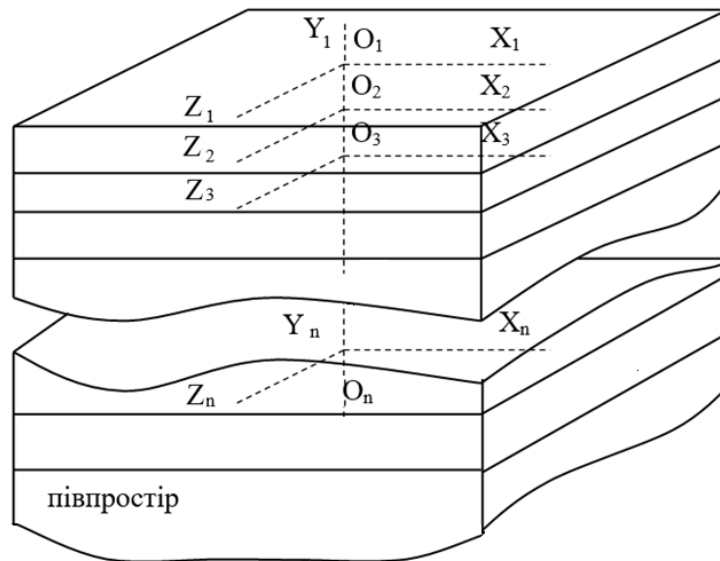


Рисунок 4.1 – Багатошарова основа

Зовнішнє навантаження  $P^1(x, z)$  є таким, що деформація основи та півпростору є плоскою. Вважаємо, що переміщення точок тіла відбуваються паралельно площині  $O_1X_1Y_1$ . Переходимо до двовимірної постановки плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація).

Геометричні області, які займають шари та півпростір:

$$G_k(x_k, y_k) : \{-\infty < x_k < +\infty, -h_k \leq y_k \leq 0\},$$

$$G_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}) : \{-\infty < x_{n+1} < +\infty, -\infty < y_{n+1} \leq 0\}.$$

Для шару  $k$  верхня межа описується:  $-\infty < x_k < +\infty, y_k = 0$ , нижня межа  $y_k = -h_k, -\infty < x_k < +\infty$  (рис. 4.2).

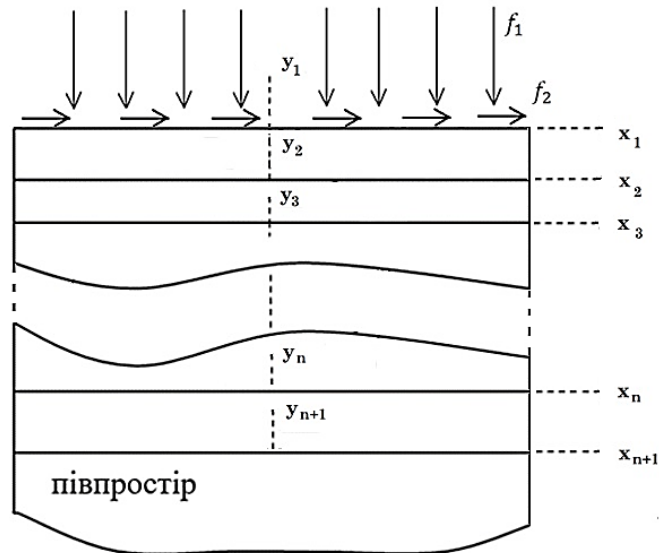


Рисунок 4.2 – Двовимірна постановка задачі для багатошарової основи

Крайові умови:

1) на межі  $y_1 = 0$ :

$$\sigma_y^1(x_1, 0) = f_1(x_1), \quad \tau_{xy}^1(x_1, 0) = f_2(x_1);$$

2) на спільних межах між шарами  $k = \overline{1, n-1}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_y^k(x_k, -h_k) &= \sigma_y^{k+1}(x_{k+1}, 0), & \tau_{xy}^k(x_k, -h_k) &= \tau_{xy}^{k+1}(x_{k+1}, 0), \\ u_x^k(x_k, -h_k) &= u_x^{k+1}(x_{k+1}, 0), & u_y^k(x_k, -h_k) &= u_y^{k+1}(x_{k+1}, 0); \end{aligned}$$

3) на спільній межі нижнього шару та пружної півплощини:

$$\begin{aligned} \sigma_y^n(x_n, -h_n) &= \sigma_y^{n+1}(x_{n+1}, 0), & \tau_{xy}^n(x_n, -h_n) &= \tau_{xy}^{n+1}(x_{n+1}, 0), \\ u_x^n(x_n, -h_n) &= u_x^{n+1}(x_{n+1}, 0), & u_y^n(x_n, -h_n) &= u_y^{n+1}(x_{n+1}, 0); \end{aligned}$$

4) на спільній межі нижнього шару та абсолютно жорсткої півплощини:

$$u_x^n(x_n, -h_n) = 0, \quad u_y^n(x_n, -h_n) = 0;$$

5) умови на нескінченності,  $k = \overline{1, n+1}$ :

$$\lim_{x_k^2 + y_k^2 \rightarrow \infty} \sigma_x^k(x_k, y_k) = 0, \quad \lim_{x_k^2 + y_k^2 \rightarrow \infty} \sigma_y^k(x_k, y_k) = 0, \quad \lim_{x_k^2 + y_k^2 \rightarrow \infty} \tau_{xy}^k(x_k, y_k) = 0.$$

Потрібно визначити напруження  $\sigma_x^k(x, y), \sigma_y^k(x, y), \tau_{xy}^k(x, y), k = \overline{1, n}$  та переміщення  $u_x^k(x, y), u_y^k(x, y), k = \overline{1, n}$  в довільній точці основи.

#### 4.2. Загальна схема розв'язання задачі

Розв'язок поставленої задачі шукається в просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є (2.1) аналогічно описаному в розділі 2. При цьому всі основні рівняння задачі та граничні умови піддаються прямому перетворенню одновимірного інтегрального перетворення Фур'є.

Схематика розв'язання (в просторі трансформант Фур'є) основних граничних задач для багат шарових основ з ортотропними шарами:

- 1) Для кожного шару основи знаходиться вид трансформанти функції напружень та відповідні їм трансформанти напружень та переміщень;
- 2) Із граничних умов на верхній межі першого шару основи визначаються дві з чотирьох допоміжних функцій  $\alpha_1(\xi), \delta_1(\xi), \beta_1(\xi), \gamma_1(\xi)$ ;
- 3) З умов контакту (зчеплення) між шарами будуються рекурентні співвідношення між допоміжними функціями шарів, функціями податливості шарів;
- 4) Із умов на нижній межі основи з використанням рекурентних співвідношень між допоміжними функціями знаходяться дві інших допоміжних функцій першого шару;

- 5) За рекурентними співвідношення знаходяться  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$  потрібного  $k$ -го шару;
- 6) Знаходяться трансформанти напружень та переміщень  $k$ -го шару основи;
- 7) До отриманих трансформант напружень та переміщень шарів застосовується зворотне інтегральне перетворення Фур'є;
- 8) Перевірка адекватності отриманих результатів.

Зауважимо, що для кожного шару будується свій розв'язок, основою якого виступає функція напружень, яка в свою чергу є розв'язком бігармонічного рівняння (2.14). Наприклад для шару з номером  $k$  бігармонічне рівняння має вигляд:

$$A_2^k \xi^4 \cdot \overline{\varphi}_k - 2A_3^k \xi^2 \cdot \frac{d^2 \overline{\varphi}_k}{dy^2} + A_1^k \cdot \frac{d^4 \overline{\varphi}_k}{dy^4} = 0,$$

де  $A_1^k = c_{11}^k$ ,  $A_2^k = c_{22}^k$ ,  $A_3^k = \frac{1}{2} c_{33}^k - c_{12}^k$ .

Домовимось в наведених нижче формулах розуміти, що вони відносяться до шару з номером  $k$  і не писати індекс  $k$ . Там де буде потрібно повернемося до індексації.

Спираючись на результати розділу 2 трансформанти функції напружень шару можуть приймати один з трьох можливих видів  $\overline{\varphi}_i(\xi, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

- 1)  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} > 1$ , трансформанта функції напруження має вигляд (2.26):

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_1(\xi, y) = & \left( C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \cos(ry\sqrt{a_2}) \\ & + \left( D \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) \right) \cdot \sin(ry\sqrt{a_2}), \end{aligned}$$

$$\text{де } \sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_3^2}} + 1 \right)}, \quad \sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_3^2}} - 1 \right)}.$$

2)  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ , трансформанта функції напруження має вигляд (2.34):

$$\overline{\varphi}_2(\xi, y) = A \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + B\sqrt{a}y \operatorname{sh}(ry\sqrt{a}) + C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}) + D\sqrt{a}y \operatorname{ch}(ry\sqrt{a}),$$

$$\text{де } \sqrt{a} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}.$$

3)  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1$ , трансформанта функції напруження має вигляд (2.42):

$$\overline{\varphi}_3(\xi, y) = A \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_1}) + B \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_1}) + C \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_2}) + D \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_2}),$$

$$\text{де } \sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}, \quad \sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}.$$

В цих формулах  $r = |\xi|$ ,  $A = A(\xi)$ ,  $B = B(\xi)$ ,  $C = C(\xi)$ ,  $D = D(\xi)$  – невідомі функції параметру інтегрування  $\xi$ .

В загальному випадку кожний шар основи має свої пружні характеристики, які визначають вигляд функції напружень.

Розглянемо випадок, коли всі шари основи мають однаковий вид функції напружень і відповідає випадку з дійсними кратними коренями.

Запишемо трансформанту функції напружень шару та півплощини  $\overline{\varphi}_{2k}(\xi, y)$ ,  $k = \overline{1, n+1}$ . Де шар, який лежить на півпросторі має номер  $n$ , а півпростір  $n+1$ .

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_{2k}(\xi, y) = & A_{2k}(\xi) \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_k}) + B_{2k}(\xi)\sqrt{a_k}y \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_k}) \\ & + C_{2k}(\xi) \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_k}) + D_{2k}(\xi)\sqrt{a_k}y \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_k}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

де  $r = |\xi|$ ,  $\sqrt{a_j} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$ ,  $A_{2k}$ ,  $B_{2k}$ ,  $C_{2k}$ ,  $D_{2k}$  – функції параметра  $\xi$  шару з номером  $k$ ,  $k = \overline{1, n+1}$ .

Для знаходження трансформант напружень, підставимо трансформанту (4.1) в вираз (2.23) і отримаємо:

$$\begin{aligned}\overline{\sigma_x^k}(\xi, y) &= (D_{2k}\sqrt{a_k}ry + rC_{2k} + 2B_{2k}) \cdot a_k r \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_k}) \\ &+ (A_{2k}r + B_{2k}ry\sqrt{a_k} + 2D_{2k}) \cdot a_k r \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_k}), \\ \overline{\sigma_y^k}(\xi, y) &= -\xi^2 \left( (A_{2k} + B_{2k}\sqrt{a_k}y)\operatorname{sh}(ry\sqrt{a_k}) - (C_{2k} + D_{2k}\sqrt{a_k}y)\operatorname{ch}(ry\sqrt{a_k}) \right) \\ \overline{\tau_{xy}^k}(\xi, y) &= i\xi \left( (A_{2k}r + D_{2k})\sqrt{a_k} + B_{2k}a_k ry \right) \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_k}) \\ &+ i\xi \left( (B_{2k} + C_{2k}r)\sqrt{a_k} + D_{2k}a_k ry \right) \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_k}).\end{aligned}\quad (4.2)$$

Аналогічно підставивши (4.1) у формули (2.23), (2.24), (2.25) знайдемо переміщення:

$$\begin{aligned}\overline{u_x^k}(\xi, y) &= (D_{2k}\sqrt{a_k}ry \cdot (a_k c_{k11} + c_{k12}) + a_k c_{k11} r C_{2k} + 2a_k c_{k11} B_{2k} \\ &+ C_{2k} c_{k12} r) \cdot \frac{ir \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_k})}{\xi} + \frac{ir \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_k})}{\xi} \\ &\cdot (B_{2k}\sqrt{a_k}ry(a_k c_{k11} + c_{k12}) + a_k c_{k11}(rC_{2k} + 2B_{2k}) + A_{2k}c_{k12}r), \\ \overline{u_y^k}(\xi, y) &= (a_k\sqrt{a_k}c_{k11}(A_{2k}r + 3D_{2k}) - \sqrt{a_k}(c_{k33} - c_{k12})(A_{2k}r + D_{2k}) \\ &- a_k B_{2k}ry(c_{k33} - c_{k12} - a_k c_{k11})) \cdot \operatorname{ch}(ry\sqrt{a_k}) + \operatorname{sh}(ry\sqrt{a_k}) \\ &\cdot (a_k\sqrt{a_k}c_{k11}(C_{2k}r + 3B_{2k}) - \sqrt{a_k}(c_{k33} - c_{k12})(C_{2k}r + B_{2k}) \\ &- D_{2k}rya_k(c_{k33} - c_{k12} - a_k c_{k11})).\end{aligned}\quad (4.3)$$

Крайові умови в просторі трансформант набувають вигляду:

1) на межі  $y_1 = 0$ :

$$\overline{\sigma}_y^1(\xi, 0) = \overline{f}_1(\xi), \quad \overline{\tau}_{xy}^1(\xi, 0) = \overline{f}_2(\xi);$$

2) на спільних межах між шарами  $k = \overline{1, n-1}$ :

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_y^k(\xi, -h_k) &= \overline{\sigma}_y^{k+1}(\xi, 0), & \overline{\tau}_{xy}^k(\xi, -h_k) &= \overline{\tau}_{xy}^{k+1}(\xi, 0), \\ \overline{u}_x^k(\xi, -h_k) &= \overline{u}_x^{k+1}(\xi, 0), & \overline{u}_y^k(\xi, -h_k) &= \overline{u}_y^{k+1}(\xi, 0); \end{aligned}$$

3) на спільній межі нижнього шару основи та пружної півплощини:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_y^n(\xi, -h_n) &= \overline{\sigma}_y^{n+1}(\xi, 0), & \overline{\tau}_{xy}^n(\xi, -h_n) &= \overline{\tau}_{xy}^{n+1}(\xi, 0), \\ \overline{u}_x^n(\xi, -h_n) &= \overline{u}_x^{n+1}(\xi, 0), & \overline{u}_y^n(\xi, -h_n) &= \overline{u}_y^{n+1}(\xi, 0); \end{aligned}$$

4) на спільній межі нижнього шару основи та абсолютно жорсткої півплощини:

$$\overline{u}_x^n(\xi, -h_n) = 0, \quad \overline{u}_y^n(\xi, -h_n) = 0;$$

5) умови на нескінченності,  $k = \overline{1, n+1}$ :

$$\lim_{y_k^2 \rightarrow \infty} \overline{\sigma}_x^k(\xi, y_k) = 0, \quad \lim_{y_k^2 \rightarrow \infty} \overline{\sigma}_y^k(\xi, y_k) = 0, \quad \lim_{y_k^2 \rightarrow \infty} \overline{\tau}_{xy}^k(\xi, y_k) = 0.$$

Підставимо трансформанти напружень (4.2) і переміщень (4.3) в крайові умови, отримаємо:

1) на межі  $y_1 = 0$ :

$$-\xi^2 C_{21} = \overline{f}_1(\xi), \quad i\xi\sqrt{a_1}(rA_{21} + D_{21}) = \overline{f}_2(\xi);$$

2) на спільних межах між шарами  $k = \overline{1, n-1}$ :

$$\begin{aligned}
& (D_{2k}\sqrt{a_k}h_k - C_{2k})ch(rh_k\sqrt{a_k}) - (B_{2k}\sqrt{a_k}h_k - A_{2k})sh(rh_k\sqrt{a_k}) = -C_{2(k+1)}; \\
& \quad ch(rh_k\sqrt{a_k}) \cdot \left( (rA_{2k} + D_{2k})\sqrt{a_k} - B_{2k}a_krh_k \right) - sh(rh_k\sqrt{a_k}) \\
& \quad \cdot \left( (rC_{2k} + B_{2k})\sqrt{a_k} - D_{2k}a_krh_k \right) = \sqrt{a_{k+1}}(rA_{2(k+1)} + D_{2(k+1)}); \\
& \left( rC_{2k}c_{k12} + a_kc_{k11}(rC_{2k} + 2B_{2k}) - rD_{2k}\sqrt{a_k}h_k(a_kc_{k11} + c_{k12}) \right)rch(rh_k\sqrt{a_k}) \\
& \quad + \left( rB_{2k}\sqrt{a_k}h_k(a_kc_{k11} + c_{k12}) - a_kc_{k11}(rA_{2k} + 2D_{2k}) \right. \\
& \quad \left. - rA_{2k}c_{k12} \right) \cdot rsh(rh_k\sqrt{a_k}) \\
& \quad = r^2C_{2(k+1)}(c_{(k+1)12} + a_{(k+1)}c_{(k+1)11}) + 2rB_{2(k+1)}a_{(k+1)}c_{(k+1)11}; \\
& \left( rC_{2k}c_{k12} + a_kc_{k11}(rC_{2k} + 2B_{2k}) - rD_{2k}\sqrt{a_k}h_k(a_kc_{k11} + c_{k12}) \right)rch(rh_k\sqrt{a_k}) \\
& \quad + \left( rB_{2k}\sqrt{a_k}h_k(a_kc_{k11} + c_{k12}) - a_kc_{k11}(rA_{2k} + 2D_{2k}) \right. \\
& \quad \left. - rA_{2k}c_{k12} \right) \cdot rsh(rh_k\sqrt{a_k}) \\
& \quad = r^2C_{2(k+1)}c_{(k+1)12} + a_{(k+1)}rc_{(k+1)11}(rC_{2(k+1)} + 2B_{2(k+1)});
\end{aligned}$$

3) на спільній межі нижнього шару та пружної півплощини:

$$\begin{aligned}
& (D_{2n}\sqrt{a_n}h_n - C_{2n})ch(rh_n\sqrt{a_n}) - (B_{2n}\sqrt{a_n}h_n - A_{2n})sh(rh_n\sqrt{a_n}) = -C_{2(n+1)}; \\
& \quad ch(rh_n\sqrt{a_n}) \cdot \left( (rA_{2n} + D_{2n})\sqrt{a_n} - rB_{2n}a_nh_n \right) - sh(rh_n\sqrt{a_n}) \\
& \quad \cdot \left( (rC_{2n} + B_{2n})\sqrt{a_n} - rD_{2n}a_nh_n \right) = \sqrt{a_{(n+1)}}(rA_{2(n+1)} + D_{2(n+1)}); \\
& \left( rC_{2n}c_{n12} + a_nc_{n11}(rC_{2n} + 2B_{2n}) - rD_{2n}\sqrt{a_n}h_n(a_nc_{n11} + c_{n12}) \right)rch(rh_n\sqrt{a_n}) \\
& \quad + \left( rB_{2n}\sqrt{a_n}h_n(a_nc_{n11} + c_{n12}) - a_nc_{n11}(rA_{2n} + 2D_{2n}) \right. \\
& \quad \left. - rA_{2n}c_{n12} \right) \cdot rsh(rh_n\sqrt{a_n}) \\
& \quad = r^2C_{2(n+1)}(c_{(n+1)12} + a_{(n+1)}c_{(n+1)11}) + 2rB_{2(n+1)}a_{(n+1)}c_{(n+1)11};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( rC_{2n}c_{n12} + a_n c_{n11} (rC_{2n} + 2B_{2n}) - rD_{2n} \sqrt{a_n} h_n (a_n c_{n11} + c_{n12}) \right) \\
& \quad \cdot rch(rh_n \sqrt{a_n}) + rsh(rh_n \sqrt{a_n}) \\
& \quad \cdot \left( rB_{2k} \sqrt{a_n} h_n (a_n c_{n11} + c_{n12}) - a_n c_{n11} (rA_{2n} + 2D_{2n}) - rA_{2n} c_{n12} \right) \\
& = r^2 C_{2(n+1)} c_{(n+1)12} + a_{(n+1)} r c_{(n+1)11} (rC_{2(n+1)} + 2B_{2(n+1)});
\end{aligned}$$

