

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ХАЛАНЧУК Лариса Вікторівна

УДК: 519.6:517.9

ДИСЕРТАЦІЯ
СТРУКТУРОВАНІ ДИСКРЕТНІ МОДЕЛІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВИХ
ЗАДАЧ

Спеціальність: 113 Прикладна математика

Галузь знань: 11 Математика та статистика

Подається на здобуття науково ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____ Л.В. Халанчук

Науковий керівник: Чопоров Сергій Вікторович, доктор технічних наук, доцент

Запоріжжя – 2021

АНОТАЦІЯ

Халанчук Л.В. Структуровані дискретні моделі для розв'язку крайових задач. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Запорізький національний університет, Запоріжжя, 2021.

Об'єктом дослідження є структуровані та блочно-структуровані сітки для геометричних моделей.

Предмет дослідження – методи генерації структурованих та блочно-структурованих сіток геометричних моделей.

У дисертації досліджено структуровані дискретні моделі для розв'язку крайових задач. **Метою дисертаційної роботи** є розробка математичного апарату для побудови структурованих та блочно-структурованих сіток із заданими параметрами згущення та гарантією якості моделі. Для реалізації поставленої мети в роботі поставлено наступні основні задачі:

- розробити і виконати апробацію методу отримання структурованих дискретних математичних моделей, що виконані на чотирикутних скінченних елементах, для двовимірних геометричних об'єктів за допомогою рівняння Пуассона;
- розробити методи оптимізації генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів за рахунок вибору способу початкового розбиття;
- розробити підходи до керування формою та інтенсивністю згущення ліній сітки до заданої зони моделі двовимірного та тривимірного геометричного об'єкта.

Методи дослідження ґрунтуються на математичному аналізі, аналітичній геометрії, математичному моделюванні та чисельних методах розв'язування диференціальних рівнянь.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, зазначено зв'язок роботи з науково-технічними проектами, сформульовано мету і завдання дослідження, визначено об'єкт, предмет та методи дослідження, показано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, наведено інформацію про практичне використання доробку, особистий внесок здобувача, апробацію результатів дослідження та їх висвітлення у наукових публікаціях. Приводяться відомості щодо структури та обсягу дисертаційної роботи.

В першому розділі проведено огляд сучасного стану генерації структурованих дискретних моделей, який є продовженням і доповненням попередніх досліджень, а саме: описано основні кроки для побудови сітки, які є загальними для багатьох підходів їх автоматичної генерації (підрозділ 1.1); розглянуто алгебраїчні, еліптичні, варіаційні, гіперболічні методи генерації структурованих та блочно-структурованих сіток; проаналізовано спеціальні програмні засоби, за допомогою яких відбувається комп'ютерна генерація сіток; описано рівняння і теорії, на основі яких будуються сітки; наведено чисельні методи, що використовуються при генерації сіток (підрозділ 1.2); проаналізовано методи деформації сітки (підрозділ 1.3); досліджено широке коло об'єктів і процесів, для моделювання якого використовуються структуровані сітки (пункт 1.4.1).

Більше детально наведено приклади побудови структурованої дискретної моделі аеродинамічної форми NASA0012 крила літака, що розроблені за допомогою Національного консультативного комітету з аеронавтики (NASA) (пункт 1.4.2). Також проведено генерацію структурованої сітки щільності ймовірності знаходження електрона в заданій області різноманітних квантових точок з різними хвильовими числами (пункт 1.4.3).

Дослідження методів генерації структурованих сіток виявило переваги та недоліки їхнього використання, а саме: переваги – можливість використання більш високого порядку апроксимації і меншої кількості ресурсів обчислювальних машин; недоліки – обмеження на форму елементів, структуру їхнього розміщення і на геометричну модель, адаптація до складних тіл досить трудомістка і є можливість появи вироджених елементів, декомпозицію на блоки можна застосувати для методів, коли блоки та границі можна представити явно, але у випадку надто складної форми тіла декомпозиція майже не застосовується. Популярною є комбінація генерації структурованих та неструктурованих сіток, яка дозволяє використати всі переваги і обмежити недоліки обох видів сіток.

Узагальнюючи результати дослідження, можна зробити висновок, що проведений огляд підтверджує актуальність розробки методів генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів для подальшого чисельного аналізу їх властивостей (висновки до розділу 1).

В другому розділі було розроблено математичний апарат для побудови структурованих сіток у вільно розповсюджуваному пакеті програм Scilab диференціальним методом на прикладі рівняння Пуассона із заданими параметрами згущення контрольних функцій та гарантією якості моделі. Емпіричним методом досліджено вплив геометрії області (опуклості та угнутості ліній сторін криволінійного чотирикутника) та вибір методу побудови початкової сітки на швидкість генерації заданої структурованої моделі даної області еліптичним методом, також досліджено залежність між значеннями змінних розрахункової та фізичної областей та вплив геометрії області на цю залежність.

У підрозділі 2.1 розглянуто постановку задачі генерації сітки за допомогою диференціального рівняння Пуассона. Окремо було розглянуто методи побудови структурованих дискретних моделей, їх недоліки і переваги (підрозділ 2.2). У підрозділі 2.3 детально розглянуто чисельний розв'язок рівняння Пуассона з використанням різницевої схеми, а саме: загальна

апроксимація похідних з використанням різницевої схеми (пункт 2.3.1), різницева схема для рівняння Пуассона (пункт 2.3.2). У підрозділі 2.4 розглянуто методи побудови початкової сітки: рівномірно (пункт 2.4.1) та за допомогою трансфінітної інтерполяції з можливістю згущення сітки до певних зон (пункт 2.4.2). Алгоритм генерації сітки в пакеті програм Scilab з дослідженням оптимального вибору початкової сітки відносно певної форми геометрії області побудови наведено в підрозділі 2.5.

Особлива увага була приділена дослідженню впливу контрольних функцій на керування сіткою (підрозділ 2.6). Для диференціального методу (еліптичного) розглядалися контрольні функції, за допомогою яких можна виконати згущення до горизонтальних та вертикальних координатних ліній (пункт 2.6.1), як окремий випадок згущення до діагональних ліній із можливістю їхнього суміщення (пункт 2.6.3), досліджено вплив параметрів цих контрольних функцій на згущення. Було досліджено вплив параметрів контрольних функцій, за допомогою яких можна побудувати згущення у формі одного, двох чи більше кіл, еліптичного методу на якість побудованої сітки, а саме її ортогональність (пункт 2.6.2). Усі дослідження супроводжувались візуалізацією отриманих результатів.

