РЕЦЕНЗІЯ

Д'яченко Наталії Миколаївни, кандидата фізико-математичних наук, доцента, доцента кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету на дисертацію ***Руденко Дар'ї Олексіївни*** *«Асимптотико-чисельний підхід у прикладних задачах механіки, що зводяться до сингулярних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами при наявності δ-функції», що подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 113 Прикладна математика*

Актуальність теми дисертаційного дослідження

Тематика дисертації є актуальною з огляду на сучасні потреби прикладної математики, а також через необхідність розробки наближених аналітичних та аналітико-чисельних методів для математичного моделювання фізичних процесів та явищ. Механічні й геометричні характеристики багатьох конструкцій залежать від координат, часу та змінних зовнішніх навантажень. Особливу наукову зацікавленість становлять системи з локалізованими збуреннями, які потребують дослідження нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами сингулярного типу.

Зазначені рівняння, як правило, містять параметри при старшій похідній, нелінійні компоненти та дельта-функцію Дірака. Зазвичай аналітичні методи тут не застосовні, що зумовлює потребу у наближених підходах. Для малих значень параметрів ефективними є асимптотичні методи, тоді як за межами цього діапазону перевага надається чисельним. Новітні дослідження свідчать про ефективність гібридних асимптотичних методів, здатних забезпечити досить точні наближені аналітичні розв'язки.

Крім того, такі підходи дозволяють надійно розв'язувати прикладні задачі з урахуванням залежностей властивостей конструкцій, зовнішніх впливів, а також початкових і крайових умов. Це створює основу для подальшого вдосконалення чисельних методів та розширення їх застосування у складному математичному моделюванні.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційне дослідження виконано в межах науково-дослідної теми: «Чисельні та аналітичні методи розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь задач механіки деформівного твердого тіла» (державний реєстраційний номер 0121U114696).

Наукова новизна

У дисертації **вперше**:

- запропоновано асимптотичний підхід для побудови наближеного аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння Дюффінга задачі динаміки систем зі змінними в часі коефіцієнтами, що містить дельта-функцію при першій похідній;

- отримано розв’язувальне диференціальне рівняння зі змінними у часі коефіцієнтами для задачі нелінійної динаміки функціонально-градієнтних матеріалів пологої оболонки із початковими недосконалостями та за умови, що оболонка знаходиться під впливом періодичних локалізованих навантажень; розроблено асимптотичний підхід для наближеного аналітичного розв’язання зазначеного рівняння;
- запропоновано новий підхід для визначення динамічних характеристик геометрично нелінійних систем зі змінними параметрами та нелінійною функцією демпфування, з урахуванням локалізованих збурень.

Теоретичне та практичне значення

Розроблені в дисертації підходи до розв’язання класу лінійних та нелінійних, однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь із дельта-функцією, що ґрунтуються на гібридних асимптотичних методах – таких як метод збурення та метод фазних інтегралів (ВКБ), – відкривають перспективи для їх застосування до інших класів задач. Проведений у дисертації порівняльний аналіз отриманих результатів із розв’язками, одержаними за допомогою системи комп’ютерної алгебри Mathematica, підтверджує ефективність запропонованих методів.

Розроблені теоретичні підходи та результати обчислень істотно розширюють інструментарій інженерного аналізу в галузі динаміки складних систем зі змінними в часі параметрами за умов дії локалізованих навантажень. Врахування різних типів задач, розглянутих у дисертації, забезпечує гнучкість і широкі можливості застосування запропонованих методів як у наближеному аналітичному, так і в аналітико-чисельному форматі, що відкриває нові перспективи для практичного впровадження отриманих результатів.

Одержані результати можуть бути використані для розв’язання прикладних задач математичної фізики у сферах: авіа- та ракетобудування, машинобудування, виробництва двигунів і промислового обладнання, робототехніки, радіоелектроніки.

Результати дисертаційного дослідження впровадженні у навчальний процес Запорізького національного університету в рамках курсу «Асимптотичні методи розв’язання крайових та початкових задач» для здобувачів третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Оприлюднення результатів

Основні положення дисертації висвітлено у 7 наукових публікаціях, зокрема:

- 3 статті у фахових виданнях України категорії Б;
- 4 тези доповідей, серед яких одна – на міжнародній конференції.