4) на спільній межі нижнього шару та абсолютно жорсткої півплощини:

$$\begin{aligned}
& \left( rC_{2n}c_{n12} + a_n c_{n11} (rC_{2n} + 2B_{2n}) - rD_{2n} \sqrt{a_n} h_n (a_n c_{n11} + c_{n12}) \right) rch(rh_n \sqrt{a_n}) \\
& \quad + \left( rB_{2n} \sqrt{a_n} h_n (a_n c_{n11} + c_{n12}) - a_n c_{n11} (rA_{2n} + 2D_{2n}) \right. \\
& \quad \left. - rA_{2n} c_{n12} \right) \cdot rsh(rh_n \sqrt{a_n}) = 0; \\
& \left( rC_{2n}c_{n12} + a_n c_{n11} (rC_{2n} + 2B_{2n}) - rD_{2n} \sqrt{a_n} h_n (a_n c_{n11} + c_{n12}) \right) ch(rh_n \sqrt{a_n}) \\
& \quad + \left( rB_{2k} \sqrt{a_n} h_n (a_n c_{n11} + c_{n12}) - a_n c_{n11} (rA_{2n} + 2D_{2n}) \right. \\
& \quad \left. - rA_{2n} c_{n12} \right) \cdot sh(rh_n \sqrt{a_n}) = 0.
\end{aligned}$$

Як і для випадку ізотропного матеріалу, описаного в роботах [64, 65] введемо в розгляд для кожного шару допоміжні функції  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$ , які пов'язані з умовами на межі  $y_k = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

$$\begin{aligned}
\alpha_k(\xi) &= \overline{\sigma_y^k} \Big|_{y=0}, & \delta_k(\xi) &= -\frac{i\xi}{r\sqrt{a_k}} \cdot \overline{\tau_{xy}^k} \Big|_{y=0}, \\
\beta_k(\xi) &= \frac{r}{\sqrt{a_k}} \cdot \overline{u_y^k} \Big|_{y=0}, & \gamma_k(\xi) &= -i\xi \cdot \overline{u_x^k} \Big|_{y=0}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Враховуючи формули (4.2), (4.3) маємо:

$$\begin{aligned}
\delta_k(\xi) &= r(rA_{2k} + D_{2k}), \quad \beta_k(\xi) = 2rD_{2k}a_k c_{k11} + (a_k c_{k11} + c_{k12} - c_{k33})\delta_k(\xi), \\
\alpha_k(\xi) &= -\xi^2 C_{2k}, \quad \gamma_k(\xi) = (a_k c_{k11} + c_{k12}) \cdot \alpha_k(\xi) + 2rB_{2k}a_k c_{k11}.
\end{aligned}$$

Виразимо  $A_{2k}$ ,  $B_{2k}$ ,  $C_{2k}$ ,  $D_{2k}$  через  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$  та підставимо у трансформанти напружень і переміщень:

$$\begin{aligned} A_{2k} &= \frac{\delta_k(3a_k c_{k11} + c_{k12} - c_{k33}) - \beta_k}{2r^2 a_k c_{k11}}, & B_{2k} &= \frac{\gamma_k - \alpha_k(a_k c_{k11} + c_{k12})}{2r a_k c_{k11}}, \\ C_{2k} &= -\frac{\alpha_k}{r^2}, & D_{2k} &= \frac{\beta_k - \delta_k(a_k c_{k11} + c_{k12} - c_{k33})}{2r a_k c_{k11}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Тепер підставимо отримані вирази у трансформанти напружень (4.2):

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_x^k(\xi, y) &= (-a_k \sqrt{a_k} c_{k11} \delta_k r y - \sqrt{a_k} c_{k12} \delta_k r y + \sqrt{a_k} c_{k33} \delta_k r y + \sqrt{a_k} \beta_k r y \\ &\quad - 4a_k c_{k11} \alpha_k - 2c_{k12} \alpha_k + 2\gamma_k) \cdot \frac{ch(ry \sqrt{a_k})}{2c_{k11}} + \frac{sh(ry \sqrt{a_k})}{2c_{k11}} \\ &\quad \cdot (-a_k \sqrt{a_k} c_{k11} \alpha_k r y - \sqrt{a_k} c_{k12} \alpha_k r y + \sqrt{a_k} \gamma_k r y + a_k c_{k11} \delta_k \\ &\quad - c_{k12} \delta_k + c_{k33} \delta_k + \beta_k), \\ \overline{\sigma}_y^k(\xi, y) &= (-3a_k c_{k11} \delta_k - c_{k12} \delta_k + c_{k33} \delta_k + a_k \sqrt{a_k} c_{k11} \alpha_k r y + \sqrt{a_k} c_{k12} \alpha_k r y \\ &\quad - \sqrt{a_k} \gamma_k r y + \beta_k) \cdot \frac{sh(ry \sqrt{a_k})}{2a_k c_{k11}} + \frac{ch(ry \sqrt{a_k})}{2\sqrt{a_k} c_{k11}} \cdot (2\sqrt{a_k} c_{k11} \alpha_k \\ &\quad + a_k c_{k11} \delta_k r y + c_{k12} \delta_k r y - c_{k33} \delta_k r y - \beta_k r y), \\ \overline{\tau}_{xy}^k(\xi, y) &= (-a_k \sqrt{a_k} c_{k11} \delta_k r y - \sqrt{a_k} c_{k12} \delta_k r y + \sqrt{a_k} c_{k33} \delta_k r y + \sqrt{a_k} \beta_k r y \\ &\quad - 3a_k c_{k11} \alpha_k - c_{k12} \alpha_k + \gamma_k) \cdot \frac{i\xi \cdot sh(ry \sqrt{a_k})}{2\sqrt{a_k} c_{k11} r} - \frac{i\xi \cdot ch(ry \sqrt{a_k})}{2\sqrt{a_k} c_{k11} r} \\ &\quad \cdot (a_k \sqrt{a_k} c_{k11} \alpha_k r y + \sqrt{a_k} c_{k12} \alpha_k r y - \sqrt{a_k} \gamma_k r y - 2a_k c_{k11} \delta_k). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Аналогічно підставимо вирази (4.5) у трансформанти переміщень (4.3).

$$\begin{aligned}
\overline{u}_x^k(\xi, y) &= \left( a_k c_{k11} (2c_{k12} \delta_k + c_{k33} \delta_k + \beta_k) + a_k^2 c_{k11}^2 \delta_k + c_{k12} \right. \\
&\quad \cdot (c_{k12} \delta_k - c_{k33} \delta_k - \beta_k) + \sqrt{a_k} r y \cdot (a_k c_{k11} + c_{k12}) \\
&\quad \cdot (\gamma_k - a_k c_{k11} \alpha_k - c_{k12} \alpha_k) \left. \right) \cdot \frac{i \cdot \operatorname{sh}(r y \sqrt{a_k})}{2 a_k \xi c_{k11}} \\
&\quad - \left( r y \cdot (a_k c_{k11} + c_{k12}) \cdot (a_k c_{k11} \delta_k + c_{k12} \delta_k - c_{k33} \delta_k - \beta_k) \right. \\
&\quad \left. + 4 a_k \sqrt{a_k} c_{k11}^2 \alpha_k - 2 \sqrt{a_k} c_{k11} (\gamma_k - 2 c_{k12} \alpha_k) \right) \cdot \frac{i \cdot \operatorname{ch}(r y \sqrt{a_k})}{2 \sqrt{a_k} \xi c_{k11}}, \\
\overline{u}_y^k(\xi, y) &= \left( -a_k c_{k11} r y (2c_{k12} \delta_k - 2c_{k33} \delta_k - \beta_k) - a_k^2 c_{k11}^2 \delta_k r y - (c_{k12} - c_{k33}) \right. \\
&\quad \cdot (c_{k12} \delta_k - c_{k33} \delta_k - \beta_k) r y - 5 a_k \sqrt{a_k} c_{k11}^2 \alpha_k + (c_{k12} - c_{k33}) \\
&\quad \cdot (\gamma_k - c_{k12} \alpha_k) + 3 \sqrt{a_k} c_{k11} (\gamma_k - 2 c_{k12} \alpha_k + c_{k33} \alpha_k) \left. \right) \cdot \frac{\operatorname{sh}(r y \sqrt{a_k})}{2 r c_{k11}} \\
&\quad + \left( a_k c_{k11} r y \cdot (\gamma_k - 2 c_{k12} \alpha_k + c_{k33} \alpha_k) - a_k^2 c_{k11}^2 \alpha_k r y + r y \right. \\
&\quad \left. \cdot (c_{k12} - c_{k33}) \cdot (\gamma_k - c_{k12} \alpha_k) + 2 \sqrt{a_k} c_{k11} \beta_k \right) \cdot \frac{\operatorname{ch}(r y \sqrt{a_k})}{2 r c_{k11}}. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

З умов на спільних межах між шарами отримаємо рекурентні співвідношення, що виражають всі функції  $\alpha_{k+1}(\xi)$ ,  $\delta_{k+1}(\xi)$ ,  $\beta_{k+1}(\xi)$ ,  $\gamma_{k+1}(\xi)$  через функції попереднього шару  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$ .

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= \frac{\alpha_k}{2 \sqrt{a_k} c_{k11}} \cdot \left( r_k \Delta_{1k} \operatorname{sh}(r_k \sqrt{a_k}) + 2 \sqrt{a_k} c_{k11} \operatorname{ch}(r_k \sqrt{a_k}) \right) - \frac{\beta_k}{2 a_k \sqrt{a_k} c_{k11}} \\
&\quad \cdot \left( \sqrt{a_k} \operatorname{sh}(r_k \sqrt{a_k}) - a_k r_k \operatorname{ch}(r_k \sqrt{a_k}) \right) - \frac{\gamma_k}{2 \sqrt{a_k} c_{k11}} \cdot r_k \operatorname{sh}(r_k \sqrt{a_k}) \\
&\quad + \frac{\delta_k}{2 a_k c_{k11}} \cdot \left( (2 a_k c_{k11} + \Delta_{2k}) \operatorname{sh}(r_k \sqrt{a_k}) - \sqrt{a_k} r_k \Delta_{2k} \operatorname{ch}(r_k \sqrt{a_k}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{k+1} &= \frac{\alpha_k}{2\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k+1}}c_{k11}} \cdot \left( (2a_k c_{k11} + \Delta_{1k}) sh(r_k \sqrt{a_k}) + r_k \sqrt{a_k} \Delta_{1k} ch(r_k \sqrt{a_k}) \right) \\
&\quad + \frac{\beta_k r_k \cdot sh(r_k \sqrt{a_k})}{2\sqrt{a_{k+1}}c_{k11}} - \frac{\gamma_k \cdot \left( sh(r_k \sqrt{a_k}) + r_k \sqrt{a_k} ch(r_k \sqrt{a_k}) \right)}{2\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k+1}}c_{k11}} \\
&\quad - \frac{\delta_k \cdot \left( r_k \sqrt{a_k} \Delta_{2k} sh(r_k \sqrt{a_k}) - 2a_k c_{k11} ch(r_k \sqrt{a_k}) \right)}{2\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k+1}}c_{k11}}, \\
\beta_{k+1} &= \frac{\alpha_k \cdot \left( c_{k12}(5a_k c_{k11} + \Delta_{2k}) + a_k c_{k11}(5a_k c_{k11} - 3c_{k33}) \right) \cdot sh(r_k \sqrt{a_k})}{2\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k+1}}c_{k11}} \\
&\quad + \frac{\alpha_k \cdot r_k \Delta_{1k} \Delta_{2k} ch(r_k \sqrt{a_k})}{2\sqrt{a_{k+1}}c_{k11}} - \frac{\delta_k \cdot \left( r_k \Delta_{2k}^2 sh(r_k \sqrt{a_k}) \right)}{2\sqrt{a_{k+1}}c_{k11}} \\
&\quad + \frac{\beta_k \cdot \left( r_k \sqrt{a_k} \Delta_{2k} sh(r_k \sqrt{a_k}) + 2a_k c_{k11} ch(r_k \sqrt{a_k}) \right)}{2\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k+1}}c_{k11}} \\
&\quad - \frac{\gamma_k \cdot \left( (2a_k c_{k11} + \Delta_{2k}) sh(r_k \sqrt{a_k}) + r_k \sqrt{a_k} \Delta_{2k} ch(r_k \sqrt{a_k}) \right)}{2\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k+1}}c_{k11}}, \\
\gamma_{k+1} &= - \frac{\alpha_k \left( r_k \Delta_{1k}^2 sh(r_k \sqrt{a_k}) + 4\sqrt{a_k} c_{k11} \Delta_{1k} ch(r_k \sqrt{a_k}) \right)}{2\sqrt{a_k} c_{k11}} \\
&\quad - \frac{\beta_k \cdot \left( \sqrt{a_k} (a_k c_{k11} - c_{k12}) \cdot sh(r_k \sqrt{a_k}) + r_k a_k \Delta_{1k} \cdot ch(r_k \sqrt{a_k}) \right)}{2a_k \sqrt{a_k} c_{k11}} \\
&\quad + \frac{\gamma_k \cdot \left( r_k \Delta_{1k} sh(r_k \sqrt{a_k}) + 2\sqrt{a_k} c_{k11} ch(r_k \sqrt{a_k}) \right)}{2\sqrt{a_k} c_{k11}} \\
&\quad - \frac{\delta_k \cdot \left( c_{k12} \Delta_{2k} + a_k c_{k11} (a_k c_{k11} + c_{k12} + c_{k33}) \right) sh(r_k \sqrt{a_k})}{2a_k c_{k11}} \\
&\quad + \frac{\delta_k \cdot r_k \Delta_{1k} \Delta_{2k} ch(r_k \sqrt{a_k})}{2\sqrt{a_k} c_{k11}}, \tag{4.8}
\end{aligned}$$

де  $r_k = rh_k$ ,  $\Delta_{1k} = a_k c_{k11} + c_{k12}$ ,  $\Delta_{2k} = a_k c_{k11} + c_{k12} - c_{k33}$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ .

З умов на спільній межі нижнього шару з номером  $n$  та жорсткої півплощини маємо рівність нулю переміщень та їх трансформант. Тобто маємо

систему двох лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих функцій  $\alpha_n(\xi)$ ,  $\delta_n(\xi)$ ,  $\beta_n(\xi)$ ,  $\gamma_n(\xi)$ :

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_n(\xi) + a_{12}\beta_n(\xi) + a_{13}\gamma_n(\xi) + a_{14}\delta_n(\xi) &= 0, \\ a_{21}\alpha_n(\xi) + a_{22}\beta_n(\xi) + a_{23}\gamma_n(\xi) + a_{24}\delta_n(\xi) &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

де  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, j = \overline{1, 4}$  – відповідні коефіцієнти в  $\overline{u}_x^n(\xi, -h_n)$ ,  $\overline{u}_y^n(\xi, -h_n)$  при  $\alpha_n(\xi)$ ,  $\delta_n(\xi)$ ,  $\beta_n(\xi)$ ,  $\gamma_n(\xi)$ .

Якщо розв'язати систему (4.9) можемо виразити дві із функцій  $\alpha_n(\xi)$ ,  $\delta_n(\xi)$ ,  $\beta_n(\xi)$ ,  $\gamma_n(\xi)$  через дві інші. Для першої основної граничної задачі виражаємо  $\beta_n(\xi)$ ,  $\gamma_n(\xi)$  через  $\alpha_n(\xi)$ ,  $\delta_n(\xi)$ , а для другої –  $\alpha_n(\xi)$ ,  $\delta_n(\xi)$  через  $\beta_n(\xi)$ ,  $\gamma_n(\xi)$ . Для змішаної задачі визначаємось із умов на верхній межі основи. Продемонструємо на прикладі першої основної задачі. Виразимо з рівнянь (4.9) дві функції  $\beta_n(\xi)$ ,  $\gamma_n(\xi)$ :

$$\beta_n(\xi) = A_n\alpha_n + A_{\tau n}\delta_n, \quad \gamma_n(\xi) = B_n\alpha_n + B_{\tau n}\delta_n, \quad (4.10)$$

де  $A_n$ ,  $A_{\tau n}$ ,  $B_n$ ,  $B_{\tau n}$  – функції податливості [64], які записуються формулами:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}, & A_{\tau n} &= \frac{a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}, \\ B_n &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}, & B_{\tau n} &= \frac{a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Замінімо в (4.9) функції  $\alpha_n(\xi)$ ,  $\delta_n(\xi)$ ,  $\beta_n(\xi)$ ,  $\gamma_n(\xi)$  рекурентними співвідношеннями (4.8). В результаті система (4.9) прийме вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}\alpha_{n-1}(\xi) + \tilde{a}_{12}\beta_{n-1}(\xi) + \tilde{a}_{13}\gamma_{n-1}(\xi) + \tilde{a}_{14}\delta_{n-1}(\xi) &= 0, \\ \tilde{a}_{21}\alpha_{n-1}(\xi) + \tilde{a}_{22}\beta_{n-1}(\xi) + \tilde{a}_{23}\gamma_{n-1}(\xi) + \tilde{a}_{24}\delta_{n-1}(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

Тут  $\tilde{a}_{ij}, i = 1, 2, j = \overline{1, 4}$  – коефіцієнти, що утворились у (4.9) після підстановки та приведення подібних доданків.

Аналогічно для всіх інших шарів. Тобто кожному шару з номером  $k, k < n$  можна поставити у відповідність систему виду

$$\begin{aligned} a_{11}^k \alpha_k(\xi) + a_{12}^k \beta_k(\xi) + a_{13}^k \gamma_k(\xi) + a_{14}^k \delta_k(\xi) &= 0, \\ a_{21}^k \alpha_k(\xi) + a_{22}^k \beta_k(\xi) + a_{23}^k \gamma_k(\xi) + a_{24}^k \delta_k(\xi) &= 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

де  $a_{ij}^k, i = 1, 2, j = \overline{1, 4}$  – коефіцієнти при  $\alpha_k(\xi), \delta_k(\xi), \beta_k(\xi), \gamma_k(\xi), k = \overline{1, n-1}$ .