В третьому розділі було досліджено вплив параметрів контрольних функцій рівняння Пуассона на згущення сітки поверхонь різних типів. У підрозділі 3.1 наведено постановку задачі генерації сітки поверхні. Більш детально розглянуто поверхні обертання, оскільки такі поверхні широко використовуються в сучасній технічній промисловості, а саме: авіабудування, ракетобудування та ін. Оскільки навіть маленька помилка під час подібних розрахунків може привести не тільки до фінансових втрат, а й до людських жертв, то такі дослідження вимагають більшої точності обчислень. Отже виникає необхідність ретельного дослідження поверхні в місцях концентрації напружень, що можна зробити за допомогою згущення сітки в такій області, при цьому зекономити технічні ресурси під час виконання алгоритму. Тому було досліджено згущення сітки на поверхнях циліндра (підрозділ 3.2), конуса

(підрозділ 3.3), також на місці з'єднання циліндричної та конічної, циліндричної та сферичної, двох конічних поверхонь (підрозділ 3.4). Також досліджено згущення сітки на поверхні, що моделює щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області квантової точки на прикладі кубічної квантової точки (підрозділ 3.5). Всі проведені дослідження на різних поверхнях підтверджують результати щодо впливу параметрів контрольних функцій на інтенсивність згущення сітки. Дослідження було проведено на прикладі згущення до певних ліній сітки, а у випадку комбінацій поверхонь згущення виконано до лінії з'єднання. Отже для посилення згущення необхідно збільшити перший параметр контрольної функції, другий параметр при збільшенні робить сітку більш рівномірною, близькою до ортогональної.

В четвертому розділі розглянуто генерацію структурованих дискретних моделей для перерізів тривимірних геометричних об'єктів. Постановка даної задачі наведена в підрозділі 4.1. Дослідження проведено на прикладі перерізу кутового (підрозділ 4.2) та прямого (підрозділ 4.3) з'єднання двох балок. В прикладі моделі «кута» отримано з'єднання двох прямокутних трапецій по бічній лінії, а модель прямого з'єднання показана у двох варіантах розбиття: чотири прямокутні трапеції та два п'ятикутники. Згущення сітки було виконано до лінії межі з'єднання, оскільки саме в околі з'єднання двох конструкцій виникає концентрація напружень, тому більш детальне дослідження функцій на геометрії заданої області є актуальним. Було використано контрольні функції для згущення до координатних ліній розрахункової області. Підтверджено попередні дослідження для плоских областей та поверхонь щодо впливу параметрів контрольних функцій на інтенсивність згущення сітки в заданій області, а саме: збільшення першого параметра приводить до посилення згущення в околі заданої області, а збільшення другого параметра призводить до більш рівномірного розподілення ліній сітки, що наближає її до ортогональності ліній. В підрозділі 4.4 показано розв'язок крайової задачі вигину тонкої пластинки, розв'язано різницевиими схемами рівняння Софі Жермен, виконано згущення сітки до

певних зон побудови для різних форм пластинки (квадрат, опуклий та неопуклий криволінійні чотирикутники).

У висновках наголошено, що розроблені в дисертаційній роботі методи генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів дозволяють якісно підвищити результати математичного моделювання, використовувати їх при аналізі та оптимізації інженерних конструкцій. Під час розв'язання задач дисертаційного дослідження було створено програмний продукт у вільно розповсюджуваному пакеті інженерних програм Scilab, що дозволяє еліптичним методом автоматизувати генерацію структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів таких, як двовимірні криволінійні чотирикутники, поверхні тіл, перерізи тривимірних об'єктів. За допомогою цього програмного продукту можна керувати формою та інтенсивністю згущення структурованої сітки в заданій області геометричного об'єкта.

Практичні результати представлено візуальними прикладами, що демонструють можливості розробленого програмного продукту. Точність та достовірність результатів підтверджується порівняльним аналізом, відповідністю фізичним властивостям та стійкістю алгоритму згущення сітки до кожної обраної області із можливістю керування інтенсивністю згущення.

Отримані розв'язки задач дисертаційного дослідження можуть бути використані конструкторськими організаціями та виробництвами в якості додатків математичного моделювання геометричних об'єктів.

Ключові слова: структурована дискретна модель, рівняння Пуассона, згущення сітки, параметри контрольних функцій, модель криволінійного чотирикутника, модель поверхні.

ABSTRACT

Khalanchuk L. Structured discrete models for solving boundary value problems. - Qualification work on the rights of the manuscript.

The dissertation on competition of a scientific degree of the philosophy doctor on a specialty 113 Applied mathematics. – Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, 2021.

The object of research is structured and block-structured grids for geometric models.

The subject of research – methods of generating structured and block-structured grids of geometric models.

The dissertation investigates structured discrete models for solving boundary value problems. **The purpose of the dissertation** is to develop a mathematical apparatus for the construction of structured and block-structured grids with specified parameters of thickening and quality assurance of the model. To achieve this goal in the work the following main tasks:

- to develop and test a method for obtaining structured discrete mathematical models performed on quadrilateral finite elements for two-dimensional geometric objects using the Poisson equation;
- to develop methods for optimizing the generation of structured discrete models of geometric objects by choosing the method of initial partitioning;
- to develop approaches to control the shape and intensity of grid lines thickening to a given area of the model of two-dimensional and three-dimensional geometric object.

The research methods are based on mathematical analysis, analytical geometry, mathematical modeling and numerical methods for solving differential equations.

The Introduction substantiates the topicality of the thesis, outlines its relationship to scientific and technical research projects. It formulates the research

goal and objectives, specifies the object, subject, and methods of research, and highlights the scientific novelty and practical value of the obtained results. It sketches out how the research results were used in practical cases. Further, it summarizes the personal contribution of the applicant, and presents how the approbation and publication of the contributed results were done. Finally, the Introduction provides the quantitative information about the structure of the thesis.

The first section reviews the current state of generation of structured discrete models, which is a continuation and addition to previous studies, namely: describes the basic steps for building a grid, which are common to many approaches to their automatic generation (section 1.1); algebraic, elliptic, variational, hyperbolic methods of generation of structured and block-structured grids are considered; analyzed special software tools that are used to generate computer grids; describes the equations and theories on the basis of which grids are built; the numerical methods used at generation of grids are resulted (section 1.2); a wide range of objects and processes have been studied, for which structured grids are used (section 1.4.1).

Examples of the construction of a structured discrete model of the aerodynamic shape of the NACA0012 wing of an aircraft, developed with the help of the National Advisory Committee on Aeronautics (NACA), are given in more detail (section 1.4.2). The generation of a structured grid of electron density density in a given region of various quantum points with different wave numbers is also performed (section 1.4.3).

The study of methods for generating structured grids revealed the advantages and disadvantages of their use, namely: advantages – the ability to use a higher order of approximation and fewer resources of computers; Disadvantages - restrictions on the shape of elements, the structure of their placement and geometric model, adaptation to complex bodies is quite time consuming and there is a possibility of degenerate elements, decomposition into blocks can be applied to methods where blocks and boundaries can be represented explicitly, but in case of too complex shape body decomposition is almost not applied. A combination of structured and

unstructured grids is popular, which allows you to use all the advantages and limit the disadvantages of both types of grids.

Summarizing the results of the study, we can conclude that the review confirms the relevance of developing methods for generating structured discrete models of geometric objects for further numerical analysis of their properties (conclusions to chapter 1).