Оцінка змісту та основних положень дисертації

Дисертація (загальним обсягом 125 стор.) складається з: анотацій українською та англійською мовами (по 5 стор. кожна), списку опублікованих дисертанткою праць за темою дисертації, (2 стор.), переліку умовних позначень (1 стор.), вступу (5 стор.), чотирьох розділів (65 стор.), висновків (1 стор.), списку використаних джерел (148 найменувань на 20 стор.) та додатків (18 стор.).

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та завдання, окреслено методи й об'єкти дослідження, визначено наукову новизну та практичну значущість результатів.

Перший розділ містить аналітичний огляд сучасних чисельних і асимптотичних методів для дослідження диференціальних рівнянь зі змінними та розривними коефіцієнтами, а також рівнянь, що містять функцію Дірака. Огляд включає характеристику великої кількості публікацій, значна частина яких припадає на останні п'ять років. Це свідчить про здатність Руденко Д.О. здійснювати пошук, опрацювання та аналіз інформації з різних джерел, узагальнювати отримані дані та формулювати висновки.

На початку кожного розділу авторка також подає огляд джерел відповідно до тематики розділів.

Другий розділ присвячено дослідженню сингулярного нелінійного рівняння з малим параметром ε^2 при старшій похідній і змінними розривними коефіцієнтами за наявності дельта-функції. Розглянуте диференціальне рівняння Дюффінга моделює задачу динаміки системи з дискретно-неперервними властивостями, в якій коефіцієнти змінюються в часі, а дельта-функція при першій похідній виражає локалізований вплив.

В підрозділі 2.1 виводиться наближено-аналітичний асимптотичний розв'язок збуренням за параметром μ, що стоїть при нелінійному члені. Ураховано два наближення розв'язку рівняння Дюффінга в загальному вигляді за припущення, що неперервний множник при першій похідній $\alpha(t) = 0.$ Для розв'язання рівнянь відносно нульової та першої функції асимптотичного розкладу застосовано метод фазних інтегралів ВКБ за параметром ε, а також метод варіації довільних сталих.

У підрозділі 2.2 на характерному прикладі рівняння Дюффінга з функцією Дірака при першій похідній проведено порівняльний аналіз між розв'язками, знайденими дома способами: засобами системи комп'ютерної алгебри (СКА) Mathematica та наближеним аналітичним методом, запропонованим в розділі. Отримані результати демонструють достатній рівень узгодженості.

Третій розділ присвячено аналітичному підходу до моделювання динаміки пологих оболонок із функціонально-градієнтних матеріалів за наявності початкових недосконалостей і періодичних локалізованих навантажень. Розглянуто випадок шарнірного закріплення оболонки на кінцях.

У підрозділу 3.1 спочатку виписуються фізичні характеристики матеріалу оболонки. Далі наводиться система рівнянь в частинних похідних, що моделює

динаміку оболонки з початковими дефектами геометричної форми срединної поверхні, що знаходиться під впливом навантаження. Функції початкової недосконалості та невідоме деформування подаються у класичному вигляді для пологих оболонок з урахуванням динамічної складової $f(t)$, після чого пропонується застосування методу Бубнова-Гальоркіна, що дозволяє дисертантці вивести сингулярне розв'язувальне диференціальне рівняння зі змінними у часі коефіцієнтами відносно невідомої функції $f(t)$. Отримане диференціальне рівняння містить параметр ε^2 при старшій похідній, параметр μ стоїть при нелінійному члені, а доданок, заданий добутком дельта-функції на періодичну, визначає локалізоване періодичне навантаження.

Підрозділ 3.2 присвячений виведенню наближеного аналітичного розв'язку розв'язувального рівняння. Тут, так само, як у розділі 2, спочатку застосовується асимптотичний метод збурення за параметром μ, після чого, диференціальні рівняння відносно кожного з двох наближень розв'язані методом ВКБ за параметром ε з використанням методу варіації довільних сталих.

У підрозділі 3.3 обрано конкретні параметри розв'язуваного рівняння та здійснено порівняльний аналіз наближеного аналітичного розв'язку, отриманого асимптотичним підходом, із розв'язком, побудованим за допомогою системи комп'ютерної алгебри Mathematica. Результати набули достатній рівень узгодженості.

Четвертий розділ пропонує аналітико-чисельний підхід до задачі динаміки пружної системи зі змінними параметрами та нелінійною функцією демпфування. Підхід до отримання розв'язку є загальним у дисертаційній роботі. Особливість кожного розділу визначається місцем розміщення двох параметрів та дельта-функції. У підрозділі 4.1 досліджено однорідне диференціальне рівняння, в якому малий параметр ε стоїть при першій похідній нелінійного характеру y'^n, що відповідає за функцію демпфування; параметр $\lambda = \frac{1}{\mu} > 1$ – при y. У підрозділі 4.2 дельта-функція з'являється в неоднорідному диференціальному рівнянні для вираження локалізованого періодичного збурення.