Виразимо із системи (4.12) дві функції  $\beta_k(\xi), \gamma_k(\xi)$  через дві інші:

$$\beta_k(\xi) = A_k(r) \alpha_k + A_{\tau k}(r) \delta_k, \quad \gamma_k(\xi) = B_k(r) \alpha_k + B_{\tau k}(r) \delta_k, \quad (4.13)$$

де  $A_k(r), A_{\tau k}(r), B_k(r), B_{\tau k}(r)$  – функції податливості, що визначаються формулами (4.14)

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{a_{13}^k a_{21}^k - a_{11}^k a_{23}^k}{a_{12}^k a_{23}^k - a_{13}^k a_{22}^k}, & A_{\tau k} &= \frac{a_{13}^k a_{24}^k - a_{14}^k a_{23}^k}{a_{12}^k a_{23}^k - a_{13}^k a_{22}^k}, \\ B_k &= \frac{a_{11}^k a_{22}^k - a_{12}^k a_{21}^k}{a_{12}^k a_{23}^k - a_{13}^k a_{22}^k}, & B_{\tau k} &= \frac{a_{14}^k a_{22}^k - a_{12}^k a_{24}^k}{a_{12}^k a_{23}^k - a_{13}^k a_{22}^k}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Зауважимо, що функції податливості  $A_k(r), A_{\tau k}(r), B_k(r), B_{\tau k}(r)$  є дробово-раціональними виразами які виражаються через коефіцієнти  $a_{ij}^k, i = 1, 2, j = \overline{1, 4}, k = \overline{1, n}$ . У свою чергу ці коефіцієнти  $a_{ij}^k$  не залежать від  $\alpha_k, \delta_k, \beta_k, \gamma_k$ , не залежать від характеру навантаження шарів основи, а залежать від модулів пружності, товщин шарів  $h_k, h_{k+1}, \dots, h_n$  та  $r = |\xi|$  і можуть бути визначені до початку розв'язку задачі.

З граничних умов на верхній межі основи знаходимо трансформанти двох відомих функцій  $\alpha_1(\xi)$  і  $\delta_1(\xi)$  (перша гранична задача), або  $\beta_1(\xi)$ ,  $\gamma_1(\xi)$  (друга гранична задача). Підставивши їх у формули (4.12) отримаємо дві інші, для першої основної задачі маємо (4.13), а для другої основної задачі отримаємо

$$\alpha_1(\xi) = \tilde{A}_1(r)\beta_1 + \tilde{A}_{\tau 1}(r)\gamma_1, \quad \delta_1(\xi) = \tilde{B}_1(r)\beta_1 + \tilde{B}_{\tau 1}(r)\gamma_1. \quad (4.15)$$

Знайдену четвірку підставляємо в рекурентні формули (4.8) і знаходимо  $\alpha_k$ ,  $\delta_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  для шару з номером  $k = \overline{1, n}$ .

Дослідимо функції податливості, що входять у формули (4.13).

### 4.3. Дослідження функції податливості для багат шарової ортотропної основи

Знаходження функцій податливості значно спрощує розв'язання граничних задач для багат шарової ортотропної основи. Ці математичні формули допомагають скоротити кількість функцій, що визначають НДС в кожному шарі тіла, виражаючи дві функції  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  з чотирьох невідомих, через інші дві  $\alpha_k$ ,  $\delta_k$  (перша основна гранична задача).

При чисельній реалізації розв'язків задач для багат шарових основ виникають проблеми в точності розрахунків, тому слушно розрахункові формули для функцій податливості (4.14) та (4.13) привести до виду зручного для обчислення на ЕОМ. Для цього нам потрібно оцінити порядок чисельників та знаменників розрахункових дробів.

Продемонструємо це на прикладі формул для функцій  $\beta_n(\xi)$ ,  $\gamma_n(\xi)$ .

$$\beta_n = \frac{1}{\Delta_n} \left( - (a_n^2 c_{n11}^2 + a_n c_{n11} (2c_{n12} + c_{n33}) + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) \right. \\ \cdot (3a_n c_{n11} + c_{n12} - c_{n33}) \cdot \delta_n \cdot C^2 - 2a_n c_{n11} \\ \cdot (a_n^2 c_{n11}^2 + a_n c_{n11} (2c_{n12} + c_{n33}) + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) \cdot \alpha_n S C \\ - 2r_n \cdot a_n \sqrt{a_n} c_{n11} c_{n12} (c_{n12} - c_{n33}) \cdot \alpha_n \\ - 2r_n a_n^2 \sqrt{a_n} c_{n11}^2 (2c_{n12} - c_{n33}) \cdot \alpha_n - 2r_n a_n^3 \sqrt{a_n} c_{n11}^3 \cdot \alpha_n \\ + ((a_n^4 r_n^2 + 3a_n^3) \cdot c_{n11}^3 + (r_n^2 a_n (3c_{n12} - 2c_{n33}) + 7c_{n12} + 2c_{n33}) \\ \cdot a_n^2 c_{n11}^2 + (r_n^2 a_n (3c_{n12} - c_{n33}) + 5c_{n12} + c_{n33}) (c_{n12} - c_{n33}) \\ \cdot a_n c_{n11} + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})^2 (a_n r_n^2 + 1)) \cdot \delta_n \Big),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\Delta_n} \left( - (a_n c_{n11} c_{n12} (5c_{n12} - 2c_{n33}) + a_n^2 c_{n11}^2 (7c_{n12} + 3c_{n33}) + 3a_n^3 c_{n11}^3 \right. \\ + c_{n12}^2 (c_{n12} - c_{n33})) \cdot \alpha_n C^2 - 2c_{n11} \\ \cdot (a_n c_{n12} \cdot (c_{n12} - c_{n33}) + ((2c_{n12} + c_{n33}) a_n^2 + a_n^3 c_{n11}) c_{n11}) \cdot \delta_n \\ \cdot S C + ((5c_{n12} - 2c_{n33}) c_{n11} + r_n^2 c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) a_n c_{n12} \cdot \alpha_n \\ + ((3c_{n33} - c_{n12}) c_{n11} + r_n^2 c_{n12} (3c_{n12} - 2c_{n33})) a_n^2 c_{n11} \cdot \alpha_n \\ + (r_n^2 (3c_{n12} - c_{n33}) - 5c_{n11}) a_n^3 c_{n11}^2 \cdot \alpha_n + a_n^4 c_{n11}^3 r_n^2 \cdot \alpha_n \\ + c_{n12}^2 (c_{n12} - c_{n33}) \cdot \alpha_n + 2r_n a_n \sqrt{a_n} c_{n11} \delta_n (a_n c_{n11} + c_{n12}) \\ \cdot (a_n c_{n11} + c_{n12} - c_{n33}) \Big),$$

$$\Delta_n = \left( (-a_n^2 c_{n11}^2 - a_n c_{n11} (2c_{n12} + c_{n33}) - c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) \cdot C^2 \right. \\ + (a_n^3 r_n^2 - 3a_n^2) \cdot c_{n11}^2 + (r_n^2 a_n (2c_{n12} - c_{n33}) + 2c_{n12} + c_{n33}) \\ \cdot a_n c_{n11} + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33}) (a_n r_n^2 + 1) \Big),$$

$$\text{де } C = ch(r_n \sqrt{a_n}) = \frac{e^{r_n \sqrt{a_n}} \cdot (1 + e^{-2r_n \sqrt{a_n}})}{2}, S = sh(r_n \sqrt{a_n}) = \frac{e^{r_n \sqrt{a_n}} \cdot (1 - e^{-2r_n \sqrt{a_n}})}{2},$$

$$r_n = r h_n.$$

Аналіз дробів у  $\beta_n(\xi), \gamma_n(\xi)$  показує, що ми маємо невизначеності типу  $\frac{\infty}{\infty}$ , при цьому чисельники та знаменники є величинами порядку  $O(e^{2r_n\sqrt{a_n}})$  проблеми виникають при обчисленні  $e^{r_n\sqrt{a_n}}$ .

Скорочення чисельника та знаменника в дробах  $\beta_n(\xi), \gamma_n(\xi)$  на  $e^{2r_n\sqrt{a_n}}$  призводить до нових дробів чисельник і знаменник яких містить експоненти в недодатніх степенях, при цьому  $C = ch(r_n\sqrt{a_n})$  і  $S = sh(r_n\sqrt{a_n})$  перетворюються на  $C = \frac{1+e^{-2r_n\sqrt{a_n}}}{2}$ ,  $S = \frac{1-e^{-2r_n\sqrt{a_n}}}{2}$ , що забезпечує обчислення при великих значеннях  $\xi$ .

$$\begin{aligned} \beta_n = & \frac{1}{\Delta_n} \left( -(a_n^2 c_{n11}^2 + a_n c_{n11} (2c_{n12} + c_{n33}) + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) \right. \\ & \cdot (3a_n c_{n11} + c_{n12} - c_{n33}) \cdot \delta_n \cdot C^2 - 2a_n c_{n11} \\ & \cdot (a_n^2 c_{n11}^2 + a_n c_{n11} (2c_{n12} + c_{n33}) + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) \cdot \alpha_n S C \\ & - 2r_n \cdot a_n \sqrt{a_n} c_{n11} c_{n12} (c_{n12} - c_{n33}) \cdot \alpha_n e_{2n} \\ & - 2r_n a_n^2 \sqrt{a_n} c_{n11}^2 (2c_{n12} - c_{n33}) \cdot \alpha_n e_{2n} - 2r_n a_n^3 \sqrt{a_n} c_{n11}^3 \cdot \alpha_n e_{2n} \\ & + ((a_n^4 r_n^2 + 3a_n^3) \cdot c_{n11}^3 + (r_n^2 a_n (3c_{n12} - 2c_{n33}) + 7c_{n12} + 2c_{n33}) \\ & \cdot a_n^2 c_{n11}^2 + (r_n^2 a_n (3c_{n12} - c_{n33}) + 5c_{n12} + c_{n33}) (c_{n12} - c_{n33}) \\ & \left. \cdot a_n c_{n11} + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})^2 (a_n r_n^2 + 1)) \cdot \delta_n e_{2n} \right), \\ \gamma_n = & \frac{1}{\Delta_n} \left( -(a_n c_{n11} c_{n12} (5c_{n12} - 2c_{n33}) + a_n^2 c_{n11}^2 (7c_{n12} + 3c_{n33}) + 3a_n^3 c_{n11}^3 \right. \\ & \left. + c_{n12}^2 (c_{n12} - c_{n33})) \cdot \alpha_n C^2 - 2c_{n11} \right. \\ & \cdot (a_n c_{n12} \cdot (c_{n12} - c_{n33}) + ((2c_{n12} + c_{n33}) a_n^2 + a_n^3 c_{n11}) c_{n11}) \cdot \delta_n \\ & \cdot S C + ((5c_{n12} - 2c_{n33}) c_{n11} + r_n^2 c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) a_n c_{n12} \cdot \alpha_n e_{2n} \\ & + ((3c_{n33} - c_{n12}) c_{n11} + r_n^2 c_{n12} (3c_{n12} - 2c_{n33})) a_n^2 c_{n11} \cdot \alpha_n e_{2n} \\ & + (r_n^2 (3c_{n12} - c_{n33}) - 5c_{n11}) a_n^3 c_{n11}^2 \cdot \alpha_n e_{2n} + a_n^4 c_{n11}^3 r_n^2 \cdot \alpha_n e_{2n} \\ & + c_{n12}^2 (c_{n12} - c_{n33}) \cdot \alpha_n e_{2n} + 2r_n a_n \sqrt{a_n} c_{n11} \delta_n (a_n c_{n11} + c_{n12}) \\ & \left. \cdot (a_n c_{n11} + c_{n12} - c_{n33}) e_{2n} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \left( (-a_n^2 c_{n11}^2 - a_n c_{n11} (2c_{n12} + c_{n33}) - c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) \cdot C^2 \right. \\ & + (a_n^3 r_n^2 - 3a_n^2) \cdot c_{n11}^2 e_{2n} + (r_n^2 a_n (2c_{n12} - c_{n33}) + 2c_{n12} + c_{n33}) \\ & \left. \cdot a_n c_{n11} e_{2n} + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33}) (a_n r_n^2 + 1) e_{2n} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

де  $C = \frac{1+e_{2n}}{2}$ ,  $S = \frac{1-e_{2n}}{2}$ ,  $e_{2n} = e^{-2r_n \sqrt{a_n}}$ ,  $r_n = r h_n$ .

Розглянемо деякі важливі властивості функції податливості [65], які допоможуть звести формули до зручного виду для використання на ЕОМ.

Зауважимо, що кожна з функцій податливості змінної  $r$  є відношенням двох цілих функцій змінної  $r$ .

При  $r_n = r h_n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{r_n \rightarrow \infty} A_n &= 2a_n c_{n11} + O(r_n^2 e^{-2r_n}), \\ \lim_{r_n \rightarrow \infty} A_{\tau n} &= 3a_n c_{n11} + c_{n12} - c_{n33} + O(r_n^2 e^{-2r_n}), \\ \lim_{r_n \rightarrow \infty} B_n &= 3a_n c_{n11} + c_{n12} + O(r_n^2 e^{-2r_n}), \\ \lim_{r_n \rightarrow \infty} B_{\tau n} &= 2a_n c_{n11} + O(r_n^2 e^{-2r_n \sqrt{a_n}}). \end{aligned}$$

Запишемо функції з формули (4.10) для  $k + 1$  шару:

$$\begin{aligned} \beta_{k+1}(\xi) &= A_{k+1}(r) \alpha_{k+1} + A_{\tau(k+1)}(r) \delta_{k+1}, \\ \gamma_{k+1}(\xi) &= B_{k+1}(r) \alpha_{k+1} + B_{\tau(k+1)}(r) \delta_{k+1}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

де  $A_{k+1}(r)$ ,  $A_{\tau(k+1)}(r)$ ,  $B_{k+1}(r)$ ,  $B_{\tau(k+1)}(r)$  – функції податливості.

Щоб отримати рекурентні формули між функція податливості  $k$  та  $k + 1$  шару підставимо в (4.16) функції  $\alpha_{k+1}(\xi)$ ,  $\delta_{k+1}(\xi)$ ,  $\beta_{k+1}(\xi)$ ,  $\gamma_{k+1}(\xi)$  виражені через рекурентні формули (4.8). Отримаємо два рівняння, що

виражаються через функції попереднього шару  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$ .

Виразимо з отриманих рівнянь дві функції  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$ :

$$\begin{aligned} \beta_k(\xi) &= F_{11}(r, A_{k+1}, A_{\tau(k+1)}, B_{k+1}, B_{\tau(k+1)}) \cdot \alpha_k \\ &+ F_{12}(r, A_{k+1}, A_{\tau(k+1)}, B_{k+1}, B_{\tau(k+1)}) \cdot \delta_k, \\ \gamma_k(\xi) &= F_{21}(r, A_{k+1}, A_{\tau(k+1)}, B_{k+1}, B_{\tau(k+1)}) \cdot \alpha_k \\ &+ F_{22}(r, A_{k+1}, A_{\tau(k+1)}, B_{k+1}, B_{\tau(k+1)}) \cdot \delta_k. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Отримаємо рекурентні співвідношення, що дозволяють визначити функції  $A_k$ ,  $A_{\tau k}$ ,  $B_k$ ,  $B_{\tau k}$  за відомими  $A_{k+1}$ ,  $A_{\tau(k+1)}$ ,  $B_{k+1}$ ,  $B_{\tau(k+1)}$ :

$$\begin{aligned} A_k(r) &= F_{11}(r, A_{k+1}, A_{\tau(k+1)}, B_{k+1}, B_{\tau(k+1)}), \\ A_{\tau k}(r) &= F_{12}(r, A_{k+1}, A_{\tau(k+1)}, B_{k+1}, B_{\tau(k+1)}), \\ B_k(r) &= F_{21}(r, A_{k+1}, A_{\tau(k+1)}, B_{k+1}, B_{\tau(k+1)}), \\ B_{\tau k}(r) &= F_{22}(r, A_{k+1}, A_{\tau(k+1)}, B_{k+1}, B_{\tau(k+1)}). \end{aligned}$$