In the second section, a mathematical apparatus was developed for constructing structured grids in a freely distributed Scilab software package by the differential method on the example of the Poisson equation with given parameters of control function condensation and model quality assurance. The influence of the geometry of the region (convexity and concavity of the lines of the sides of a curvilinear quadrilateral) and the choice of the method of constructing the initial grid on the generation speed of a given structured model of this region by the elliptical method is investigated by empirical method.

Section 2.1 considers the formulation of the grid generation problem using the Poisson differential equation. Methods of constructing structured discrete models, their disadvantages and advantages were considered separately (section 2.2). Section 2.3 discusses in detail the numerical solution of the Poisson equation using the difference scheme, namely: the general approximation of derivatives using the difference scheme (paragraph 2.3.1), the difference scheme for the Poisson equation (paragraph 2.3.2). Section 2.4 discusses the methods of constructing the initial grid: evenly (paragraph 2.4.1) and by transfinite interpolation with the possibility of thickening the grid to the right or left (paragraph 2.4.2). The grid generation algorithm in the Scilab software package with the study of the optimal choice of the initial grid with respect to a certain shape of the geometry of the construction area is given in section 2.5.

Particular attention was paid to the study of the influence of control functions on grid management (section 2.6). For the differential method (elliptical) control functions were considered, with the help of which it is possible to perform condensation to horizontal and vertical coordinate lines (paragraph 2.6.1), as a

special case of condensation to diagonal lines with the possibility of their combination (paragraph 2.6.3), the influence of parameters of these control functions on condensation is investigated. The influence of the parameters of control functions, by means of which it is possible to construct a condensation in the form of one, two or more circles, an elliptical method on the quality of the constructed grid, namely its orthogonality, was investigated (paragraph 2.6.2). The study was accompanied by visualization of the results.

In the third section, the influence of the parameters of the control functions of the Poisson equation on the thickening of the grid of surfaces of different types was investigated. Section 3.1 presents the formulation of the problem of surface grid generation. Rotation surfaces are considered in more detail, as such surfaces are widely used in the modern technical industry, namely: aircraft construction, rocketry, etc. Since even a small error in such calculations can lead not only to financial losses but also to human casualties, such studies require greater accuracy of calculations. Therefore, there is a need for careful study of the surface in places of stress concentration, which can be done by thickening the grid in this area, while saving technical resources during the execution of the algorithm. Therefore, the thickening of the grid on the surfaces of the cylinder (section 3.2), the cone (section 3.3), as well as at the junction of the cylindrical and conical, cylindrical and spherical, two conical surfaces (section 3.4) was investigated. The compression of the grid on the surface is also investigated, which simulates the probability density of an electron in a given region of a quantum dot on the example of a cubic quantum dot (section 3.5). All studies on different surfaces confirm the results on the influence of the parameters of the control functions on the intensity of the thickening of the grid. The study was performed on the example of thickening to certain lines of the grid, and in the case of combinations of surfaces, the thickening was performed to the joint line. Therefore, to enhance the thickening, it is necessary to increase the first parameter of the control function, the second parameter when increasing makes the grid more uniform, close to orthogonal.

The fourth section discusses the generation of structured discrete models for three-dimensional objects. The statement of this problem is given in section 4.1. The study was performed on the example of the cross section of the angular (section 4.2) and direct (section 4.3) connection of two beams. The example of the "angle" model is the connection of two rectangular trapezoids along the side line, and the "straight" model is shown in two variants of division: four rectangular trapezoids and two pentagons. The thickening of the grid was performed to the line of the joint boundary, because it is in the vicinity of the junction of the two structures that the stress concentration occurs, so a more detailed study of the functions on the geometry of a given area is relevant. Control functions were used to condense to the coordinate lines of the calculation area. Preliminary studies for flat areas and surfaces on the influence of control function parameters on the grid thickening intensity in a given region have been confirmed, namely: an increase in the first parameter leads to an increase in thickening around a given region, and an increase in the second parameter leads to a more uniform grid distribution, it's to the orthogonality of the lines. Section 4.4 shows the solution of the boundary value problem of bending a thin plate, solves the difference schemes of Sophie Germain's equation, condenses the grid to certain construction zones for different plate shapes (square, convex and nonconvex curvilinear quadrilaterals).

The conclusions emphasize that the methods of generation of structured discrete models of geometric objects developed in the dissertation work allow to qualitatively increase the results of mathematical modeling, to use them in the analysis and optimization of engineering structures. During the dissertation research, a software product was created in the freely distributed Scilab engineering software package, which allows the elliptical method to automate the generation of structured discrete models of geometric objects such as two-dimensional curvilinear quadrilaterals, body surfaces, sections of three-dimensional objects. With this software product, you can control the shape and intensity of the structured grid in a given area of a geometric object.

Practical results are presented by visual examples that demonstrate the capabilities of the developed software product. The accuracy and reliability of the results is confirmed by comparative analysis, compliance with the physical properties and stability of the grid thickening algorithm to each selected area with the ability to control the intensity of thickening.

The obtained solutions of dissertation research problems can be used by design organizations and productions as applications of mathematical modeling of geometric objects.

Keywords: structured discrete model, Poisson equation, grid thickening, parameters of control functions, curvilinear quadrilateral model, surface model.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Статті в наукових виданнях, включених до міжнародних наукометричних баз Scopus та Web of science

1. Natalya Sosnickaya, Mykola Morozov, Larysa Khalanchuk, Halyna Onyshchenko. Modelling the Electromagnetic Processes and Phenomena in Quantum-Sized Systems in the Course of Physical and Mathematical Support of Master's Programs for the "Electric Power Engineering, Electrical Engineering and Electromechanics Specialty". *2019 IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)*, 23-25 September 2019, Kremenchuk, Ukraine, pp. 402-405. (*Scopus*)
2. N. Sosnytska, M. Morozov and L. Khalanchuk, "Modeling of Electron State in Quantum Dot Structures," *2020 IEEE Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP)*, Kremenchuk, Ukraine, 2020, pp. 1-5. (*Scopus*)

Статті в наукових фахових виданнях України

3. Халанчук Л. В., Чопоров С. В. Огляд методів генерації дискретних моделей геометричних об'єктів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. №1. С. 139-152. (*Міжнародна представленість та індексація журналу: Index Copernicus (Польща)*)
4. Сосницька Н.Л., Морозов М.В., Онищенко Г.О., Халанчук Л.В. Моделювання кванторозмірних гетеросистем та методичне забезпечення курсу "Фізичні основи інформаційних технологій". *Науковий вісник Льотної академії. Серія: Педагогічні науки. Збірник наукових праць*. Кропивницький: ЛА НАУ, 2019. Вип.5 С. 415-421.
5. Сосницька Н.Л., Кравець В.І., Морозов М.В., Онищенко Г.О., Халанчук Л.В. Моделювання стану електронів у кінцевих квантових точках.

Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. Кам'янець-Подільський: КПНУ, 2019. Вип.20. С. 100-107.