Для прикладу обрано рівняння, яке дозволяє провести аналіз впливу всіх параметрів задачі. Виведено наближений аналітичний розв'язок для однорідного диференціального рівняння (без урахування локального збурення) з урахуванням нелінійного демпфування. Засобами СКА Mathematica отримані три розв'язки: для однорідного рівняння з нелінійним демпфуванням, для однорідного та неоднорідного диференціальних рівнянь за лінійного демпфування. У підрозділі 4.3 проведено порівняльний аналіз отриманих розв'язків, який свідчить про ефективність обраних методів розв'язання.

У *висновках* дисертаційної роботи підсумовано та структуровано основні наукові результати, здобуті в ході дослідження, з урахуванням особливостей поставленої наукової проблеми.

Дискусійні положення та зауваження

Попри високу якість, теоретичну та практичну значущість дисертаційної роботи, окремі аспекти дослідження можуть викликати наукову дискусію.

1. Підрозділи 2.1 та 4.1 містять рівняння певних фізичних процесів. Для кращого розуміння бажано було безпосередньо поруч з рівняннями надати посилання на джерела, де вони наводяться.
2. Доцільно було б виписати в підрозділ 2.1 диференціальне рівняння відносно першого наближення $y_1(t)$ розв'язку диференціального рівняння Дюффінга, а не лише його розв'язок. Це б полегшило сприйняття матеріалу підрозділу.
3. Розв'язок рівняння Дюффінга у підрозділі 2.1 шукали асимптотичним методом за параметром μ, де було знайдено два наближення розкладу. Але у підрозділі 2.2 розглядається приклад рівняння, де цей параметр μ разом з функцією $\tilde{N}_0(t)$, що визначає праву частину рівняння в другому наближенні та відповідає за кубічну нелінійність, обрано нульовими. Вибір ненульових значень дозволив би, провести аналіз впливу нелінійної компоненти та порівняти чисельний та наближені аналітичні розв'язки з урахуванням одного або двох наближень. Аналогічна рекомендація поширюється і на підрозділ 3.3.
4. У підрозділі 2.1 для розв'язання диференціального рівняння застосовується метод варіації довільних сталих. Тут довільні сталі мають виражатися через інтеграл від функції, що містить за множник функцію Дірака. Шукані сталі, як результат інтегрування, коректніше було б подати через функцію Гевісайта.
5. В підрозділі 3.1 виписано систему рівнянь в частинних похідних, що визначають динаміку пологої оболонки з початковими геометричними дефектами. Далі в роботі пропонується застосувати до неї метод Бубнова-Гальоркіна з подальшим виведенням розв'язувального звичайного диференціального рівняння. Але для цього потрібно задавати не лише функції переміщень w_0, w, а також і функцію зусиль ϕ. Подання для останньої в дисертації упущено.
6. Підрозділ 4.3 містить порівняльний аналіз графічного подання результатів задачі динаміки пружної системи зі змінними параметрами та нелінійною функцією демпфування. Проте в підрозділі міститься недостатньо інформації для розуміння, який саме тип розв'язку характеризує той чи інший із зображених графіків. Але потрібну інформацію можна знайти при аналізі коду в додатку В. Бажано було б навести детальнішу інформацію в основній частині роботи.

Варто підкреслити, що зазначені зауваження та запропоновані рекомендації жодним чином не применшують наукової значущості виконаного дослідження, не ставлять під сумнів його ключові результати та не нівелюють практичну цінність отриманих висновків.

Висновок про дисертаційну роботу

Дисертаційна робота Руденко Дар'ї Олексіївни «Асимптотико-чисельний підхід у прикладних задачах механіки, що зводяться до сингулярних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами при наявності δ-функції» є завершеним, логічним, послідовним та науково обґрунтованим науковим дослідженням, виконаним самостійно автором на актуальну тему. Дисертація «Асимптотико-чисельний підхід у прикладних задачах механіки, що зводяться до сингулярних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами при наявності δ-функції» відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженому постановою № 44 Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. (зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України від 21.03.2022 № 341, від 19.05.2023 № 502, від 03.05.2024 № 507), а її авторка Руденко Дар'я Олексіївна заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Рецензент
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри
фундаментальної та прикладної
математики Запорізького
національного університету Н.М. Д'яченко