Запишемо ці рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned}
A_k(r) = & \frac{-4a_k^2 c_{k11}^2 (A_{k+1} a_{k+1} + a_k B_{\tau(k+1)}) \cdot C^2}{\Delta_k} - \frac{4a_k c_{k11} \cdot SC}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( c_{(k+1)11} a_{k+1} \sqrt{a_{k+1}} \cdot (P_{1k} \sqrt{a_k} - 3c_{k11} a_k \sqrt{a_k}) + \sqrt{a_{k+1}} \right. \\
& \cdot \left( -3P_{3k} c_{k11} a_k \sqrt{a_k} + \frac{a_{k+1}^2 \sqrt{a_{k+1}} \cdot c_{k11}^2}{2} + \sqrt{a_k} \right. \\
& \cdot \left. \left. \left. \left( \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k} c_{k12} + M_{2k} + M_{1k} + M_k \right) \right) \right) - \frac{4a_k^2 c_{k11} \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}}}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( r_k c_{(k+1)11} a_{k+1} \sqrt{a_{k+1}} \cdot (P_{1k} - a_k c_{k11}) - a_k c_{k11} B_{\tau(k+1)} \right. \\
& + r_k \sqrt{a_{k+1}} \left( \frac{a_k^2 c_{k11}^2}{2} + \frac{c_{k12}^2}{2} + a_k c_{k11} (P_{2k} + c_{k12}) + P_{2k} c_{k12} + M_{2k} \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + M_{1k} + M_k \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\tau k}(r) = & \frac{-\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k+1}}(6a_k c_{k11} + 2c_{k12} - 2c_{k33}) \cdot C^2}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( \frac{a_k^2 c_{k11}^2}{2} + \frac{c_{k12}^2}{2} - 3a_k c_{k11} (a_{k+1} c_{(k+1)11} + P_{3k}) + c_{k12} \right. \\
& \cdot (P_{2k} - a_{k+1} c_{(k+1)11}) + M_k + M_{1k} + M_{2k} + a_{k+1} c_{(k+1)11} \cdot A_{\tau(k+1)} \\
& \left. + a_{k+1} c_{(k+1)11} \cdot c_{k33} \right) - \frac{2a_k c_{k11} \cdot SC}{\Delta_k} \cdot (A_{k+1} a_{k+1} + a_k B_{\tau(k+1)}) \\
& \cdot (3a_k c_{k11} + c_{k12} - c_{k33}) + \frac{a_k \sqrt{a_k} \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}}}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( 2c_{(k+1)11} a_{k+1} \sqrt{a_{k+1}} (3c_{k11} \cdot (P_{1k} - c_{k12} + c_{k33}) + P_{1k} r_k^2 \right. \\
& \cdot (c_{k12} - c_{k33})) + 2a_{k+1} c_{k11} r_k A_{k+1} (c_{k12} - c_{k33}) + \sqrt{a_{k+1}} \\
& \cdot \left( (5c_{k12}^2 + 2c_{k12} (2P_{2k} - 4c_{(k+1)12} + 2B_{k+1} - c_{k33}) - c_{k33}^2 \right. \\
& - A_{\tau(k+1)} c_{k33} + 12M_{2k} + 6M_{1k} + 6M_k) \cdot c_{k11} + 2r_k^2 (c_{k12} - c_{k33}) \\
& \left. \cdot \left( \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k} c_{k12} + M_{2k} + M_{1k} + M_k \right) \right) \right) + \frac{2c_{k11} a_k^2 \sqrt{a_k} \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}}}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( c_{(k+1)11} a_{k+1} \sqrt{a_{k+1}} \cdot (-9c_{k11} + r_k^2 (P_{1k} - c_{k12} + c_{k33})) \right. \\
& + \left( (-9c_{(k+1)12} - \frac{A_{\tau(k+1)}}{2} + \frac{9B_{k+1}}{2} + \frac{7c_{k12}}{2} + c_{k33}) \cdot c_{k11} + r_k^2 \right. \\
& \cdot \left( \frac{3c_{k12}^2 + c_{k33}^2}{2} + 2P_{2k} c_{k12} - c_{k33} c_{k12} + M_k + M_{1k} + \frac{A_{\tau(k+1)} c_{k33}}{2} \right. \\
& \left. \left. + 2M_{2k} \right) \right) \sqrt{a_{k+1}} - r_k (B_{\tau(k+1)} \cdot (c_{k12} - c_{k33}) - c_{k11} a_{k+1} A_{k+1}) \\
& - \frac{2\sqrt{a_k} \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}}}{\Delta_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left( c_{(k+1)11} a_{k+1} \sqrt{a_{k+1}} \cdot \left( a_k^3 c_{k11}^2 r_k^2 - P_{1k} (c_{k12} - c_{k33}) \right) - \sqrt{a_{k+1}} \right. \\
& \cdot \left( (c_{k12} - c_{k33}) \left( \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k} c_{k12} + M_{2k} + M_{1k} + M_k \right) + \frac{a_k^4 c_{k11}^3 r_k^2}{2} \right) \\
& \left. - a_k^3 c_{k11}^2 r_k \left( r_k \sqrt{a_{k+1}} \left( \frac{3c_{k11} + 3r_k^2 c_{k12} + c_{k33}}{2} + P_{2k} \right) - B_{\tau(k+1)} \right) \right), \\
B_{\tau k}(r) = & \frac{-4a_k^2 c_{k11}^2 (A_{k+1} a_{k+1} + a_k B_{\tau(k+1)}) \cdot C^2}{\Delta_k} - \frac{4a_k \sqrt{a_k} \sqrt{a_{k+1}} \cdot SC}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( \left( c_{(k+1)11} a_{k+1} P_{1k} + \left( \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k} c_{k12} + M_{2k} + M_{1k} + M_k \right) \right) \right. \\
& \left. - 3c_{k11} a_k (a_{k+1} c_{(k+1)11} + P_{3k}) + \frac{a_k^2 c_{k11}^2}{2} \right) \\
& - \frac{4a_k^2 c_{k11} r_k \cdot c_{(k+1)11} a_{k+1} \sqrt{a_{k+1}} (a_k c_{k11} + P_{1k}) \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}}}{\Delta_k} \\
& + \frac{4a_{k+1} a_k^2 c_{k11}^2 \cdot A_{k+1} \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}}}{\Delta_k} + \frac{4a_k^2 c_{k11} r_k \sqrt{a_{k+1}} \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}}}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( \frac{a_k^2 c_{k11}^2}{2} + c_{k11} a_k (c_{k12} + P_{2k}) + \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k} c_{k12} + M_{2k} + M_{1k} \right. \\
& \left. + M_k \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_k(r) = & \frac{C^2}{\Delta_k} \cdot \left( -2c_{k12} \cdot \left( \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k}c_{k12} + M_{2k} + M_{1k} + M_k \right) - 6c_{k11}a_k \right. \\
& \cdot \left( c_{(k+1)11}a_{k+1}(P_{1k} - c_{k12}) + \frac{5c_{k12}^2}{6} + M_{2k} + M_{1k} + M_k + c_{k12} \right. \\
& \cdot \left. \left. \left( B_{k+1} - 2c_{(k+1)12} - \frac{A_{\tau(k+1)}}{3} - \frac{c_{k33}}{3} \right) \right) - 3a_k^3c_{k11}^3 + 18c_{k11}^2a_k^2 \right. \\
& \cdot \left. \left( c_{(k+1)11}a_{k+1} + P_{3k} - \frac{c_{k12}}{18} \right) - 2c_{(k+1)11}a_{k+1}c_{k12}P_{1k} \right) \cdot \sqrt{a_{k+1}}\sqrt{a_k} \\
& - \frac{6c_{k11}a_k \cdot SC}{\Delta_k} (A_{k+1}a_{k+1} + a_kB_{\tau(k+1)}) \left( a_kc_{k11} + \frac{c_{k12}}{3} \right) + \frac{2a_k\sqrt{a_k}}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( c_{(k+1)11}a_{k+1} \cdot (3c_{k11}(P_{1k} - c_{k12}) + r_k^2c_{k12}P_{1k}) + c_{k11} \right. \\
& \cdot \left. \left( \frac{5c_{k12}^2}{2} + c_{k12}(2P_{2k} - 4c_{(k+1)12} + 2B_{k+1}) + 3(M_{1k} + M_{2k} + M_k) \right) \right) \\
& + r_k^2c_{k12} \left( \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k}c_{k12} + M_{2k} + M_{1k} + M_k \right) + r_k\sqrt{a_{k+1}}c_{k11}c_{k12} \\
& \cdot A_{k+1} \Big) \cdot \sqrt{a_{k+1}} \cdot e^{-2r_k\sqrt{a_k}} + \frac{2c_{k11}a_k^2\sqrt{a_k} \cdot e^{-2r_k\sqrt{a_k}}}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( c_{(k+1)11}a_{k+1}\sqrt{a_{k+1}} \cdot (-5c_{k11} + r_k^2(P_{1k} - c_{k12})) + \sqrt{a_{k+1}} \right. \\
& \cdot \left( \left( -5c_{(k+1)12} + \frac{3A_{\tau(k+1)}}{2} + \frac{5B_{k+1}}{2} - \frac{c_{k12}}{2} + \frac{3c_{k33}}{2} \right) \cdot c_{k11} + r_k^2 \right. \\
& \cdot \left. \left. \left( \frac{3c_{k12}^2}{2} + 2P_{2k}c_{k12} + M_{1k} + M_{2k} + M_k \right) \right) \right) - r_k \\
& \cdot \left. \left( c_{k12}B_{\tau(k+1)} - A_{k+1}a_{k+1}c_{k11} \right) \right) - \frac{2c_{(k+1)11}a_{k+1}\sqrt{a_{k+1}} \cdot e^{-2r_k\sqrt{a_k}}}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( a_k^3\sqrt{a_k}c_{k11}^2r_k^2 - c_{k12}P_{1k}\sqrt{a_k} \right) - \frac{2c_{k11}^2a_k^3\sqrt{a_k} \cdot e^{-2r_k\sqrt{a_k}}}{\Delta_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left( \left( \frac{5c_{k11}}{2} - \frac{3r_k^2 c_{k12}}{2} - P_{2k} r_k^2 \right) \cdot \sqrt{a_{k+1}} + r_k B_{\tau(k+1)} \right) \\
& + \frac{a_k^4 \sqrt{a_k} c_{k11}^3 r_k^2 \sqrt{a_{k+1}} \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}}}{\Delta_k} + \frac{2\sqrt{a_{k+1}} \sqrt{a_k} c_{k12} \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}}}{\Delta_k} \\
& \cdot \left( \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k} c_{k12} + M_2 + M_{1k} + M_k \right), \\
\Delta_k = & \sqrt{a_{k+1}} \sqrt{a_k} \left( 6c_{k11} a_k (c_{(k+1)11} a_{k+1} + P_{3k}) - 2a_{k+1} c_{(k+1)11} P_{1k} - 2 \right. \\
& \cdot \left( \frac{a_k^2 c_{k11}^2}{2} + \left( \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k} c_{k12} + M_{2k} + M_{1k} + M_k \right) \right) \cdot C^2 \\
& - 2a_k c_{k11} \cdot (A_{k+1} a_{k+1} + a_k B_{\tau(k+1)}) \cdot SC + 2a_k \sqrt{a_k} \sqrt{a_{k+1}} \\
& \cdot \left( a_{k+1} c_{(k+1)11} (-3c_{k11} + r_k^2 P_{1k}) - 3P_{3k} c_{k11} + r_k c_{k11} \sqrt{a_{k+1}} A_{k+1} \right. \\
& \left. + r_k^2 \cdot \left( \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k} c_{k12} + M_{2k} + M_{1k} + M_k \right) \right) \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}} \\
& - 2c_{(k+1)11} a_{k+1} \sqrt{a_{k+1}} \sqrt{a_k} \cdot (a_k^2 r_k^2 c_{k11} - P_{1k}) \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}} \\
& - 2a_k^2 \sqrt{a_k} c_{k11} \cdot \left( \left( \frac{3c_{k11}}{2} - c_{k12} - P_{2k} \right) \cdot r_k^2 \sqrt{a_{k+1}} + r_k B_{\tau(k+1)} \right) \\
& \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}} + \sqrt{a_k} \sqrt{a_{k+1}} \cdot e^{-2r_k \sqrt{a_k}} \\
& \cdot \left( a_k^3 c_{k11}^2 r_k^2 + 2 \left( \frac{c_{k12}^2}{2} + P_{2k} c_{k12} + M_{2k} + M_{1k} + M_k \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\text{де } k = \overline{1, n-1}, r_k = rh_k, C = \frac{1 + e^{-2rh_k \sqrt{a_k}}}{2}, S = \frac{1 - e^{-2rh_k \sqrt{a_k}}}{2}, M_k = \frac{A_{k+1} B_{\tau(k+1)}}{2},$$

$$M_{1k} = \left( c_{(k+1)12} - \frac{B_{k+1}}{2} \right) \cdot A_{\tau(k+1)}, M_{2k} = \left( c_{(k+1)12} - \frac{B_{k+1}}{2} \right) \cdot c_{k33},$$

$$P_{1k} = -c_{k12} + A_{\tau(k+1)} + c_{k33}, P_{2k} = -c_{(k+1)12} - \frac{A_{\tau(k+1)}}{2} + \frac{B_{k+1}}{2} - \frac{c_{k33}}{2},$$

$$P_{3k} = c_{(k+1)12} - \frac{A_{\tau(k+1)}}{6} - \frac{B_{k+1}}{2} - \frac{c_{k12}}{3} - \frac{c_{k33}}{6}.$$

Відправними значеннями виступають функції  $n$ -го шару, які можна взяти з формул (4.16).

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\Delta_n} \left( 2a_n c_{n11} \cdot (a_n^2 c_{n11}^2 + a_n c_{n11} (2c_{n12} + c_{n33}) + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) \cdot SC \right. \\ &\quad + 2r_n a_n \sqrt{a_n} c_{n11} c_{n12} (c_{n12} - c_{n33}) \cdot e_{2n} + 2r_n a_n^2 \sqrt{a_n} c_{n11}^2 \cdot e_{2n} \\ &\quad \left. \cdot (2c_{n12} - c_{n33}) + 2r_n a_n^3 \sqrt{a_n} c_{n11}^3 \cdot e_{2n} \right), \\ A_{\tau n} &= \frac{1}{\Delta_n} \left( -(a_n^2 c_{n11}^2 + a_n c_{n11} (2c_{n12} + c_{n33}) + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) \right. \\ &\quad \cdot (3a_n c_{n11} + c_{n12} - c_{n33}) \cdot C^2 + (a_n^4 r_n^2 + 3a_n^3) \cdot c_{n11}^3 e_{2n} \\ &\quad + (r_n^2 a_n (3c_{n12} - 2c_{n33}) + 7c_{n12} + 2c_{n33}) \cdot a_n^2 c_{n11}^2 e_{2n} \\ &\quad + (r_n^2 a_n (3c_{n12} - c_{n33}) + 5c_{n12} + c_{n33}) (c_{n12} - c_{n33}) \cdot a_n c_{n11} e_{2n} \\ &\quad \left. + c_{n12} e_{2n} (c_{n12} - c_{n33})^2 (a_n r_n^2 + 1) \right), \\ B_n &= \frac{1}{\Delta_n} \left( -(a_n c_{n11} c_{n12} \cdot (5c_{n12} - 2c_{n33}) + a_n^2 c_{n11}^2 \cdot (7c_{n12} + 3c_{n33}) + 3a_n^3 c_{n11}^3 \right. \\ &\quad + c_{n12}^2 \cdot (c_{n12} - c_{n33})) \cdot C^2 + a_n^4 c_{n11}^3 r_n^2 e_{2n} + a_n c_{n12} e_{2n} \\ &\quad \cdot ((5c_{n12} - 2c_{n33}) \cdot c_{n11} + r_n^2 c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) + a_n^2 c_{n11} e_{2n} \\ &\quad \cdot ((3c_{n33} - c_{n12}) c_{n11} + r_n^2 c_{n12} (3c_{n12} - 2c_{n33})) + a_n^3 c_{n11}^2 e_{2n} \\ &\quad \left. \cdot (r_n^2 (3c_{n12} - c_{n33}) - 5c_{n11}) + c_{n12}^2 (c_{n12} - c_{n33}) \cdot e_{2n} \right), \\ B_{\tau n} &= \frac{1}{\Delta_n} \left( 2c_{n11} (a_n c_{n12} (c_{n12} - c_{n33}) + a_n^2 c_{n11} (2c_{n12} + c_{n33}) + a_n^3 c_{n11}^2) \cdot SC \right. \\ &\quad \left. - 2r_n a_n \sqrt{a_n} c_{n11} (a_n c_{n11} + c_{n12}) (a_n c_{n11} + c_{n12} - c_{n33}) \cdot e_{2n} \right), \\ \Delta_n &= \left( (-a_n^2 c_{n11}^2 - a_n c_{n11} (2c_{n12} + c_{n33}) - c_{n12} (c_{n12} - c_{n33})) \cdot C^2 \right. \\ &\quad + (a_n^3 r_n^2 - 3a_n^2) \cdot c_{n11}^2 e_{2n} + (r_n^2 a_n (2c_{n12} - c_{n33}) + 2c_{n12} + c_{n33}) \\ &\quad \left. \cdot a_n c_{n11} e_{2n} + c_{n12} (c_{n12} - c_{n33}) (a_n r_n^2 + 1) e_{2n} \right), \end{aligned} \tag{4.20}$$

де  $C = \frac{1+e_{2n}}{2}$ ,  $S = \frac{1-e_{2n}}{2}$ ,  $e_{2n} = e^{-2r_n\sqrt{a_n}}$ ,  $r_n = rh_n$ .

#### 4.4. Алгоритм розв'язання задачі

Наведемо алгоритм розв'язку першої основної граничної задачі плоскої теорії пружності для багат шарової основи з ортотропними шарами, характеристики матеріалів всіх шарів, якої задовольняють випадку з дійсними кратними коренями у (2.17).

1) Знаходимо трансформанту функції напружень (4.1) і виражаємо за формулами (4.2) трансформанти напружень та переміщень (4.3).

2) Виражаємо невідомі функції  $A_{2k}(\xi)$ ,  $B_{2k}(\xi)$ ,  $C_{2k}(\xi)$ ,  $D_{2k}(\xi)$  (4.5) в трансформантах напружень і переміщень через допоміжні функції  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$  (4.4), які пов'язані з умовами на межах  $y_k = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

3) За формулами (4.19) знаходимо функції податливості для всіх шарів. Вихідними для цих рекурентних співвідношень є функції податливості нижнього шару основи  $A_n$ ,  $A_{tn}$ ,  $B_n$ ,  $B_{tn}$  (4.20).

4) З граничних умов на верхній межі основи знаходимо трансформанти двох відомих функцій  $\alpha_1(\xi)$  і  $\delta_1(\xi)$ . Підставимо відомі функції у формули (4.12) отримаємо дві інші  $\beta_1(\xi)$ ,  $\gamma_1(\xi)$  (4.13).

5) За рекурентними співвідношення (4.8) знаходимо  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$ ,  $k = \overline{1, n}$  і виражаємо трансформанти напружень та переміщень за формулами (4.6), (4.7) для шарів в яких потрібно визначити НДС.

6) До отриманих трансформант напружень та переміщень шарів основи застосовується зворотне інтегральне перетворення Фур'є (2.2).

Фінальним моментом реалізації алгоритму є обчислення інтегралів при застосуванні зворотного інтегрального перетворення Фур'є до трансформант напружень та переміщень. Обчислення цих інтегралів в дуже рідкісних випадках вдається обчислити аналітично для випадків одного або двох шарів.

Тому в загальному випадку обчислення цих інтегралів проводиться за допомогою квадратурних формул чисельного інтегрування.

Для другої основної граничної задачі алгоритм залишається схожим і потребує незначних змін в ідейному плані. В пункті 4 з граничних умов на верхній межі основи знаходимо трансформанти двох відомих функцій  $\beta_1(\xi)$ ,  $\gamma_1(\xi)$  підставивши відомі функції у формули (4.12) отримаємо дві інші функції  $\alpha_1(\xi)$  і  $\delta_1(\xi)$  (4.15).

#### 4.5. Приклад розрахування напружено-деформівного стану ортотропної тришарової основи

Розглянемо ортотропну основу, що складається з трьох шарів. Матеріал першого шару характеризується такими пружними константами  $\nu_{xy} = 0.26$ ,  $\nu_{xz} = 0.19$ ,  $\nu_{zy} = 0.3$ ,  $\nu_{yz} = 0.41$ ,  $E_x = 3.86 \cdot 10^8$  Па,  $E_y = 8.27 \cdot 10^7$  Па, для другого шару  $\nu_{xy} = 0.26$ ,  $\nu_{xz} = 0.235$ ,  $\nu_{yz} = 0.41$ ,  $\nu_{zy} = 0.3$ ,  $E_x = 1.73 \cdot 10^6$  Па,  $E_y = 3.31 \cdot 10^6$  Па, для третього маємо  $\nu_{xy} = 0.26$ ,  $E_x = 3.86 \cdot 10^8$  Па,  $E_y = 8.27 \cdot 10^7$  Па,  $\nu_{yz} = 0.41$ ,  $\nu_{xz} = 0.19$ ,  $\nu_{zy} = 0.4$ .

Товщини шарів  $h_1 = 3$  м,  $h_2 = 4$  м,  $h_3 = 3$  м.

На верхній межі першого шару основи  $y_1 = 0$  задано навантаження  $\sigma_y(x, 0) = \frac{10^5}{x^2+1}$  (Па),  $\tau_{xy}(x, 0) = 0$  (Па).

На нескінченності напруження прямують до нуля.

Основа лежить на абсолютно жорсткій півплощині, тоді на нижній межі  $y_3 = -h_3$  переміщення  $u_y^3(x, -h_3) = 0$ ,  $u_x^3(x, -h_3) = 0$ .

Задача відноситься до випадку описаному в пункті 2.1.3  $\left(\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1\right)$ . Трансформанти функції напруження  $\bar{\varphi}(\xi, y)$  кожного шару описуються формулою (4.1).

З умов на нижній межі третього шару (4.9) отримаємо  $\beta_3(\xi)$ ,  $\gamma_3(\xi)$  (4.10).

Виражаємо функції податливості третього шару за формулами (4.11) або за формулами (4.20), де  $n = 3$ . За рекурентними співвідношеннями (4.19) знаходимо функції податливості всіх шарів.

З умов на верхній межі основи знаходимо  $\alpha_1(\xi), \delta_1(\xi)$  ( $\alpha_1 = \pi \cdot e^{-|\xi|}$ ,  $\delta_1 = 0$ ) та підставляємо їх у (4.12) і знаходимо  $\beta_1(\xi), \gamma_1(\xi)$ .

За рекурентними співвідношеннями (4.8) знаходимо  $\alpha_2(\xi), \delta_2(\xi), \beta_2(\xi), \gamma_2(\xi), \alpha_3(\xi), \delta_3(\xi), \beta_3(\xi), \gamma_3(\xi)$  та підставляємо у вирази трансформант напружень (4.6) та трансформант переміщень (4.7).