6. Морозов М.В., Халанчук Л.В. Моделювання стану електрона у циліндричній квантовій точці з оболонкою. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* Запоріжжя: ЗНУ, 2019. №2. С. 117-123. (**Міжнародна представленість та індексація журналу: Index Copernicus (Польща)**)

7. Халанчук Л. В., Чопоров С. В. Розробка методу побудови нерівномірних сіток на базі диференціального рівняння Пуассона. *Прикладні питання математичного моделювання.* Херсон: Херсонський національний технічний університет. 2020, т. 3, № 2.2. С. 274-282. (**Міжнародна представленість та індексація журналу: Index Copernicus (Польща), Google Scholar (США)**)

8. Халанчук Л. В., Чопоров С. В. Дослідження генерації нерівномірних структурованих дискретних моделей двовимірних геометричних об'єктів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* Запоріжжя: ЗНУ, 2020. № 1. С. 106-112. (**Міжнародна представленість та індексація журналу: Index Copernicus (Польща)**)

9. Сосницька Н.Л., Морозов М.В., Халанчук Л.В. Математичне комп'ютерне моделювання квантово-механічних явищ та процесів. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету.* Мелітополь: ТДАТУ, 2020. Вип. 20. Т. 2. С.262-268. (**Міжнародна представленість та індексація журналу: Google Scholar (США)**)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

10. Халанчук Л.В. Сучасний стан дослідження методів генерації структурованих дискретних моделей. *Актуальні проблеми математики та інформатики: збірка тез доповідей Дев'ятої Всеукраїнської, шістнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників, 26-27 квітня 2018 р.* Запоріжжя: ЗНУ, 2018. С. 139.

11. Халанчук Л.В., Чопоров С.В. Структурована дискретна модель розв'язку рівняння Шредінгера. *Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, присвяченої 120-річчю з дня народження академіка НАН України А. П. Філіппова*, 15-18 квітня 2019 р. Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 2019. С. 18.

12. Халанчук Л.В. Вибір початкового розбиття для генерації структурованої дискретної моделі. *Актуальні проблеми математики та інформатики: збірка тез доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників*, 25-26 квітня 2019 р. Запоріжжя: ЗНУ, 2019. С. 130-131.

13. Сосницька Н.Л., Морозов М.В., Онищенко Г.О., Халанчук Л.В. Генерація моделей квантових структур у лабораторному практикумі. *Сучасні наукові дослідження на шляху до євроінтеграції: матеріали міжнародного науково-практичного форуму*, 21-22 червня 2019 р., ТДАТУ імені Дмитра Моторного. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В. 2019. Частина 2. С. 400-402.

14. Халанчук Л.В., Чопоров С.В. Вплив властивостей геометрії області на генерацію сітки. *Інформаційні системи та технології: матеріали статей 8-ї Міжнародної науково-технічної конференції*, Коблеве - Харків, 09-14 вересня 2019 року / наук. ред. А.Д. Тевяшев, Л.Б. Петришин, В.Г. Кобзев. Х.: ХНУРЕ, 2019. С. 93-96.

15. Халанчук Л. В. Вплив параметрів комірки сітки на генерацію структурованої дискретної моделі гіперболічним методом. *Актуальні проблеми математики та інформатики: збірка тез доповідей Одинадцятої Всеукраїнської, Вісімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників*, 23-24 квітня 2020 р. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2020. С. 129-130.

16. Халанчук Л. В., Чопоров С. В. Використання рівняння Пуассона для побудови нерівномірних структурованих сіток. *XXI Міжнародна*

конференція з математичного моделювання (МКММ-2020): збірка тез, 14-18 вересня 2020 р. Херсон: ХНТУ, 2020. С. 66.

17. Морозов М., Халанчук Л., Кравець В., Рожкова О. Застосування математичного моделювання у лабораторному практикумі з фізики. *Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Освіта та наука: пам'ятаючи про минуле, творимо майбутнє»*, 23-25 вересня 2020 р. Київ, 2020. С. 321-327.

Інші публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації

18. А. с. 98466. Україна. Комп'ютерна програма «Побудова двовимірної структурованої сітки за допомогою диференціального рівняння Пуассона» / Халанчук Л.В., Чопоров С.В.; реєстр. 07.07.2020, опубл. 30.09.2020, Бюл. № 60.

19. Дяденчук А.Ф., Халанчук Л.В. Формування професійної компетентності майбутніх інженерів при розв'язанні прикладних задач у пакеті Scilab. *Моделювання компетентнісної професійної освіти в контексті євроінтеграції: монографія* [Електронне видання] / кол. авт; за заг. ред. проф. Н.П. Волкової. Дніпро: Університет імені Альфреда Нобеля, 2021. С. 289-309.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	21
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ СТАНУ ПРОБЛЕМИ ГЕНЕРАЦІЇ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ.....	27
1.1 Загальна постановка задачі математичного моделювання геометричних об'єктів за допомогою структурованих сіток ...	27
1.2 Огляд і класифікація методів генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів	30
1.3 Методи деформації сітки	34
1.4 Приклади практичного застосування генерації структурованих дискретних моделей	38
1.4.1 Огляд сфери застосування генерації структурованих дискретних моделей	38
1.4.2 Побудова структурованої сітки аеродинамічної форми крила літака	39
1.4.3 Побудова структурованих сіток під час дослідження стану електрона в заданій області квантової точки	42
Висновки до розділу 1	49
РОЗДІЛ 2 ГЕНЕРАЦІЯ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ДВОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ..	51
2.1 Постановка задачі генерації сітки за допомогою диференціального рівняння Пуассона	51
2.2 Переваги і недоліки генерації сітки за допомогою диференціального рівняння Пуассона	53
2.3 Чисельний розв'язок рівняння Пуассона з використанням різницевої схеми	53

2.3.1	Апроксимація похідних з використанням різницевої схеми	53
2.3.2	Різницева схема для рівняння Пуассона	56
2.4	Методи побудови початкової сітки	59
2.4.1	Рівномірна сітка	59
2.4.2	Трансфінитна інтерполяція	61
2.5	Алгоритм генерації сітки в пакеті програм Scilab	62
2.6	Застосування контрольних функцій рівняння для згущення сітки в заданій області криволінійного чотирикутника	77
2.6.1	Контрольні функції для згущення до координатних ліній	77
2.6.2	Контрольні функції для згущення до кола і точки	85
2.6.3	Особливості застосування контрольних функцій рівняння для згущення сітки	89
	Висновки до розділу 2	91
РОЗДІЛ 3	ГЕНЕРАЦІЯ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ПОВЕРХНІ	93
3.1	Постановка задачі генерації сітки поверхні	93
3.2	Згущення сітки циліндричної поверхні	94
3.3	Згущення сітки кінчної поверхні	97
3.4	Згущення сітки на межі з'єднання двох поверхонь	98
3.5	Згущення сітки на поверхнях, що отримані під час розв'язку рівняння Шредінгера	100
	Висновки до розділу 3	103
РОЗДІЛ 4	ГЕНЕРАЦІЯ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕРІЗІВ ТРИВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ	104
4.1	Постановка задачі генерації сіток перерізів тривимірних геометричних об'єктів	104