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до  $\overline{\sigma_y^k}(\xi, y), \overline{\tau_{xy}^k}(\xi, y), \overline{u_x^k}(\xi, y), \overline{u_y^k}(\xi, y), k = 1, 2, 3$  отримаємо істинні значення шуканих величин.

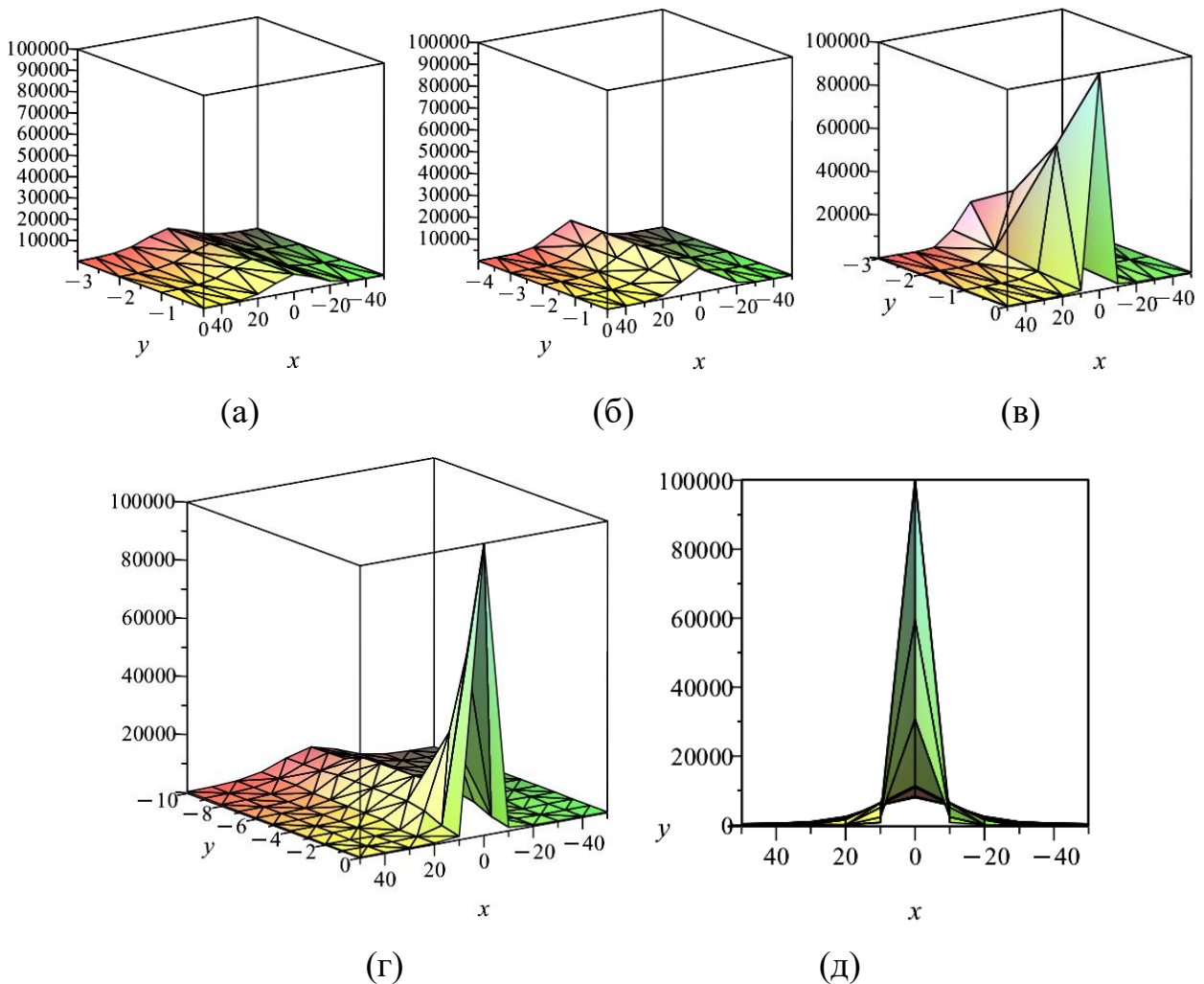


Рисунок 4.3 – Значення напружень  $\sigma_y^3(x, y)$  (а),  $\sigma_y^2(x, y)$  (б),  $\sigma_y^1(x, y)$  (в),

$\sigma_y^{1,2,3}(x, y)$  (г, д)

В наведених розрахунках  $\sigma_y^3(x, y)$  – третій шар основи,  $\sigma_y^2(x, y)$  – другий шар основи,  $\sigma_y^1(x, y)$  – перший шар основи,  $\sigma_x^{1,2,3}(x, y)$  – вся основа.

Як бачимо з наведених розрахунків результати свідчать про виконання межових умов  $\sigma_y^1(0,0) = 10^5$  та умов на спільній межі між шарами. Найбільші значення  $\sigma_y^k(x, y)$  в околі  $x = 0$ , а при віддалені від нуля значення зменшуються.

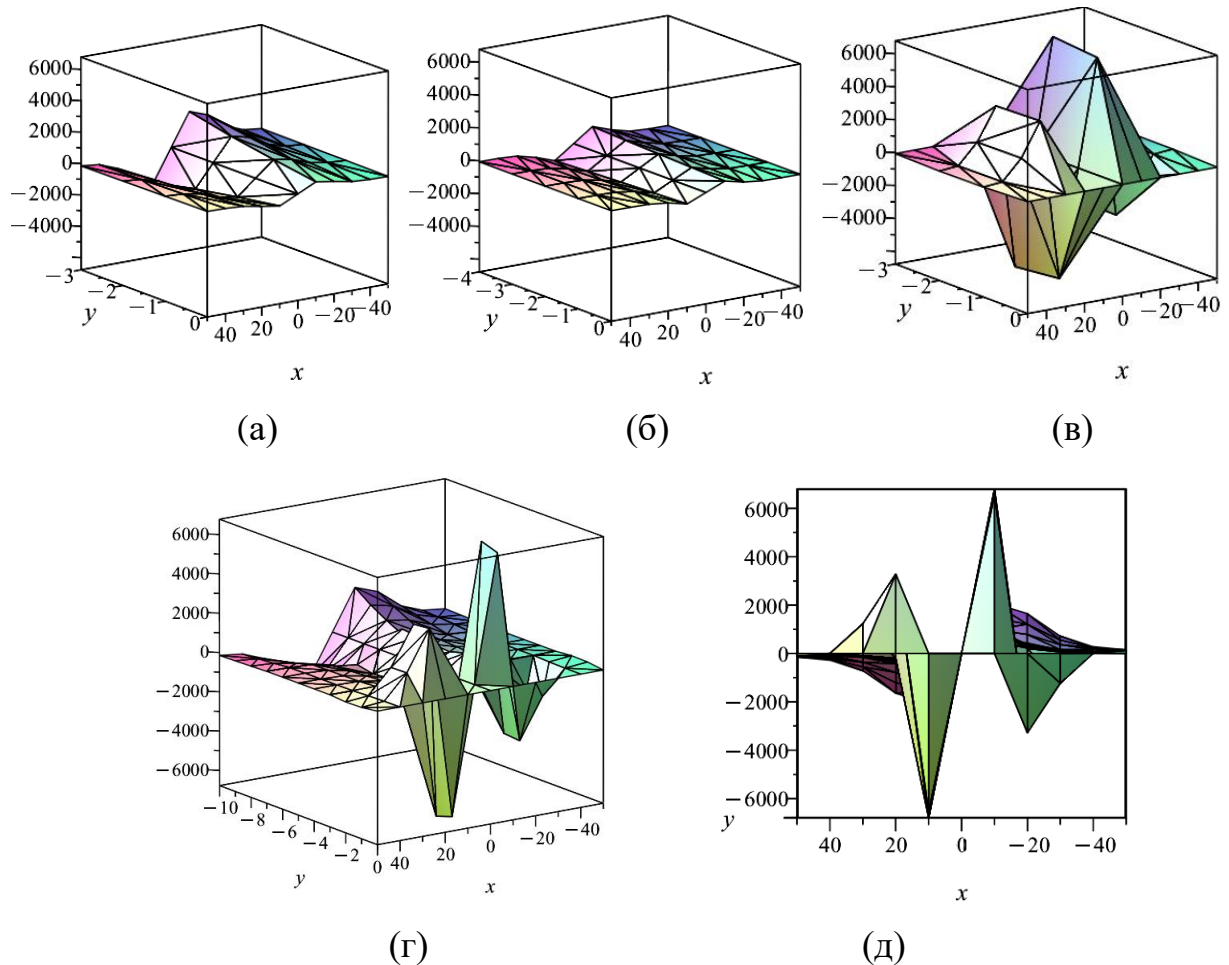
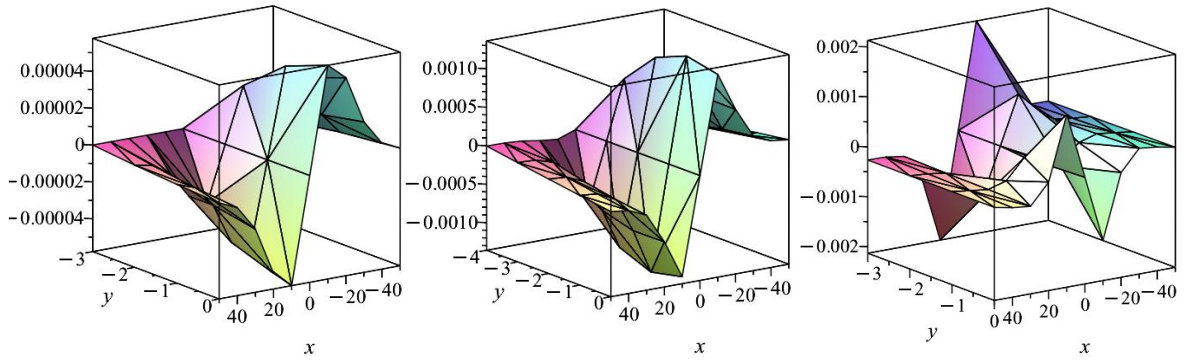


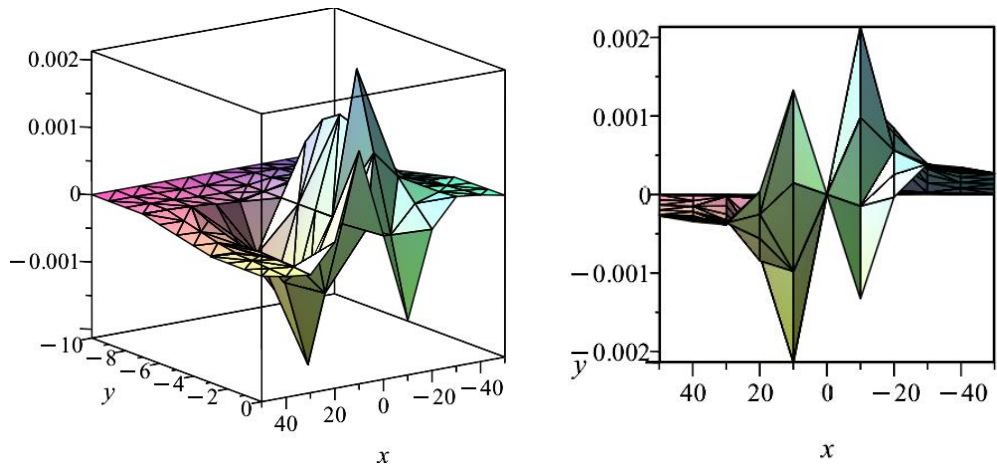
Рисунок 4.4 – Значення напружень  $\tau_{xy}^3(x, y)$  (а),  $\tau_{xy}^2(x, y)$  (б),  $\tau_{xy}^1(x, y)$  (в)  
 $\tau_{xy}^{1,2,3}(x, y)$  (г, д)

На рис. 4.4 бачимо симетричний характер розподілу. Результати свідчать про виконання межових умов і умов на спільній межі між шарами.



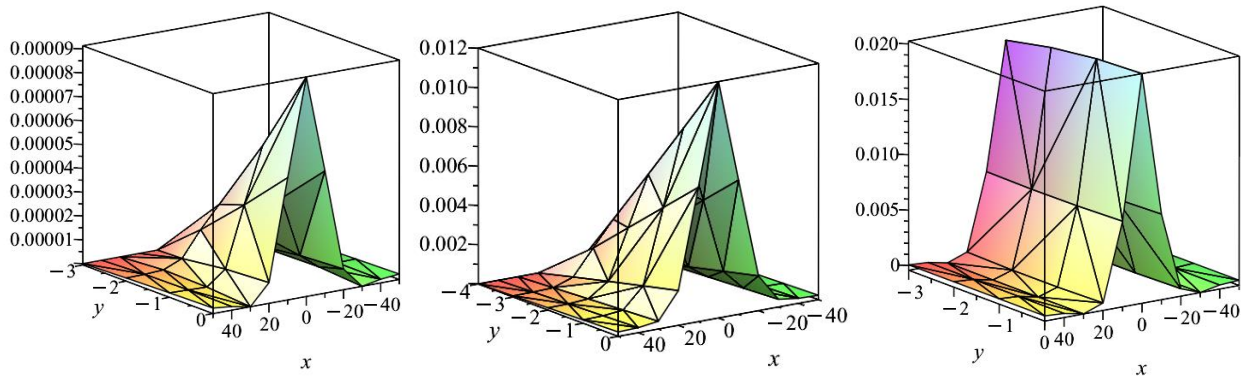
(а) (б) (в)

Рисунок 4.5 – Переміщення  $u_x^3(x, y)$ (а),  $u_x^2(x, y)$ (б),  $u_x^1(x, y)$  (в)



(а) (б)

Рисунок 4.6 – Переміщення  $u_x^{1,2,3}(x, y)$  (а, б)



(а) (б) (в)

Рисунок 4.7 – Значення переміщень  $u_y^3(x, y)$  (а),  $u_y^2(x, y)$  (б),  $u_y^1(x, y)$  (в)

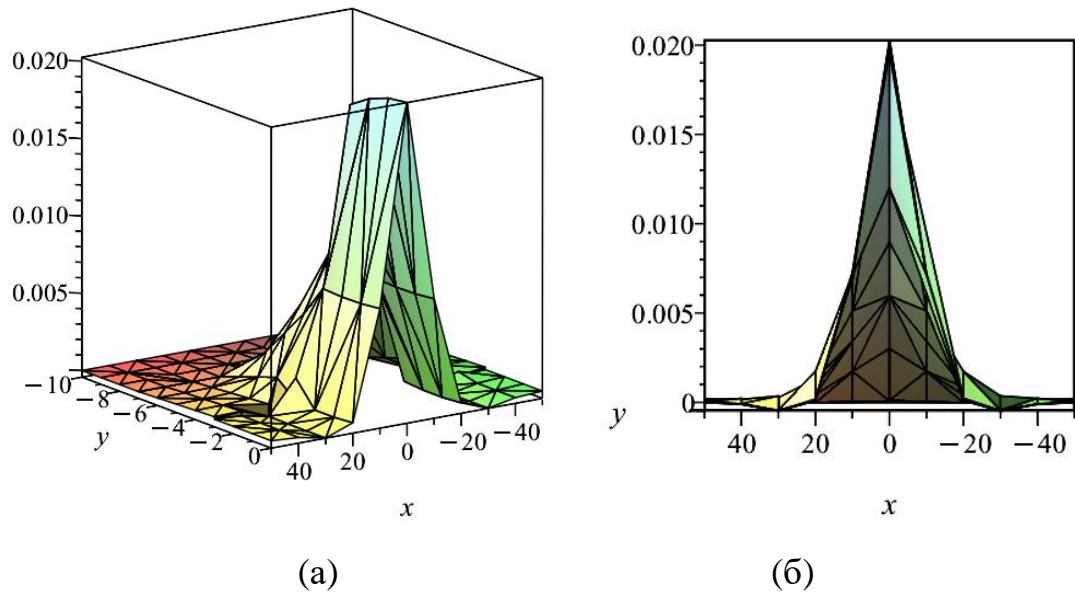


Рисунок 4.8 – Значення переміщень  $u_y^{1,2,3}(x, y)$  (а, б)

Отримані результати (рис. 4.5-4.8) свідчать про виконання межових умов  $u_x(x, -10) = 0, u_y(x, -10) = 0$  та умов на спільній межі між шарами.

#### 4.6. Порівняння результатів для тришарової основи

Для перевірки адекватності запропонованого підходу визначення напружень та переміщень у багат шаровій основі, проведемо порівняння розрахункових результатів для тришарової основи складеної з трьох однакових за матеріалом шарів та одного шару, з того ж самого матеріалу товщина якого дорівнює товщині основи.

Розглянемо ортотропну основу, що складається з трьох шарів, матеріал кожного шару характеризується пружними константами  $\nu_{xy} = 0.26, \nu_{xz} = 0.19, \nu_{zy} = 0.3, \nu_{yz} = 0.41, E_x = 3.86 \cdot 10^4$  МПа,  $E_y = 8.27 \cdot 10^3$  МПа.

Товщини першого, другого, третього шарів  $h_1 = 3$  м,  $h_2 = 4$  м,  $h_3 = 3$  м.

На верхній межі першого шару основи  $y_1 = 0$  задано навантаження  $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}$  (МПа),  $\tau_{xy}(x, 0) = 0$  (МПа), трансформанти яких мають

вигляд  $\overline{\sigma_y^1}(\xi, 0) = \pi \cdot e^{-|\xi|}$ ,  $\overline{\tau_{xy}^1}(\xi, 0) = 0$ . На нескінченності напруження прямують до нуля.

Основа лежить на абсолютно жорсткій півплощині, тож на нижній межі  $y_3 = -h_3$  переміщення дорівнюють нулю  $u_y^3(x, -h_3) = 0$ ,  $u_x^3(x, -h_3) = 0$ .

Задача відносяться до випадку описаному в пункті 2.1.3 ( $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ ). Трансформанти функції напруження  $\overline{\varphi}(\xi, y)$  кожного шару описуються формулою (4.1).

З умов на спільній межі третього шару та жорсткої півплощини (4.9) отримаємо функцій  $\beta_3(\xi)$ ,  $\gamma_3(\xi)$  через  $\alpha_3(\xi)$  і  $\delta_3(\xi)$  за формулою (4.10).

Виражаємо функції податливості третього шару за формулами (4.11) або за формулами (4.20), де  $n = 3$ . За рекурентними співвідношеннями (4.19) знаходимо функції податливості всіх шарів.

З умов на верхній межі основи знаходимо  $\alpha_1(\xi)$ ,  $\delta_1(\xi)$  ( $\alpha_1(\xi) = \pi \cdot e^{-|\xi|}$ ,  $\delta_1(\xi) = 0$ ) та підставляємо їх у (4.12). В результаті чого після розв'язання отриманої системи рівнянь маємо  $\beta_1(\xi)$ ,  $\gamma_1(\xi)$ .

За рекурентними співвідношеннями (4.8) знаходимо  $\alpha_2(\xi)$ ,  $\delta_2(\xi)$ ,  $\beta_2(\xi)$ ,  $\gamma_2(\xi)$ ,  $\alpha_3(\xi)$ ,  $\delta_3(\xi)$ ,  $\beta_3(\xi)$ ,  $\gamma_3(\xi)$ .

Знайдені вирази  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$ ,  $k = 1, 2, 3$  для кожного з шарів підставляємо у вирази трансформант напружень (4.6) та трансформант переміщень (4.7). Отримані вирази піддаємо зворотному інтегральному перетворенню Фур'є (2.2) і отримуємо значення шуканих величин.