4.2 Згущення сітки в перерізі моделі тривимірного геометричного об'єкта при кутовому з'єднанні	105
4.3 Згущення сітки в перерізі моделі тривимірного геометричного об'єкта для прямого з'єднання	108
4.4 Крайова задача вигину тонкої пластинки	110
Висновки до розділу 4	114
ВИСНОВКИ	116
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	118
ДОДАТКИ	140

ВСТУП

Актуальність теми. На сьогоднішній день в інженерних додатках одне із провідних місць займають дослідження, що виконуються із застосуванням математичного моделювання різноманітних реальних процесів з подальшим використанням пакетів комп'ютерних програм, оскільки комп'ютерне моделювання за своїми витратами в багато разів економічно вигідніше ніж побудова фізичної моделі. Обчислювальні методи вимагають побудову математичних моделей, що будуть відображати усі необхідні властивості геометричної форми та структури досліджуваного об'єкта для заданої задачі. Переважна більшість сучасних методів обчислення замінює досліджуваний об'єкт деякою дискретною моделлю. Сучасні проєкти мають все більш складний характер, оскільки використовують моделі, що складаються з досить великої кількості компонентів і зв'язків між ними. Математичне моделювання процесів у таких конструкціях має певні труднощі, пов'язані зі складністю геометричної форми відповідних областей. Такі задачі зручно розв'язувати методом скінченних елементів, де модель складається з певної кількості геометричних областей простої форми. Далі використовуються різні пакети програм для розв'язання отриманої задачі з дискретними моделями. Проте виникає необхідність розробки методів отримання дискретних математичних моделей, що відповідають заданій геометричній області та мають певні властивості, що передбачені умовою задачі.

Математичне моделювання різних процесів прикладних задач з відповідною генерацією дискретних моделей геометричних об'єктів ґрунтовно досліджували вчені Рвачов В.Л. [32, 42-52], Шейко Т.І. [4, 32-36, 43, 48-52, 85, 127, 152, 153], Городецький А.С. [18-21], Максименко-Шейко К.В. [30-36, 44], Толок А.В. [32, 48, 58-62], Гоменюк С.І. [5-17, 29, 62-65, 78-83, 90, 110, 119, 128], Армстронг С.Дж. [92], Томпсон Дж.Ф. [160-164] та інші дослідники [77, 89, 93-97, 100-106, 115, 122-125, 144, 149].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота здійснювалась в рамках виконання науково-дослідної тематики кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету, держбюджетних НДР «Розробка математичного забезпечення для інженерного аналізу об'єктів аерокосмічної техніки на базі хмарних технологій» (№ держреєстрації: 0117U007204), «Математичне та програмне забезпечення автоматизованого проєктування аерокосмічної техніки» (№ держреєстрації: 0118U000210). Окремі результати дисертаційної роботи було використано в рамках науково-дослідної роботи «Інноваційні технології та методики професійної підготовки майбутніх фахівців у закладах вищої аграрної освіти», (№ держреєстрації: 0118U002303), підтема: «Розробка часткових методик викладання фізико-математичних дисциплін у закладах вищої аграрної освіти на основі сучасних технологій та методів навчання», в Таврійському державному агротехнологічному університеті імені Дмитра Моторного.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка математичного апарату для побудови структурованих та блочно-структурованих сіток із заданими параметрами згущення та гарантією якості моделі.

Для реалізації поставленої мети в роботі поставлено наступні основні задачі:

- розробити і виконати апробацію методу отримання структурованих дискретних математичних моделей з використанням рівняння Пуассона для дискретизації двовимірних геометричних об'єктів на чотирикутні елементи;
- удосконалити методи генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів за рахунок вибору способу початкового розбиття;
- розробити підходи до керування формою та інтенсивністю згущення ліній сітки до певної зони моделі двовимірного та тривимірного геометричного об'єкта.

Об'єкт дослідження – структуровані та блочно-структуровані сітки для геометричних моделей.

Предмет дослідження – методи генерації структурованих та блочно-структурованих сіток геометричних моделей.

Методи дослідження ґрунтуються на математичному аналізі, аналітичній геометрії, математичному моделюванні та чисельних методах розв'язування диференціальних рівнянь.

Наукова новизна отриманих результатів. В рамках рішення задач дисертаційного дослідження отримані наступні основні нові наукові результати:

- отримав подальший розвиток еліптичний метод для математичного моделювання складних об'єктів під час розв'язку задач побудови, візуалізації та аналізу структурованих математичних моделей двовимірних та тривимірних геометричних об'єктів для спрощення процесу їх моделювання;

- вперше на базі еліптичного методу побудови структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів розроблено метод оптимального вибору розбиття початкової сітки, що залежить від геометричної форми заданого об'єкту;

- отримав подальший розвиток метод згущення сітки за допомогою контрольних функцій рівняння Пуассона для згущення до координатних ліній розрахункової області, до точки, до області у вигляді кола, що дозволяє більш детально досліджувати залежності в заданій області геометричного об'єкта, не збільшуючи при цьому кількість вузлів сітки, що економить технічні ресурси;

- вперше запропоновано формулу та її різновиди для згущення сітки до діагональної лінії криволінійного чотирикутника.

Практичне значення отриманих результатів. Практичне значення дисертаційної роботи ґрунтується на програмній реалізації та можливості прикладного застосування розроблених методів для чисельного дослідження напружено-деформованого стану складних об'єктів. Розроблені в дисертаційній роботі методи генерації структурованих дискретних моделей

геометричних об'єктів дозволяють якісно підвищити результати математичного моделювання, використовувати їх при аналізі та оптимізації інженерних конструкцій. Під час рішення задач дисертаційного дослідження було створено програмний продукт у вільно розповсюджуваному пакеті інженерних програм Scilab, що дозволяє на базі еліптичного методу автоматизувати генерацію структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів таких, як двовимірні криволінійні чотирикутники, поверхні тіл, перерізи тривимірних об'єктів. За допомогою цього програмного продукту можна керувати формою та інтенсивністю згущення структурованої сітки в заданій області геометричного об'єкта. Отримані результати дисертаційного дослідження можуть бути використані конструкторськими організаціями та виробництвами як додатки математичного моделювання геометричних об'єктів.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати, що винесено на захист, отримано автором самостійно. В роботах, виконаних у співавторстві та опублікованих спільно у спеціалізованих виданнях, що входять до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора наук, кандидата наук та ступеня доктора філософії, здобувачеві належить: [38, 54, 56, 57] – розробка математичного апарату та програмного продукту для побудови структурованих дискретних моделей розв'язку рівняння Шредінгера з наступною візуалізацією отриманих результатів для щільності ймовірності знаходження електрона в заданій області квантової точки; [67] – огляд літератури з подальшим аналізом методів генерації дискретних моделей геометричних об'єктів; [68, 69] – розробка математичного апарату та програмного продукту для побудови нерівномірних структурованих сіток на базі рівняння Пуассона.

Апробація роботи. Основні положення дисертаційної роботи доповідались на таких науково-технічних конференціях, симпозіумах, форумах та семінарах:

— Дев'ята Всеукраїнська, шістнадцята регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (26-27 квітня 2018 р., Запоріжжя);

— Конференція молодих вчених та спеціалістів «Сучасні проблеми машинобудування», присвячена 120-річчю з дня народження академіка НАН України А. П. Філіппова (15-18 квітня 2019 р., Харків);

— Десята Всеукраїнська, сімнадцята регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (25-26 квітня 2019 р., Запоріжжя);

— Міжнародний науково-практичний форум «Сучасні наукові дослідження на шляху до євроінтеграції» (21-22 червня 2019 р., Мелітополь);

— 8-ма Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології» (09-14 вересня 2019 р., Коблеве – Харків);

— IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES) (23-25 вересня 2019 р., Кременчук);

— Одинадцята Всеукраїнська, вісімнадцята регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (23-24 квітня 2020 р., Запоріжжя);

— VIII Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (11-14 червня 2020 р., Запоріжжя);

— XXI Міжнародна конференція з математичного моделювання (МКММ-2020) (14-18 вересня 2020 р., Херсон);

— 25th IEEE International Conference on Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP 2020) (September 21-25, 2020, Kremenchuk);

— Міжнародна науково-практична конференція «Освіта та наука: пам'ятаючи про минуле, творимо майбутнє» (23-25 вересня 2020 р., Київ)

— наукових семінарах кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету і кафедри вищої математики і фізики

Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного.

Публікації результатів. Основні результати дисертаційної роботи відображено у 19 друкованих роботах, в тому числі, 2 у виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази видань Scopus, 7 у спеціалізованих виданнях, що входять до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора наук, кандидата наук та ступеня доктора філософії.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел з 189 найменувань (22 сторінки). Загальний обсяг роботи складає 152 сторінки, в тому числі 117 сторінок загального тексту, що ілюстровано 59 рисунками та 5 таблицями, 13 сторінок додатків.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ СТАНУ ПРОБЛЕМИ ГЕНЕРАЦІЇ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

1.1 Загальна постановка задачі математичного моделювання геометричних об'єктів за допомогою структурованих сіток

Дискретною моделлю геометричного об'єкту (сіткою) називають множину точок, що розподілені в досліджуваній області, разом зі зв'язками між цими точками. Дискретна модель геометричного об'єкта замінює вихідну неперервну область скінченною множиною простих фігур [80]. В залежності від розмірності простору дискретні моделі складаються з різних типів елементів:

- одновимірні (відрізки, дуги кривих);
- двовимірні (трикутники, чотирикутники);
- тривимірні (тетраедри, призми, шестигранники).

Комірки сітки та їх вузли є основою, на якій відбувається заміна математичних моделей, що описують досліджувані процеси, на систему рівнянь, чисельний розв'язок яких дає наближене значення необхідних характеристик явищ, що вивчаються.

Розрізняють структуровані та неструктуровані сітки (Рис. 1.1). Неструктуровані сітки визначаються звичайним набором вузлів. Логічний зв'язок між вузлами сітки визначається довільним чином, тобто кожен вузол може мати довільну кількість «сусідів». На відміну від неструктурованої сітки в структурованій всі внутрішні вершини топологічно еквівалентні між собою. Наприклад, чотирикутні структуровані сітки топологічно еквівалентні стандартним прямокутним сіткам.

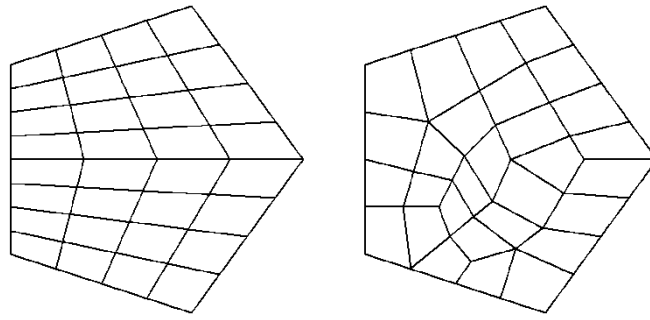


Рис. 1.1. Структурована (ліворуч) і неструктурована (праворуч) сітки

Структурована сітка відрізняється від неструктурованої тим, що вона:

- накладає обмеження на форму елементів, структуру їхнього розміщення і на геометричну модель;
- потребує витратити більше часу людини-розробника, але менше часу розрахунку обчислювальної техніки;
- розрахунковий алгоритм не змінюється при подальшому подрібненні сітки, змінюється лише крок сітки.

Структуровані сітки на відміну від неструктурованих мають явно виражений напрямок (за індексом), що можна розуміти як криволінійну систему координат. Завдяки цьому на структурованій сітці можна застосувати різницеві схеми більш високого порядку точності, що є важливою складовою чисельного розв'язання. Також структуровану сітку легко деформувати за допомогою інтерполяційних формул, а неструктуровані сітки для цієї процедури вимагають введення додаткової моделі деформації та окремі витрати часу на розв'язання допоміжних рівнянь. Структуровані сітки з однаковою кількістю вузлів порівняно з неструктурованою сіткою потребують меншої кількості обчислень, оскільки мають в декілька разів менше комірок та граней. Наприклад, для просторової структурованої сітки на 8 вузлів буде одна кубоподібна комірка, що має 6 граней, а для неструктурованої сітки на 8 вузлів буде п'ять комірок – тетраедрів, що мають по 4 грані кожна (рис. 1.2). Індекси елементів структурованої сітки (сіткові координати) дають доступ до будь-якої комірки, на відміну від неструктурованої не потрібно зберігати інформацію про її грані, сусідні комірки та ін. Пакети програм, що

використовують структуровані сітки, є простішими під час реалізації алгоритмів та менш вимогливі до ресурсів техніки [23].

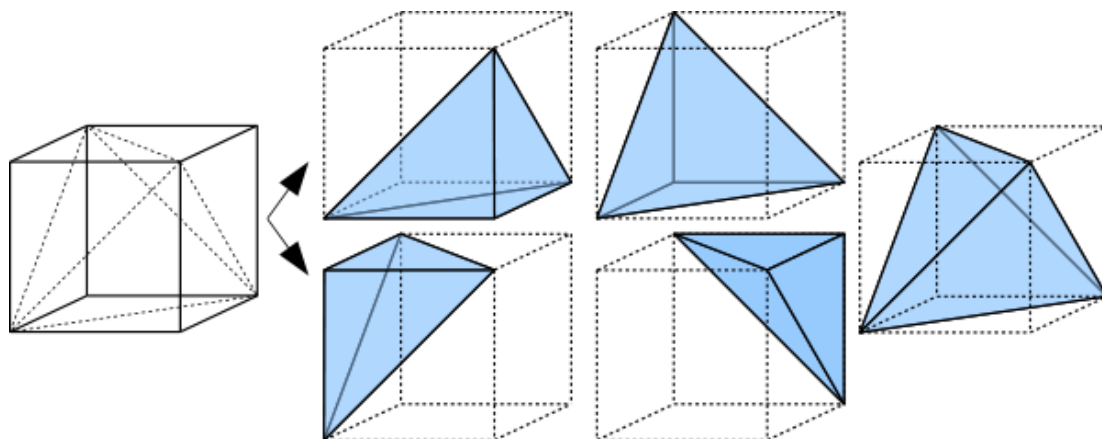


Рис. 1.2. Розбиття куба на 5 тетраедрів.