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до трансформант  $\overline{\sigma_x^k}(\xi, y)$ ,  $\overline{\sigma_y^k}(\xi, y)$ ,  $\overline{\tau_{xy}^k}(\xi, y)$ ,  $\overline{u_x^k}(\xi, y)$ ,  $\overline{u_y^k}(\xi, y)$ ,  $k = 1, 2, 3$  отримаємо істинні значення напружень та переміщень точок всіх шарів основи.

В наведених розрахунках  $\sigma_x^1(x, y)$  – перший шар основи,  $\sigma_x^2(x, y)$  – другий шар основи,  $\sigma_x^3(x, y)$  – третій шар основи,  $\sigma_x^{1,2,3}(x, y)$  – вся основа,  $\sigma_x(x, y)$  – напруження шару  $h = 10$ , описаного в прикладі 2 пункт 2.3.2.



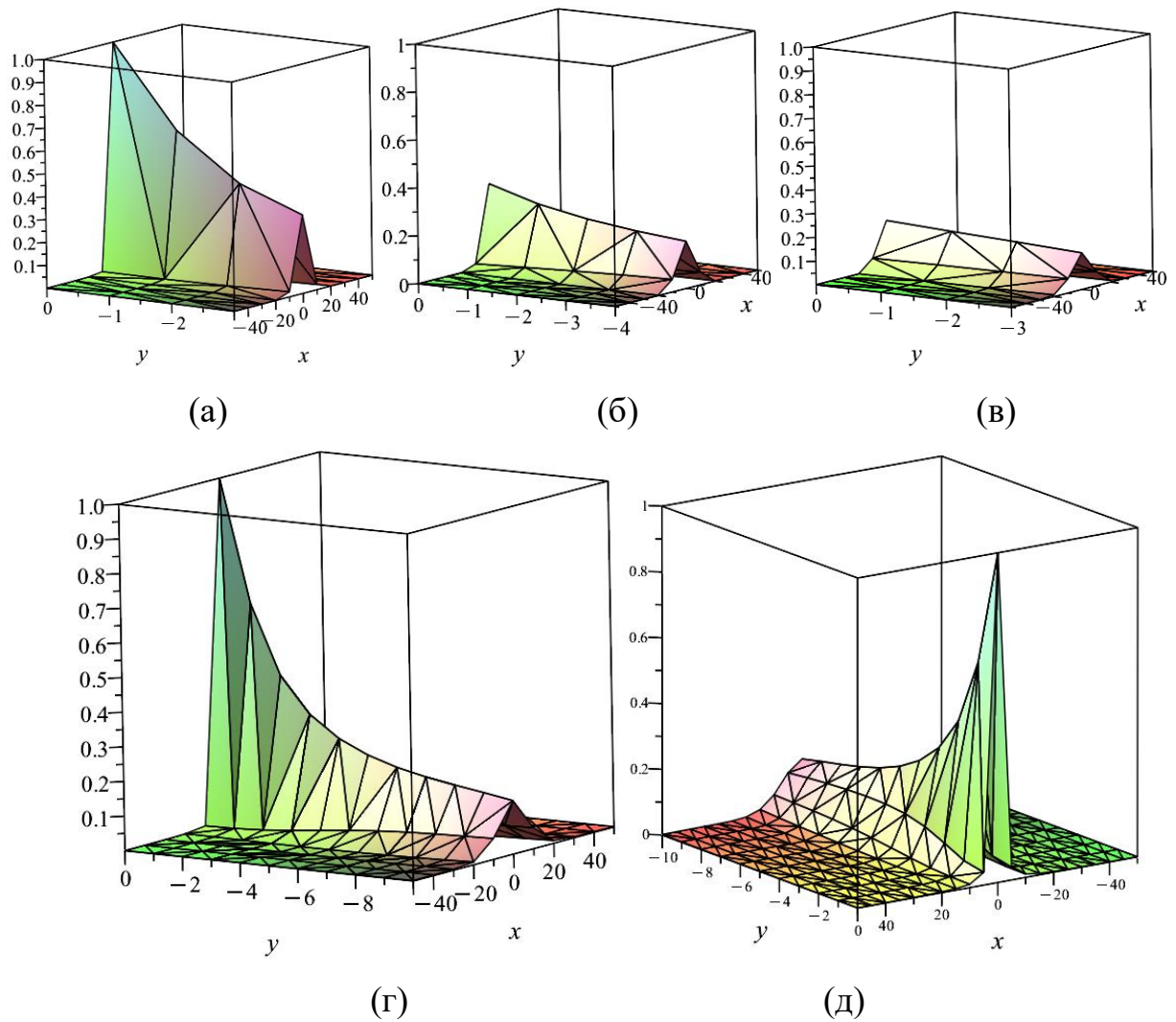


Рисунок 4.10 – Значення напружень  $\sigma_y^1(x, y)$  (а),  $\sigma_y^2(x, y)$  (б),  $\sigma_y^3(x, y)$  (в),  $\sigma_y^{1,2,3}(x, y)$  (г),  $\sigma_y(x, y)$  (д)

Як бачимо на рис. 4.10 значення напружень  $\sigma_y(x, y)$  шару приймають найбільші значення поблизу  $x = 0$  для кожного  $y$ , а при віддалені від  $x = 0$  значення напружень зменшуються та на нескінченності прямують до нуля. Це свідчить про виконання межових умов та умов на нескінченності. Також отримані результати свідчать про виконання умов контакту між шарами.

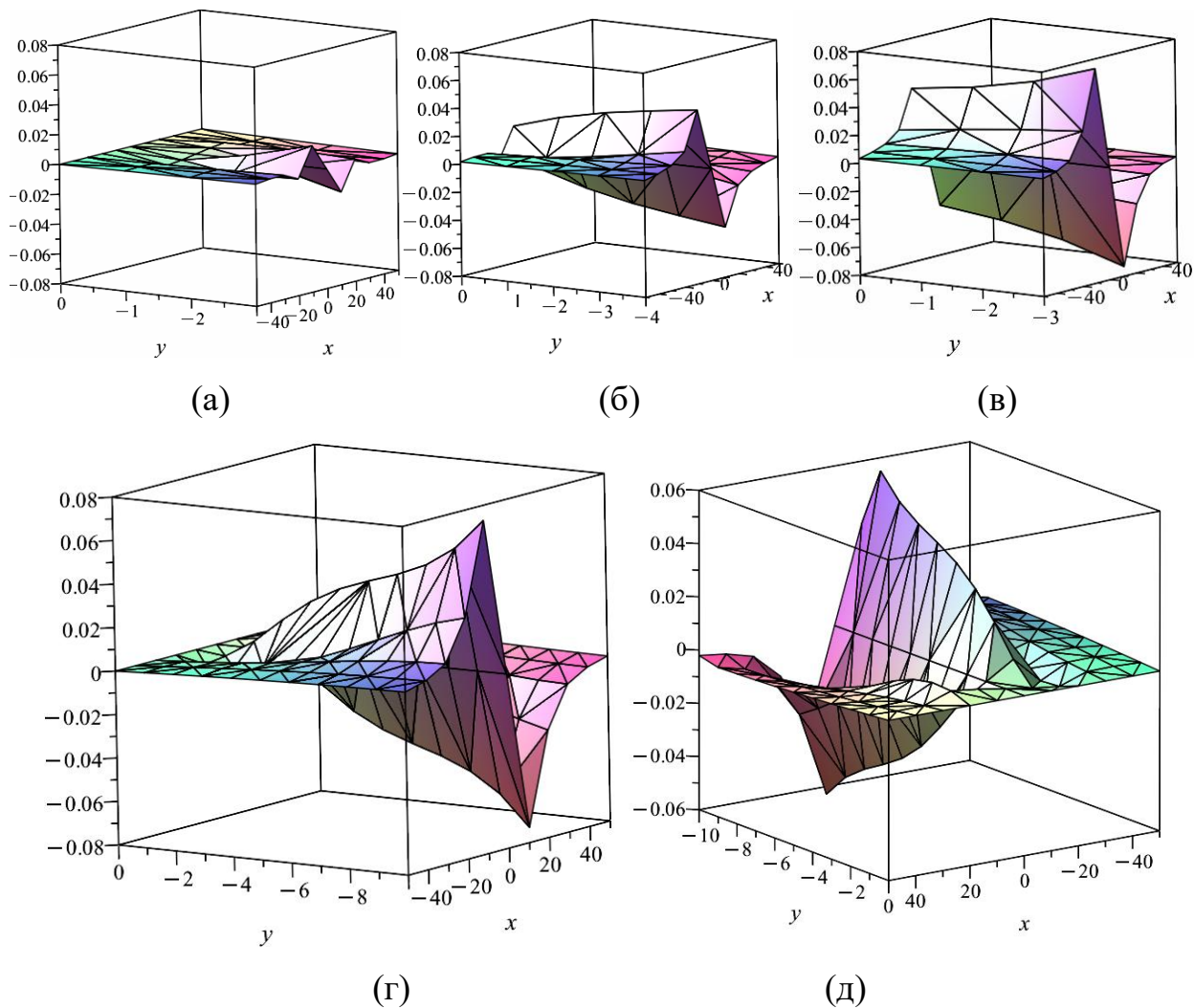


Рисунок 4.11 – Значення напружень  $\tau_{xy}^1(x, y)$  (а),  $\tau_{xy}^2(x, y)$  (б),  $\tau_{xy}^3(x, y)$  (в)

$$\tau_{xy}^{1,2,3}(x, y) \text{ (г), } \tau_{xy}(x, y) \text{ (д)}$$

Отримані результати для  $\tau_{xy}(x, y)$  свідчать про виконання межових умов  $\tau_{xy}(0,0) = 0$ , умов на спільній межі між шарами та умов на нескінченності.

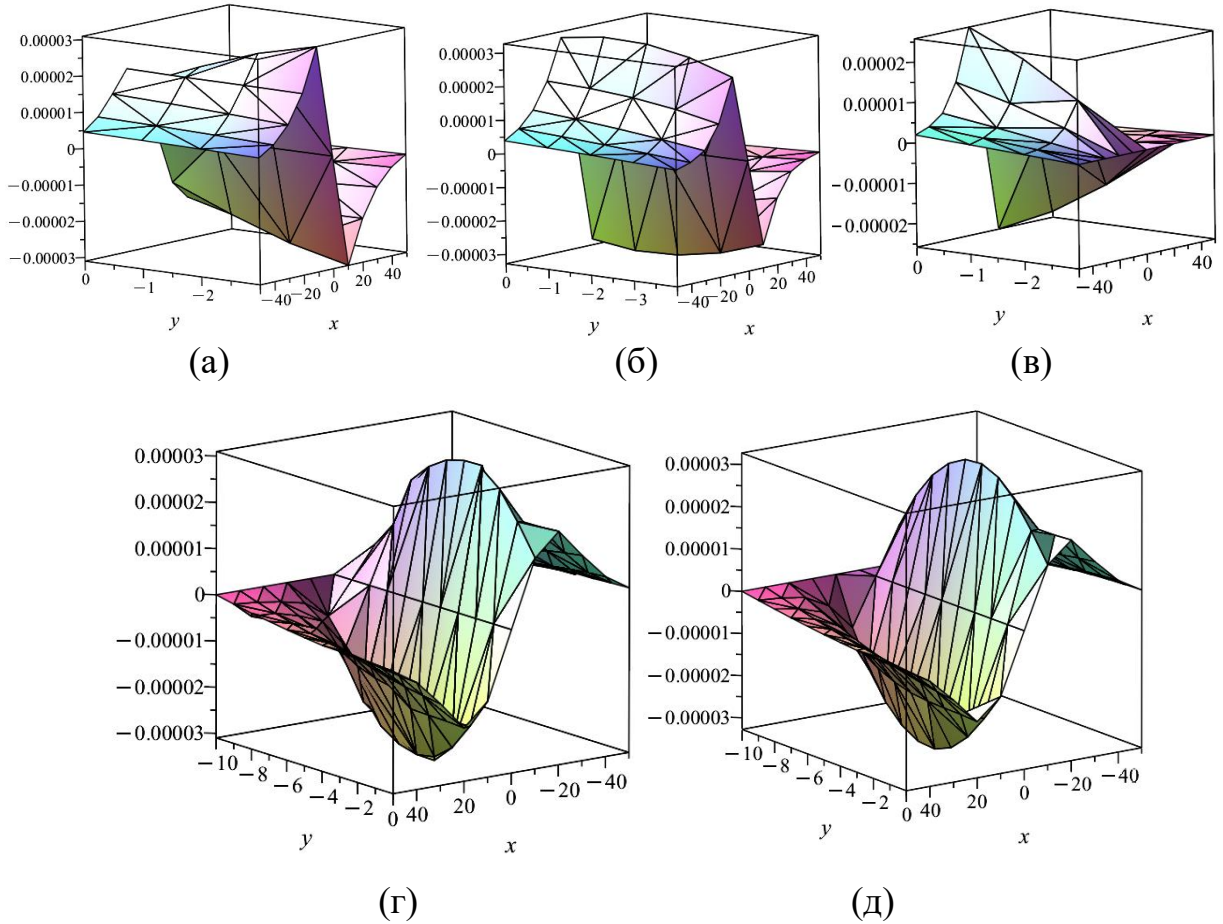


Рисунок 4.12 – Значення переміщень  $u_x^1(x, y)$  (а),  $u_x^2(x, y)$  (б),  $u_x^3(x, y)$  (в)  
 $u_x^{1,2,3}(x, y)$  (г),  $u_x(x, y)$  (д)

Отримані результати рис. 4.12 свідчать про виконання умов на спільній межі між шарами та межових умов  $u_x(x, -10) = 0$ .

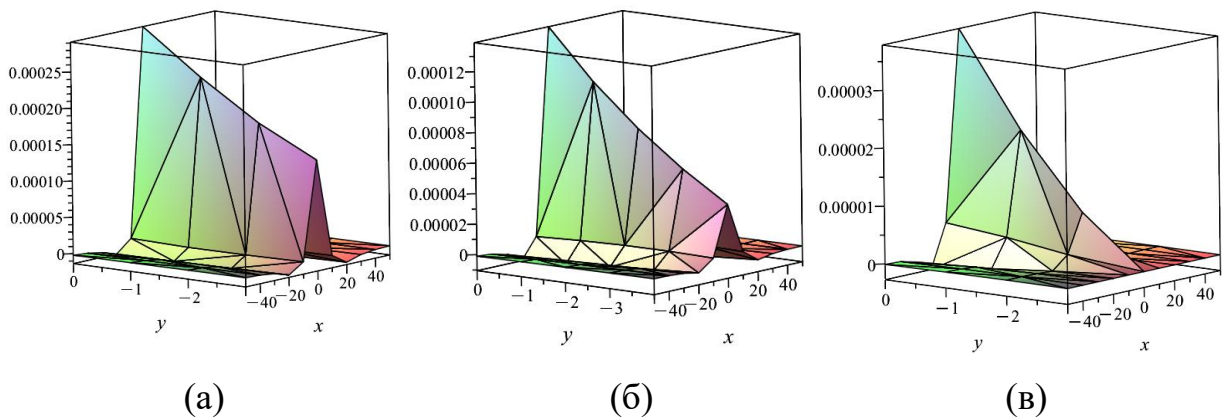


Рисунок 4.13 – Значення переміщень  $u_y^1(x, y)$  (а),  $u_y^2(x, y)$  (б),  $u_y^3(x, y)$  (в)

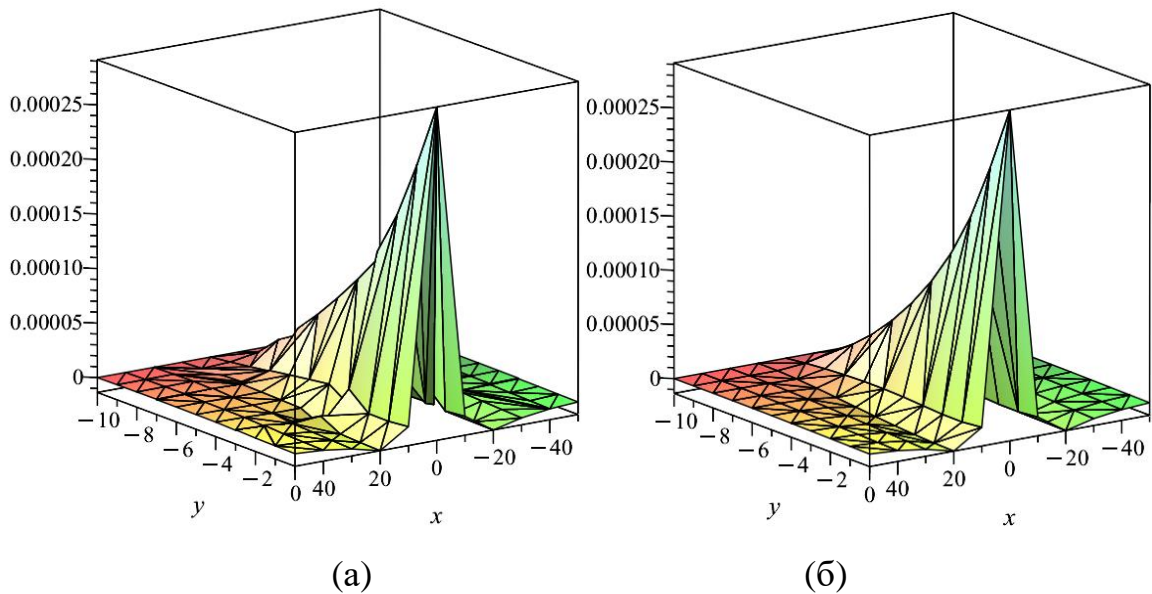


Рисунок 4.14 – Значення переміщень  $u_y^{1,2,3}(x, y)$  (а),  $u_y(x, y)$  (б)

Аналіз рис.4.13-4.14 свідчить про виконання межових умов  $u_y(x, -10) = 0$ , а також отримані результати свідчать про виконання умов контакту між шарами.

#### 4.7. Висновки до розділу 4

В четвертому розділі було сформульовано постановки задач для багат шарової основи з ортотропними шарами, побудовано математичну модель і запропоновано підхід до розв'язання задач для ортотропного матеріалу, тим самим дістали подальшого розвитку математичні моделі механіки багат шарових середовищ, метод функцій податливості.

Запропонований підхід до розв'язання задачі базується на застосуванні методу одновимірного інтегрального перетворення Фур'є та методу функцій податливості для багат шарових основ.

Сформульований в розділі алгоритм враховує особливості властивостей ортотропного матеріалу і дозволяє отримувати аналітичні розв'язки в просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є.

Вперше поширено метод функцій податливості, розроблений для багат шарових основ з ізотропними шарами, на задачі для багат шарових основ з ортотропними шарами.

Вперше виведені рекурентні формули функцій податливості для багат шарової ортотропної основи та проведено їх дослідження.

Вперше отримано розрахункові формули, необхідні для реалізації алгоритму знаходження напружень і переміщень в ортотропній багат шаровій основі в умовах плоскої деформації.

Розв'язано задачу про дію поверхневого навантаження на тришарову основу, отримано числові результати і проведено їх аналіз, що підтверджує ефективність застосування запропонованого підходу.

Основні наукові і практичні результати даного розділу опубліковано в роботах [38, 111].

## ВИСНОВКИ

В даній дисертаційній роботі розв'язано актуальну проблему розробки ефективного підходу до визначення напружено-деформівного стану тіл (шарів, півплощин, двошарових тіл та багатошарових основ) з урахуванням особливостей ортотропного матеріалу.

В ході дослідження було отримано такі наукові результати:

– проведений аналіз предметної області, огляд методів та підходів до досліджень напружено-деформівного стану пружних ізотропних та анізотропних тіл, шаруватих структур і ортотропних матеріалів, дозволили зробити висновок про ефективність застосування методів інтегральних перетворень у поєднанні з методом функцій податливості до розв'язання задач теорії пружності механіки деформівного твердого тіла, та необхідність поширення методик розроблених для ізотропних та трансверсально ізотропних шаруватих тіл на задачі для ортотропних тіл та середовищ.

– сформульовано постановки задач для багатошарової основи з ортотропними шарами, побудовано математичну модель і запропоновано підхід до розв'язання для ортотропного матеріалу, тим самим дістали подальшого розвитку математичні моделі механіки багатошарових середовищ та метод функцій податливості;

– сформульовано алгоритм розв'язку першої основної граничної задачі плоскої теорії пружності для багатошарової основи з ортотропними шарами, який враховує особливості властивостей ортотропного матеріалу і дозволяє отримувати аналітичні розв'язки в просторі трансформант Фур'є;

– вперше отримано розрахункові формули для ортотропних шару, півпростору, двошарового та багатошарового тіла в умовах плоскої деформації, що враховують три випадки коренів характеристичного рівняння бігармонічного диференціального рівняння для ортотропного матеріалу;

- вперше поширено метод функцій податливості, розроблений для багатосферних основ з ізотропними сферами, на задачі для багатосферних основ з ортотропними сферами;
- вперше виведені рекурентні формули функцій податливості для багатосферної ортотропної основи та проведено їх дослідження;
- розв’язано конкретні задачі про дію поверхневого навантаження на сферу, півплощину, двошарову та багатосферну основи, які можуть виступати тестовими для подальшого розвитку теорії та практики у механіці неоднорідних структур;
- виконані в роботі чисельні розрахунки підтверджують ефективність запропонованого підходу.

Результати дисертаційної роботи було впроваджено в навчальний процес Запорізького національного університету при викладанні дисципліни «Математичні моделі механіки суцільного середовища» (Додаток А).

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антоненко Н. М. Задача про осесиметричне кручення багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2016. Т. 59, № 2. С. 109–115. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/MMPPhMP\\_2016\\_59\\_2\\_13](http://nbuv.gov.ua/UJRN/MMPPhMP_2016_59_2_13).
2. Антоненко Н. М. Плоска деформація багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна*. 2013. Вип. 23. №1089. С. 15–21.
3. Антоненко Н. М. Плоска термопружна деформація багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. Харків, 2018. Вип. 39. С. 4–13. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/11642>
4. Антоненко Н. М. Плоска термопружна деформація пружно зчепленої з жорсткою півплощиною багатошарової плити. *Фізико-хімічна механіка матеріалів: міжнародний науково-технічний журнал*. 2017. Т. 53. № 3. С. 105–112. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/PHKhMM\\_2017\\_53\\_3\\_17](http://nbuv.gov.ua/UJRN/PHKhMM_2017_53_3_17)
5. Антоненко Н. М. Просторова деформація багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. *Фізико-хімічна механіка матеріалів: міжнародний науково-технічний журнал*. 2014. Т. 50. № 4. С. 55–61.
6. Антоненко Н. М., Величко І. Г. Узагальнення методу функцій податливості на випадок плоскої деформації багатошарової основи при наявності дотичних і нормальних пружних зв'язків між шарами. *Вісник Дніпропетровського національного університету. Серія: Механіка*. Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. Вип. 14. Т. 1, № 5. С. 39–45.
7. Антоненко Н. М., Ткаченко І. Г. Осесиметрична термопружна деформація багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна*,

серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». 2021. Т. 50. С. 6–13. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2021-50-01>

8. Бельмас І. В., Білоус О. І., Танцура Г. І. Визначення напружено-деформованого стану багатошарового композиту. *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн.* К.: КНУБА. 2022. Вип. 109. С. 426–440. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.109.426-440>

9. Божидарник В. В., Сулим В. В. Елементи теорії пластичності та міцності. Львів: Світ, 1999. Т. 1. 532 с.

10. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994. 560 с.

11. Бойко С. Б., Величко О. В. Аналітичний метод визначення теплових стаціонарних полів у шаруватих конструкціях. *Вісник ТНТУ.* 2015. Т. 77. № 1. С. 257–266.

12. Величко І. Г. Матричний формалізм методу функцій податливості *Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки. Біологічні науки.* Запоріжжя, 2000. С. 50–59.

13. Величко І. Г. Метод функцій податливості для пружних багатошарових основ з трансверсально-ізотропними шарами: автореф. дис. на здобуття ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла. Дніпропетровськ. 2001. 20 с.

14. Величко І. Г. Розв'язок основних крайових задач плоскої теорії пружності для багатошарових основ з трансверсально-ізотропними шарами. *Вісник ЗДУ. Фізико-математичні науки. Біологічні науки.* 1999. № 2. С. 21–28.

15. Величко І. Г., Антоненко Н. М. Плоска деформація смуги, яка лежить на пружній півплощині при наявності пружних зв'язків на їх спільній межі. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна.* 2011. № 967. С. 51–62.

16. Величко І. Г., Ткаченко І. Г. Осесиметрична мішана задача термопружності для багатошарової основи. *Динамічні системи*. 2009. Вип. 26. С. 3–12.
17. Величко І. Г., Ткаченко І. Г. Плоска термопружна деформація багатошарової основи. *Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. 2004. Вип. 8. Т. 1, № 6. С. 154–161.
18. Величко І. Г., Ткаченко І. Г. Просторова та осесиметрична термопружна деформація багатошарової основи. *Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. 2004. Вип. 8. Т. 2, № 6/2. С. 36–43.
19. Величко О. В. Плоска деформація пружної багатошарової плити під дією періодичної системи навантажень. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка»*. 2004. № 6. Вип. 8. Т. 1. С. 162–170.
20. Величко О. В. Плоска періодична контактна задача для багатошарової основи. *Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Механіка*. 2005. Вип. 9. Т. 1. № 10/1. С. 118–124.
21. Гарт Е. Л. Застосування проєкційно-ітераційної модифікації методу скінченних елементів до дослідження пружного багатошарового тіла. *Вісник Львівського університету. Серія Прикладна математика та інформатика*. 2008. Вип. 14. С. 75–81.
22. Гембара В. М., Максимович Я. В., Шваб'юк В. І. Пружна рівновага смуги, навантаженої штампом і зосередженими силами. *Наукові записки Української академії друкарства: Зб. наук. праць*. 1999. № 1. С. 129–133.
23. Гоменюк С. І., Спиця О. Г. Аналітичний та чисельний підходи до розв'язання задач теорії пружності для багатошарових середовищ: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2018. 128 с.
24. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.

25. Григоренко Я. М., Мольченко Л. В. Основи теорії пластин та оболонок. К.: Либідь, 1993. 232 с.
26. Григоренко Я. М., Мольченко Л. В. Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності: підручник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009. 403 с.
27. Григоренко Я. М., Мукоєд А. П. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ: Навчальний посібник. К.: Либідь, 1992. 152 с.
28. Гриліцький Д. В. До задачі про тиск жорсткої шайби на коловий отвір в ортотропній пластинці. *Прикладна механіка*. 1973. Т. 9, № 3. С. 307–313.
29. Гриліцький Д. В., Попович Б. І. Плоскі контактні задачі термопружності: навч. посіб. Львів: Вища школа. В-во при ЛДУ, 1973. 115 с.
30. Делявський М. В., Здолбіцька Н. В., Онишко Л. Й., Здолбіцький А. П. Визначення напружено-деформованого стану в тонких ортотропних плитах на пружній основі Вінклера. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2014. Т. 50, № 6. С. 15–22.
31. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Алгоритм знаходження напружено-деформованого стану пружного ортотропного шару. *Scientific discussion*. 2022. № 64. С. 16–20.
32. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Визначення напружено-деформованого стану прямокутної ортотропної пластини. *Актуальні проблеми математики та інформатики: тези доповідей Дванадцятій Всеукраїнської, дев'ятнадцятій регіональної наукової конференції молодих дослідників*. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2021. С. 97–99.
33. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Дослідження напружено-деформованого стану ортотропної півплощини в умовах плоскої деформації. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2022. № 1. С. 23–30. <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-03>
34. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Дослідження плоскої деформації пружного ортотропного шару. *Актуальні проблеми математики та*

*інформатики*: тези доповідей Тринадцятої Всеукраїнської, двадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2022. С. 78–79.

35. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Задача про дію зосередженої сили на ортотропну півплощину. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2024. № 1. С. 11–18. <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-1-02>

36. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Задача Фламана для ортотропної півплощини. *Актуальні проблеми математики та інформатики*: тези доповідей П'ятнадцятої Всеукраїнської, двадцять другої регіональної наукової конференції молодих дослідників. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2024. С. 78–79.

37. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Особливості обчислення функції напружень пружного ортотропного шару в умовах плоскої деформації. *Молода наука-2022*: збірка наукових праць XV університетської науково-практичної конференції студентів, аспірантів, докторантів і молодих вчених. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2022. С. 14–15.

38. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Постановка першої основної граничної задачі для багатошарової основи з ортотропними шарами. *Актуальні проблеми математики та інформатики*: тези доповідей чотирнадцятої Всеукраїнської, двадцять першої регіональної наукової конференції молодих дослідників. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2023. С. 142–143.

39. Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В. Про один підхід до визначення напружено-деформівного стану пружного ортотропного шару. *Proceedings of the IX International scientific and practical conference Berlin*. 2022. С. 206–211.

40. Довбня К. М. Розвиток методу граничних інтегральних рівнянь в теорії ортотропних оболонок з розрізами та отворами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04. ІППММ НАН України. Львів, 2002. 36 с.

41. Довбня К. М. До питання дослідження концентрації напружень у ортотропній оболонці з отвором довільної конфігурації. *Доп. НАН України. Сер. А.* 2001. № 8. С. 33–36.
42. Жук М., Кіндибалюк А., Щербина Н. Аналітико-числовий підхід до розв'язування задачі про згин прямокутних ортотропних пластин на пружній основі. *Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика.* 2014. № 21. С. 84–98.
43. Зіновєєв І. В. Визначення напружено-деформованого стану багатошарової основи із щілиною між шарами. *Вісник Запорізького державного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. Біологічні науки.* 1999. № 1. С. 53–59.
44. Зіновєєв І. В. Матричний формалізм методу функцій податливості для багатошарових основ складної структури. *Вісник Запорізького національного університету.* 2008. № 1. С. 75–79.
45. Зіновєєв І. В. Плоска деформація багатошарових основ з тріщинами в шарах. *Вісник ЗДУ.* 2001. № 2. С. 54–60.
46. Зіновєєв І. В., Дзундза Н. С. Розв'язання основних крайових задач для ортотропного шару. *Дослідження в математиці і механіці.* 2023. Т. 28, № 1-2 (41-42). [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305252](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305252)
47. Зіновєєв І., Манько Н., Спиця О. Використання методу функцій податливості в задачах теорії пружності для шаруватих середовищ. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: тези доп. Другої міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті акад. НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя від дня народження).* Дніпро, 2019. С. 88.
48. Зіновєєв, І. В. Плоска деформація багатошарових основ з тріщинами в шарах. *Вісник запорізького державного університету.* 2001. № 2. С. 54–60.
49. Кагадій Т. С., Шпорта А. Г., Білова О. В., Щербина І. В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим

елементом. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2020. Т. 3. № 2.1. С. 107–116. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.10>

50. Кільчевський М. О. Курс теоретичної механіки. Т. 1-2. К., 1955. 466 с.

51. Кільчинський О. О., Массалітіна Є. В. Метод пом'якшення нев'язок для круглої пластини під дією масових сил. *Український математичний журнал*. 2018. Т. 70, № 4. С. 481–494.

52. Кільчинський О. О., Массалітіна Є. В. Уточнений метод пом'якшення нев'язок для ортотропної пластини. *Зб. наук. праць ДЕТУТ. Сер. Транспортні системи і технології*. 2014. № 24. С. 163–172.

53. Кіт Г. С., Михаськів В. В., Хай М. В. Метод потенціалів у тривимірних статичних і динамічних задачах теорії тріщин. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1996. Т. 32, № 1. С. 22–32.

54. Кіт Г. С., Хай М. В., Михаськів В. В. Розв'язання тривимірних динамічних задач для тіл з тріщинами за допомогою класичних хвильових потенціалів. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1993. Т. 29, № 3. С. 106–113.

55. Курпа Л. В., Лінник А. Б. Застосування теорії R-функцій до задач стійкості та коливань ортотропних пластин. *Вісник Запорізького державного університету*. 2000. № 1. С. 67–71.

56. Кучер О. Г., Харитон В. В. Розрахунок деформованого стану криволінійної багатоплощинної пластини з числовими визначенням матриці жорсткості. *Вісник Національного авіаційного університету*. 2004. Вип. 19. № 1. С. 92–97. <https://doi.org/10.18372/2306-1472.19.982>

57. Лазарева Д. В. Вільні коливання ортотропних пластин. *Вісник Київського національного університету технологій та дизайну. Серія Технічні науки*. 2019. № 5 (138). С. 53–61.

58. Лобанов Л. М., Єрмолаєв Г. В., Квасницький В. В., Махненко О. В., Єгоров Г. В., Лабарткава А. В. Напруження та деформації при зварюванні і паянні: підручник. Миколаїв: НУК, 2016. 246 с.

59. Манько Н. І.-В. Аналітичні та чисельні підходи до розв'язання контактних задач механіки багатошарових слабкостисливих матеріалів: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. Запоріжжя, 2020. 20 с.
60. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості К.: Вища школа, 2002. 308 с.
61. Павленко І. В. Розрахунок ортотропних пластин чисельно-аналітичним методом граничних елементів. *Праці Одес. політехн. ун-ту*. 2012. № 1 (38). С. 15–23.
62. Павленко І. В., Курган В. О. Експериментальні дослідження напружено-деформованого стану ортотропних пластин. *Праці Одеського політехнічного університету*. 2013. № 2 (41). С. 31–37.
63. Приварников А. К., Спиця О. Г. Осесиметричні контактні задачі для пружних багатошарових плит. *Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки*. 2005. Вип. 1. С. 53–57.
64. Приварников А. К., Ламзюк В. Д. *Пружні багатошарові основи*. Дніпропетровськ, 1985. 162 с.
65. Приварников А. К. Двовимірні граничні завдання теорії пружності для багатошарових основ. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 1990. 84 с.
66. Сало В. А. Чисельно-аналітичний метод розв'язання задач статички нетонких ортотропних оболонок з отворами довільних розмірів і форм: дисертація д-ра техн. наук: 01.02.04. Харків, 2003.
67. Селіванов М. Ф., Кульбачний Є. Р., Онищенко Д. Р. Дослідження зміни концентрації напружень з часом у в'язкопружному ортотропному тілі. *Доповіді Національної академії наук України*. 2020. №10. С. 28–34. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.028>
68. Селіванов М. Ф., Процан В. В. Порівняння двох потенціальних когезійних моделей для прогнозування граничного рівня навантаження скінченної ортотропної пластини з похилою тріщиною. *Доповіді Національної*

*академії наук України*. 2020. № 7. С. 32–42.  
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.07.032>

69. Спиця О. Г. Аналітико-чисельний підхід до розв'язання основних граничних задач для багатошарових плит. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 266–277.

70. Столярчук І. А. Періодична контактна задача плоскої теорії пружності для багатошарових основ. *Динаміка наукових досліджень – 2006*. Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції. Т. 7. Дніпропетровськ, 2006. С. 11–16.

71. Столярчук І. А. Просторова періодична задача для багатошарових основ. *Вісник ЗДУ*. 1998. №2. С.128–135.

72. Сур'янінов М. Г. Визначення фундаментальних функцій в задачі вигину ортотропної пластини. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 2011. № 4. С. 164–168.

73. Сур'янінов М. Г., Павленко І. В. Додаток чисельно-аналітичною методу граничних елементів до розрахунку ортотропних. *Праці Одеського політехнічного університету*. 2014. №1 (43). С. 18–27.  
<https://doi.org/10.15276/opu.1.43.2014.04>

74. Сур'янінов М. Г., Павленко І. В. Перетворення зовнішнього навантаження в задачі згину ортотропної пластини. *Ресурсоекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. 2012. Вип. 24. С. 263–270.

75. Сяський А. О., Батишкіна Ю. В. Контактна взаємодія розімкнених стрижнів змінної жорсткості з еліптичним отвором нескінченної ортотропної пластинки. *Вісник Тернопільського національного університету*. Т. 9. № 3. 2004. С. 17–24.

76. Ткаченко І. Г. Двовірна мішана задача термопружності для багатошарової основи. *Прикладні проблеми механіки та математики*. 2005. Вип. 3. С. 70–78.

77. Ткаченко І. Г., Антоненко Н. М., Морозов Ю. В. Плоска задача теплопровідності для багатошарової основи з неідеальним тепловим

контактом між шарами. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2020. №1. С. 93–99. <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-12>

78. Ткаченко І. Г. Двовимірна задача про контакт нагрітого штампа та багатошарової основи. *Вісник Дніпропетровського університету. Механіка*. 2005. Вип. 9. Т. 1, № 10/1. С. 139–146.

79. Трач В. М., Подворний А. В., Хоружий М. М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: монографія. Київ: Видавництво Каравела. 2019. 274 с. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/26011>

80. Угрімов С. В., Тормосов Ю. М., Куценко В. А., Лебединець І. В. Моделювання напружено-деформованого стану шаруватих ортотропних пластин на пружній основі. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies* 2014. Вип.5. №7 (71). С. 4–9. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.27632>

81. Шевляков Ю. А., Приварников А. К. До розрахунку шаруватих основ. *Прикладна механіка*. 1962. Т. 8. № 2. С. 113–119.

82. Шевченко В. П., Гольцев А. С., Довбня К. М. Методи фундаментальних розв'язків у механіці тонкостінних конструкцій. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2001. Т. 37. № 3. С. 21–28.

83. Шевченко В. П., Довбня К. М. Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах статички пологих ортотропних оболонок із розрізами й отворами. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 2003. Т. 46. № 1. С. 47–59.

84. Шевченко В. П., Довбня К. М. Система граничних інтегральних рівнянь для ортотропної оболонки з розрізом довільної конфігурації. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2001. Т. 44. № 1. С. 103–108.

85. Щербина Н., Жук М., Кіндибалюк А. Наближене розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі про тримальну здатність ортотропних пластин. *Вісник Львівського університету. Серія приклад. матем. та інформ.* 2011. Вип. 17. С. 116–128.

86. Щербина Н. М., Жук М. В. Комбінований алгоритм розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2005. Т. 48. № 4. С. 133–139.