Огляд актуальних підходів і методів автоматичної генерації неструктурованих сіток (дискретних моделей геометричних об'єктів), зокрема, аналіз методів генерації дискретних моделей з використанням трикутних або тетраедричних елементів, а також чотирикутних або шестигранних скінченних елементів, наведено в роботі [84].

Серед структурованих сіток широке розповсюдження під час розв'язання задач математичної фізики отримали координатні сітки. В таких сітках вузли та грані комірок визначаються перетином ліній та поверхонь деякої координатної системи в області X . Якщо межа X складається зі скінченної кількості координатних ліній, то отримана сітка має назву координатної сітки, що узгоджена з межею. В такому випадку обчислювальною областю є деяка прямокутна область, межі якої визначаються поверхнями, що паралельні осям ейлерових координат. Такі сітки добре апроксимують межу області і тому ефективні під час чисельних розрахунків задач, розв'язок яких істотно залежить від точності апроксимації крайових умов. Алгоритм нумерації вузлів та визначення комірок для координатних сіток, що узгоджені з межею, дуже простий. Їх конструкція дозволяє легко збільшувати кількість вузлів, щоб оцінити збіжність, похибку обчислень та для збільшення точності різницевих методів розв'язання

крайових задач. Для таких сіток не потрібна інтерполяція крайових умов задачі, граничні значення області є входними параметрами алгоритму, що дає можливість конструювати автоматизовані програми побудови сіток для широкого кола областей і задач [27].

1.2 Огляд і класифікація методів генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів

Загальна послідовність кроків, необхідних для генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів така:

1. Геометрія області, яка буде дискретизована, повинна бути визначена, тобто межа області повинна бути описана. Подання геометрії може бути виконано різними шляхами: аналітична форма (рівняння сфери, циліндрів), сплайни, NURBS (неоднорідні раціональні b-сплайни), методи інтерполяції. Геометрія може бути побудована в системі автоматизованого проектування (САПР) або в системі генерації сіток. Багато САПР використовують аналітичні форми і не дуже добре підходять для створення сіток з потоком, що є проблемним для аналітичного запису, тому багато пакетів генерації сіток забезпечують певний рівень підтримки САПР.

2. Аналіз меж геометричного об'єкта з метою встановлення відповідності між геометричними особливостями (наприклад, зламами) та межовими вузлами структурованої сітки. Для розв'язання цієї задачі з урахуванням подання поверхні, часто її необхідно переорієнтувати. Далі для генерації сітки потрібно отримати параметрично гладкі поверхні, щоб точки сітки плавно змінювались по поверхні. Для отримання гладкої поверхні найчастіше використовуються САПР, які гарантують лише геометричну гладкість, але часто не є параметрично гладкими. Параметризація згладжування поверхні зазвичай включає розв'язок еліптичного рівняння на поверхні. Зауважимо, що при побудові декартової сітки цей крок не потрібен.

3. Генерація сітки області. Ця процедура істотно відрізняється для різних типів сітки.

Огляд актуальних підходів і методів автоматичної генерації структурованих сіток наведено в роботі [67].

Для генерації структурованих сіток використовують різні спеціальні програмні засоби: ANSYS [1, 99], OpenFOAM [41], SPGrid [87], HybMesh [142] тощо.

Найпростіше генерувати декартову сітку, оскільки область покривається прямокутною сіткою. Межі області можуть не охоплюватися межею сітки, але адаптивне виправлення може бути використано для покращення поверхні. Отже, постає необхідність уточнення сітки в двох напрямках для двовимірного випадку, але для тривимірного випадку достатньо встановити сітку в напрямку, що перпендикулярно межі. Найчастіше структуровані сітки будують як прямокутні шахові декартові сітки [3, 88, 95, 112, 114, 129, 132, 138, 145, 154-156, 175].

В блочно-структурованому методі обчислювальна область розділяється на набір прямокутних блоків, що не перекривають один одного. Далі сітка генерується на кожному блоці окремо. Згладжування на блоках виконується до досягнення певного ступеню неперервності на межі блоків. Розриви у відстані між сітками на межі блоків можуть ускладнити розв'язування.

Найбільш розповсюджені методи генерації сіток відносяться до наступних категорій: алгебраїчні, еліптичні і варіаційні, гіперболічні.

Алгебраїчні методи створюють сітки для внутрішньої області і комбінують алгебраїчне представлення межі. Для трансфінітної інтерполяції використовуються поліноми [86, 134]. Алгебраїчні методи не настільки гнучкі, як інші методи, але генерація цими методами є простою і швидкою.

Еліптичні методи генерації можуть обробляти більш загальні випадки. Вони можуть використовуватися для створення високоякісних сіток, які будуть мати бажану гладкість, на доволі складних областях. Розв'язок рівняння Пуассона визначає місцеположення точок сітки. Варіаційний метод

також дає еліптичне рівняння, розв'язок якого визначає місцеположення точок сітки. Важливим є вибір функцій управління, які визначають відстань між точками сітки та ортогональність сітки [87, 111, 147].

Гіперболічні методи розв'язують гіперболічну систему рівнянь для генерації сітки від границі області. Зазвичай, накладається умова ортогональності ліній сітки. Зазвичай додається згладжування, щоб позбутися передчасного накладання ліній сітки. Зовнішня межа сітки визначається розв'язком рівняння, тому цей метод обмежений для використання в блочно-структурованих сітках, але дуже корисний при покритті сіток.

Під час генерації блочно-структурованої сітки спочатку створюються окремі складові сітки для різних частин геометрії, використовуючи алгебраїчний, еліптичний чи гіперболічний методи. Враховуючи набір складових сіток, визначається, як зробити покриття автоматичним, але може виникнути збій, якщо при покритті не будуть міцними зв'язки між компонентами різних блоків.

Використання методу скінченних різниць для розв'язання диференціальних рівнянь було одним із перших підходів для отримання дискретного представлення тіла. В його основі лежить ідея трансформації сітки, що визначена на одиничному кубі, у потрібну геометрію кубоподібного тіла. Якщо тіло має складну форму, то цю проблему можна розв'язати методами декомпозиції чи блочної декомпозиції, які засновані на ідеї декомпозиції тіла на кубоподібні блоки.