87. Ai, Z. Y., Yue, Z. Q., Tham, L. G., & Yang, M. (2002). Extended Sneddon and Muki solutions for multilayered elastic materials. *International Journal of Engineering Science*, 40(13), 1453–1483. [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(02\)00022-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00022-8)
88. Andrews, L. C., & Shivamoggi, B. K. (1999). *Integral Transforms for Engineers*. SPIE Press, University of Central Florida.
89. Andrianov, I. V., Awrejcewicz, J., & Manevitch, L. I. (2004). *Asymptotical Mechanics of Thin-Walled Structures*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 535 p.
90. Antonenko, N. M. (2017). Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Plate Elastically Coupled with a Rigid Half Plane. *Materials Science*, 53(3), 407–416.
91. Antonenko, N. M., Tkachenko, I. H., & Shupchynska, K. S. (2023). Axisymmetric thermoelastic deformation of a multilayer foundation with imperfect thermal contact of its layers. *Math. Sci.*, 273(1), 144–152, <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06490-2>
92. Antony, S. J., & Chandrashekhara, K. (1997). Contact stresses for a footing on an orthotropic elastic medium. *Strain*, 33(4), 127–132. <https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.1997.tb01060.x>
93. Ariño, S. B., & Frechín, M. M. (2006). Methods for modelling the ultimate strength of orthotropic plate with a central hole under uniaxial tension. *Journal of Materials Science*, 41(13), 4365–4372.
94. Awrejcewicz, J., Andrianov, I. V., & Manevitch, L. I. (1998). *Asymptotic Approaches in Nonlinear Dynamics: New Trends and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
95. Barber, J. R. (2004). *Elasticity* (Second Edition). Solid mechanics and its applications, 107. Kluwer academic publishers, New York, Boston, Dordrecht, London. <https://doi.org/10.1007/0-306-48395-5>
96. Bou Matar, O., Gasmi, N., Zhou, H., Goueygou, M., & Talbi, A. (2013). Legendre and Laguerre polynomial approach for modeling of wave propagation in

layered magneto-electro-elastic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(3), 1415–1424. <https://doi.org/10.1121/1.4776198>

97. Burmister, D. M. (1945). The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems. I. *Journal of Applied Physics*, 16(2), 89–94. <https://doi.org/10.1063/1.1707558>

98. Burmister, D. M. (1945). The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Soil Systems. II. *Journal of Applied Physics*, 16(3), 126–127. <https://doi.org/10.1063/1.1707562>

99. Burmister, D. M. (1945). The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Soil Systems. III. *Journal of Applied Physics*, 16(5), 296–302. <https://doi.org/10.1063/1.1707590>

100. Carrera, E. (2000). An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite Structures*, 50(2), 183–198. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00099-4](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00099-4)

101. Chattopadhyay, L. (2005). Analytical solution for an orthotropic elastic plate containing cracks. *International Journal of Fracture*, 134, 305–317. <https://doi.org/10.1007/s10704-005-1721-0>

102. Chen, C. P., & Lakes, R. S. (1989). Dynamic wave dispersion and loss properties of conventional and negative Poisson's ratio polymeric cellular materials. *Cellular Polymers*, 8(5), 343–359.

103. Chen, S. S., Li, Q. H., Liu, Y. H., & Chen, H. T. (2013). Identification of elastic orthotropic material parameters by the scaled boundary finite element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(4), 781–787. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2013.01.015>

104. Chichulin, V., & Chichulina, K. (2017). Deriving a function of the bending axis of a profiled wall in the form of orthotropic plate. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5(7(89)), 30–37. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.109687>

105. Chou, Y. T. (1969). *General theory of stresses and displacements in elastic and viscoelastic layered systems*. Final Report, WESMPM698, Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS.
106. Darwish, F., Tashtoush, G., & Gharaibeh, M. (2013). Stress concentration analysis for countersunk rivet holes in orthotropic plates. *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 37, 69–78.
107. Delyavskyy, M., Rosiński, K., Zdolbicka, N., & Bilash, O. (2019). Macroelement analysis of thin orthotropic polygonal plate resting on the elastic Winkler's foundation. *AIP Conference Proceedings*, 2077, 020014 <https://doi.org/10.1063/1.5091875>
108. Deobald, L. R., & Gibson, R. F. (1988). Determination of elastic constants of orthotropic plates by a modal analysis/Rayleigh-Ritz technique. *Journal of Sound and Vibration*, 124(2), 269–283. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(88\)80187-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(88)80187-1)
109. Dos Reis, A., Lima Albuquerque, É., & Palermo Júnior, L. (2013). The boundary element method applied to orthotropic shear deformable plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(4), 738–746. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.11.009>
110. Dube, L. S., & Pandey, J. N. (1975). On the Hankel transform of distributions. *Tohoku Mathematical Journal*, 27(3), 337–354. <https://doi.org/10.2748/tmj/1203529246>
111. Dzundza, N. S., & Zinovieiev, I. V. (2023). Solution of the first basic boundary value problem of the plane elasticity theory for a multilayer base with orthotropic layers. *Computer Science and Applied Mathematics*, 2023(2), 45–51. <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2023-2-06>
112. Dzundza, N. S., & Zinovieiev, I. V. (2024). Stress-strain state of a two-layer orthotropic body under plane deformation. *Mathematical Modeling and Computing*, 11(2), 404–412. <https://doi.org/10.23939/mmc2024.02.404>
113. Dzyuba, A. P., & Sirenko, V. N. (2022). Algorithmization of the evaluation of physicomechanical characteristics of the material of multilayer

composite shells of revolution varying along the meridian. *Journal of Mathematical Sciences*, 263(1), 93–103. <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05909-6>

114. Erdogan, F. E., Ratwani, M., & Yuseoglu, U. (1974). On the effect of orthotropy in a cracked cylindrical shell. *International Journal of Fracture*, 10(3), 369–374.

115. Friis, E. A., Lakes, R. S., & Park, J. B. (1988). Negative Poisson's ratio polymeric and metallic foams. *Journal of Materials Science*, 23(12), 4406–4414. <https://doi.org/10.1007/BF00551671>

116. Fung, Y. C. (1968). *Foundations of Solid Mechanics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

117. Gang, H., & Kwak, H.-G. (2017). A strain rate dependent orthotropic concrete material model. *International Journal of Impact Engineering*, 103, 211–224. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2017.01.027>

118. Grigorenko, A. Ya., Müller, W. H., Grigorenko, Ya. M., & Vlaikov, G. G. (2016). *Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. General theory and applications of classical theory* (Vol. I). Berlin: Springer.

119. Grigorenko, A. Ya., Müller, W. H., Grigorenko, Ya. M., & Vlaikov, G. G. (2016). *Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. Applications of refined and three-dimensional theory* (Vol. II A). Berlin: Springer.

120. Grigorenko, A. Ya., Müller, W. H., Grigorenko, Ya. M., & Vlaikov, G. G. (2016). *Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. Applications of refined and three-dimensional theory* (Vol. II B). Berlin: Springer.

121. Grigorenko, Ya. M., Grigorenko, A. Ya., & Vlaikov, G. G. (2009). *Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models*. Kyiv: Akadempriodika.

122. Guorong, S., Mingkun, L., Yan, L., Yungchun, L., Bin, W., & Cunfu, H. (2018). Application of Legendre orthogonal polynomial method in calculating reflection and transmission coefficients of multilayer plates. *Wave Motion*. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.09.007>

123. Hildebrand, F. B., Reissner, E., & Thomas, G. B. (1949). *Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells*. Massachusetts Institute of Technology, Washington.
124. Huang, Y. H. (1967). Stresses and displacements in viscoelastic layered systems under circular loaded areas. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavements*, University of Michigan, (pp. 225–244).
125. Huang, Y. H. (1973). Stresses and strains in viscoelastic multilayer systems subjected to moving loads. *Highway Research Record*, (457), 60–71.
126. Huber, M. T. (1904). Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. *Annalen der Physik*, 4(1), 153–163.
127. Hwang, S. F. (1998). The buckling of an orthotropic layer on a half-space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 40(7), 711–721. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(97\)00071-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00071-4)
128. Igarashi, S., & Shibukawa, K. (1990). A refined theory of anisotropic thick plates. In G. Z. Voyiadjis & D. Karamanlidis (Eds.), *Advances in the Theory of Plates and Shells* (Studies in Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 27–44). Amsterdam: Elsevier.
129. Igarashi, S., Shibukawa, K., & Ozaki, M. (1988). An approximate theory of deformation of a thick plate (II): The case of an anisotropic thick plate. *Bulletin of the Japan Society of Precision Engineering*, 22(4), 289–294.
130. Jain, N. K., & Mittal, N. D. (2008). Finite element analysis for stress concentration and deflection in isotropic, orthotropic and laminated composite plates with central circular hole under transverse static loading. *Materials Science and Engineering: A*, 498(1–2), 115–124. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2008.04.078>
131. Jaśkowiec, J., Pluciński, P., Stankiewicz, A., & Cichoń, C. (2017). Three-dimensional modelling of laminated glass bending on two-dimensional in-plane mesh. *Composites Part B: Engineering*, 120, 63–82. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.02.034>

132. Jianguo, Wang., & Maokuang, H. (1991). Boundary element method for orthotropic thick plates. *Acta Mechanica Sinica*, 7(3), 258–266.
133. Khalfi, Y., Sallai, B., Dahmani, W., & Bellebna, Y. (2022). Buckling analysis of plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory. *Journal of Fundamental and Applied Sciences*, 14(1), 210–228. <http://dx.doi.org/10.4314/jfas.v14i1.11>
134. Khov, H., Li, W. L., & Gibson, R. F. (2009). An accurate solution method for the static and dynamic deflections of orthotropic plates with general boundary conditions. *Composite Structures*, 90(4), 474–481. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.04.020>
135. Kirakosyan, P. M., & Stepanyan, S. P. (2014). Stress–strain state of a two-layer circular orthotropic plate with low shear stiffness. *International Applied Mechanics*, 50, 593–604. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0658-2>
136. Lakes, R. (1987). Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*, 235(4792), 1038–1040.
137. Liu, C., Yu, J., Zhang, B., & Zhang, X. (2019). Reflection and transmission of elastic waves in the multilayered orthotropic couple-stressed plates sandwiched between two elastic half-spaces. *Applied Mathematical Modelling*, 75, 52–72. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.05.023>
138. Love, A. E. H. (1923). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. University Press, Cambridge, England, 274 p.
139. Mahajerin, E., & Sikarskie, D. L. (1986). Boundary element study of a loaded hole in an orthotropic plate. *Journal of Composite Materials*, 20(4), 375–389. <https://doi.org/10.1177/002199838602000405>
140. Maina, J., & Matsui, K. (2005). Elastic multi-layered analysis using DE-integration. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 41(4), 853–867. <https://doi.org/10.2977/prims/1145474598>
141. Maksimyuk, V. A., Storozhuk, E. A., & Chernyshenko, I. S. (2013). Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with

Reinforced Holes and Rigid Inclusions. *International Applied Mechanics*, 49(6), 685–692. <https://doi.org/10.1007/s10778-013-0602-x>

142. Mukhtar, F. M. (2016). Free vibration analysis of orthotropic plates by differential transform and Taylor collocation methods based on a refined plate theory. *Archive of Applied Mechanics*, 87(1), 15–40. <https://doi.org/10.1007/s00419-016-1172-2>

143. Nemish, Y. N. (2000). Development of analytical methods in three-dimensional problems of the statics of anisotropic bodies (Review). *International Applied Mechanics*, 36(2), 135–172. <https://doi.org/10.1007/BF02681992>

144. Nettles, A. T. (1994). *Basic Mechanics of Laminated Composite Plates*, NASA MSFC RP-1351.

145. Ohkami, T., Ichikawa, Y., & Kawamoto, T. (1991). A boundary element method for identifying orthotropic material parameters. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 15(9), 609–625. <https://doi.org/10.1002/nag.1610150902>

146. Patterson, L. D. (1949). Hooke's Gravitation Theory and Its Influence on Newton. I: Hooke's Gravitation Theory. *Isis*, 40(4), 327–341. <https://doi.org/10.1086/349086>

147. Petrolito, J. (2014). Vibration and stability analysis of thick orthotropic plates using hybrid-Trefftz elements. *Applied Mathematical Modelling*, 38(24), 5858–5869.

148. Piltner, R. (1994). Trefftz-type Boundary Elements for the Evaluation of Symmetric Coefficient Matrices. *Computational Mechanics*, 15(2), 137–160.

149. Pluciński, P., Jaskowiec, J., & Wójtowicz, M. (2021). Three-Dimensional Bending Analysis of Multi-Layered Orthotropic Plates by Two-Dimensional Numerical Model. *Materials*, 14, 6959. <https://doi.org/10.3390/ma14226959>

150. Poularikas, A. D. (Ed.). (2018). *Transforms and Applications Handbook* (3rd ed.). Boca Raton: CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781315218915>

151. Pytel', L. P., & Kukushkin, V. G. (1973). On the stress concentration near a cutout on the surface of an orthotropic cylindrical shell. *Translated from Prykladnaya Mekhanika*, 9(3), 114–117.
152. QFEM. FEM Solver. URL: <https://github.com/SeregaGomen/QFEM>
153. Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis* (2nd ed.). CRC Press INC.
154. Reddy, J. N. (2007). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC Press, Taylor and Francis.
155. Revenko, V. P. (1988). Analysis of the stress-strain state of a shallow orthotropic cylindrical shell with an elliptical hole. *Soviet Applied Mechanics*, 24(4), 368–373. <https://doi.org/10.1007/BF00883461>
156. Sadd, M. H. (2014). *Elasticity: Theory, Applications, And Numerics* (3rd ed.). Academic Press.
157. Salo, V., Rakivnenko, V., Nechyporenko, V. M., & Kirichenko, A. (2019). Calculation of stress concentrations in orthotropic cylindrical shells with holes on the basis of a variational method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(7), 11–17. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.169631>
158. Shi, G. (1990). Flexural vibration and buckling analysis of orthotropic plates by the boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*, 26(12), 1351–1370. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(90\)90083-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90083-8)
159. Sneddon, I. N. (1951). *Fourier Transforms*. McGraw-Hill Book Company.
160. Spinu, S. (2021). Numerical simulation of tri-layered materials under contact load. *International Journal of Modern Manufacturing Technologies*, 13(3). <https://doi.org/10.54684/ijmmt.2021.13.3.164>
161. Spysia, O., Gomenyuk, S., Zinoveyev, I., & Tkachenko, I. (2017). The Analytical and Numerical Approaches to Solve the Axisymmetric Contact Problem of Pressing a Stamp into an Elastic Multilayer Plate. *International Journal Of Mechanical Engineering And Information Technology*, 05(12), 1750-1754. URL: <http://www.igmpublication.org/ijmeit%20issue/v5-i12/2%20ijmeit.pdf>

162. Sun, L., Huang, Y., Liu, Z., & Cen, Z. (2004). Elasto-plastic analysis of two-dimensional orthotropic bodies with the boundary element method. *Computers, Materials & Continua*, 1(1), 91–106.
163. Suo, Z., Bao, G., Fan, B., & Wang, T. C. (1991). Orthotropy rescaling and implications for fracture in composites. *International Journal of Solids and Structures*, 28(2), 235–248. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90208-W](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90208-W)
164. Syasky, A., & Dejneka, O. (2019). Interphase incision on the limit welding of orthotropic plate with elliptical hole and closed elastic rib. *Scientific Journal of TNTU*, 95(3), 26–33. [https://doi.org/10.33108/visnyk\\_tntu2019.03.026](https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2019.03.026)
165. Timoshenko, S. P. (1983). *History of Strength of Materials*. New York: Dover.
166. Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1982). *Theory of Elasticity* (3rd ed.). McGraw-Hill.
167. Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw–Hill, New York.
168. Todhunter, I. (2014). *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials: From Galilei to the Present Time*. Cambridge University Press, Cambridge.
169. Vinson, J. R., & Chou, T. W. (1975). *Composite Materials and Their Use in Structures*. Applied Science Pub. Ltd., London.
170. Vlasov, V. S. (1951). *Basic Differential Equations in General Theory of Elastic Shells*. NASA TT F-99.
171. Vlasov, V. S. (1964). *General Theory of Shells and Its Applications in Engineering*. NASA TT F-99.
172. Wang, K. Y., Huang, Z. M., Li, P. C., & Liu, B. (2013). Trefftz finite element analysis of axisymmetric potential problems in orthotropic media. *Applied Mathematics and Mechanics*, 34, 462–469.
173. Wang, K. Y., Li, P. C., & Wang, D. Z. (2014). Trefftz-type FEM for solving orthotropic potential problems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11, 2537–2554.

174. Whitney, J. M., & Pagano, N. J. (1970). Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 37, 1031–1036.
175. Williams, J. (1973). *Laplace Transforms*. George Allen & Unwin, Problem Solvers.
176. Wongviboonsin, W., Le, T. M., Lawongkerd, J., Gourgiotis, P. A., & Rungamornrat, J. (2022). Microstructural effects on the response of a multi-layered elastic substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 241 (1–3). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111394>
177. Wu, P., Dong, J., Zhang, L., & Qin, Q.-H. (2019). Benchmark solution for multilayer magneto-electro-elastic plates adhesively bonded by viscoelastic interlayer. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 30(3), 445–462. <https://doi.org/10.1177/1045389X18812706>
178. Yang, P. C., Norris, C. H., & Stavsky, Y. (1966). Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2, 665–684.
179. Zenkour, A. M. (2011). Bending of orthotropic plates resting on Pasternak's foundations using mixed shear deformation theory. *Acta Mechanica Sinica*, 27(6), 956–962. <http://dx.doi.org/10.1007/s10409-011-0515-z>

## ДОДАТОК А

**Акт впровадження у навчальний процес Запорізького національного  
університету**

**Акт впровадження  
у навчальний процес Запорізького національного університету**

ЗАТВЕРДЖУЮ  
В.о. ректора Запорізького  
національного університету  
*М.О. Фролов*  
« 20 » \_\_\_\_\_ 2024 р.

**ДОВІДКА**

про впровадження результатів дисертаційної роботи Дзундзи Наталії Сергіївни «Напружено-деформівний стан пружних шаруватих тіл та середовищ з ортотропними шарами», виконаної у Запорізькому національному університеті

Комісія у складі:

Голова комісії: заступник з навчальної роботи декана математичного факультету ЗНУ, кандидат фізико-математичних наук, доцент Спиця О.Г.

Члени комісії: професор кафедри програмної інженерії, кандидат фізико-математичних наук, доцент Кудін О. В.; доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент Левчук С. А.

Засвідчує, що результати дисертаційної роботи Дзундзи Наталії Сергіївни «Напружено-деформівний стан пружних шаруватих тіл та середовищ з ортотропними шарами», а саме матеріали розділу «Моделювання та дослідження напружено – деформівного стану пружних ортотропних тіл та середовищ» п.2.1 Визначення напружено-деформівного стану ортотропного шару методом інтегрального перетворення Фур'є, п.2.2 Визначення напружено-деформівного стану ортотропної півплощини в умовах плоскої деформації, п.2.3 використано в освітній діяльності Запорізького національного університету при викладанні освітнього компоненту «Математичні моделі механіки суцільного середовища» (при викладанні матеріалів змістового модулю 5. «Інтегральні перетворення. Дослідження станів пружних шарів в просторах інтегральних перетворень» та змістового модулю 6 «Математичні моделі механіки багатошарових середовищ») для освітньо-наукової програми підготовки здобувачів третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти (ступеня доктора філософії) Прикладна математика з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Голова комісії:

Члени комісії:

  
\_\_\_\_\_  
  
\_\_\_\_\_

Спиця Оксана Геннадіївна

Кудін Олексій Володимирович

Левчук Сергій Анатолійович