Чисельні методи, що використовуються при генерації структурованих сіток:

- метод скінченних різниць [3, 112, 147, 159];
- метод скінченних елементів [1, 3, 26, 103, 107, 129, 135, 139, 146, 176, 188, 189];
- метод скінченного об'єму [88, 95];
- метод спектральних елементів [134];
- метод FDTD [159].

Генерація структурованих сіток розробляється на основі різних рівнянь і теорій, а саме:

- еліптичні рівняння [87, 111, 147],
- параболічні рівняння [3],
- рівняння еластодинаміки [159],
- рівняння Нав'є-Стокса [88, 116, 126],
- триангуляція [29, 103],
- теорія R-функцій [11, 16-17, 28-31, 35, 36, 42-53, 78-79, 81-82],
- крива, поверхня, об'єм, екстракція Безьє [86, 107],
- функції Гріна [180].

Розглянемо квазілінійне (лінійне відносно старших похідних) диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку вигляду

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1.1)$$

де $a_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, 2$, неперервні функції в деякій області G .

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0, \quad (1.2)$$

яке називається характеристичним для рівняння (1.1), а його інтеграли – характеристиками.

З курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо: якщо $z = \varphi(x, y)$ – деякий розв'язок наступного рівняння, тобто,

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0, \quad (1.3)$$

тоді співвідношення $C = \varphi(x, y)$ є загальним інтегралом рівняння (1.2). Має силу і обернене твердження.

Нехай $a_{11} \neq 0$ ($a_{22} \neq 0$). Тоді із (1.2) маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}} \right),$$

де $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

Рівняння (1.1) в області $D \subset G$, враховуючи залежності між фізичною (x, y, u) та розрахунковою (ξ, η, U) областями, називається рівнянням

а) гіперболічного типу, якщо дискримінант $\Delta > 0$ для всіх $(x, y) \in D$, канонічні форми якого можна записати у вигляді

$$U_{\xi\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{2\alpha_{12}}, \quad \alpha_{12} \neq 0,$$

або

$$\bar{U}_{\xi\xi} - \bar{U}_{\eta\eta} = F_1(\alpha, \beta, \bar{U}, \bar{U}_\xi, \bar{U}_\eta) .$$

б) параболічного типу, якщо $\Delta = 0$ при $(x, y) \in D$, канонічні форми якого можна записати у вигляді

$$U_{\eta\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{22}}, \quad \alpha_{22} \neq 0.$$

в) еліптичного типу, якщо $\Delta < 0$ при $(x, y) \in D$, канонічні форми якого можна записати у вигляді

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{11}}, \quad \alpha_{11} \neq 0.$$

У випадку лінійних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами одержуємо наступні канонічні форми:

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + \gamma V = g(\xi, \eta) \text{ – еліптичний тип;}$$

$$V_{\eta\eta} + b_1 V_\xi = g(\xi, \eta) \text{ – параболічний тип;}$$

$$\left. \begin{aligned} V_{\xi\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) \\ V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \text{ – гіперболічний тип.}$$

1.3 Методи деформації сітки

Для розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними часто бажана адаптивна стратегія, одним із важливих підходів якої є метод деформації сітки [165, 172]. Він застосовується до різних фізичних та

інженерних проблем, таких як горіння, ударні хвилі, реакції дифузії та двофазні потоки [121, 166-167, 174].

Дослідження генерації сіток алгебраїчними методами, контроль щільності і нахилу координатних ліній за допомогою перехідних коефіцієнтів у формулах трансфінитної інтерполяції проведено в роботах [86, 134]. Контроль щільності по координатним лініям за допомогою алгебраїчного методу через введення проміжної системи координат наведено в роботі [37].

Згущення вузлів сіток по координатним лініям сітки (вертикальним і горизонтальним) та до певного вузла за допомогою диференціального методу розглянуто в працях [37, 148]. Вплив контрольних функцій і форми межі області на розподіл вузлів сітки, що генерується еліптичним методом через розв'язання рівняння Бельтрамі, досліджено в роботах [66, 130].

Дослідження згущення вузлів сітки через контрольні функції, що задавали області діагональних ліній, круга, синусоїди за допомогою рівняння Ейлера, що застосовується в задачах газової динаміки, показано в статті [2]. Застосування контрольних функцій як фільтра згущення сітки використовується для глобальних кліматичних моделей в статті [158].

Дослідження контрольних функцій, що визначають розповсюдження джерел додаткової дії на межі крізь задану область, розглянуто в праці [118].

Генерація близьких до ортогональних сіток без зміни розподілу розміру комірки вихідних сіток методом деформування сітки на основі якісно виконаних деформацій, а також вплив контрольних функцій на ортогональність сітки розглянуто в роботі [91].

Коли основні проблеми залежать від часу, деформовані сітки змінюються в процесі зміни часу, і, таким чином, метод називається методом рухомих сіток. У методі скінченних елементів, що використовують рухомих сітку, зміна сіток у обчислювальній області використовується для керування перерозподілом сітки у фізичній області на кожному кроці часу. Потім рішення оновлюється за певною формулою. Цей метод застосовувався в багатьох додатках [161].

Еліптичні рівняння з розривними коефіцієнтами та наявності окремих джерел додаткової дії мають велике значення в динаміці рідин, матеріалознавстві та біологічних системах. Для розв'язання таких рівнянь можна застосовувати методи на основі скінченного об'єму [141], кусково-поліноміальної дискретизації [108], методу інтерфейсу зв'язку [109]. Спосіб узгодженої межі інтерфейсу (MIB – the matched interface and boundary) спочатку введено для розв'язання рівняння Максвелла з матеріальними інтерфейсами [182], а пізніше узагальнено до розв'язання еліптичних рівнянь з розривними коефіцієнтами та особливими джерелами додаткової дії [178-179, 186-187], а також рівняння Гельмгольца з матеріальними інтерфейсами [181]. У більшості підходів зазвичай використовуються прості регулярні декартові сітки. Такі сітки не є оптимальними для проблем з локалізованими особливостями рішення.

Однією з оптимальних стратегій локалізованих кардинальних змін є уточнення локальної сітки. Методи інтерфейсу на основі скінченних елементів та скінченних об'ємів можуть вбудовувати локально адаптивні алгоритми генерації сітки [171]. Однак дуже складно побудувати збіжні методи збіжних скінченних елементів або скінченних об'ємів на основі складних інтерфейсів, зокрема, інтерфейсів з геометричними особливостями [177, 178].

Аналіз підходів до деформації сітки розглянуто в роботі [151]. Більшість досліджень, що стосуються методу деформації сітки лінійної пружності, використовували метод скінченних елементів для дискретизації рівнянь лінійної пружності, а потім вирішували отриману лінійну систему узагальненим мінімальним залишковим методом (GMRES) [113]. Деформацію сітки за допомогою інтерполяційної аналогії можна застосовувати до довільних типів сіток, які містять загальні багатогранні елементи або висячі вузли [133]. Схеми, засновані на інтерполяції, досягають вищої обчислювальної ефективності та менших вимог до пам'яті порівняно з фізичними схемами [137, 157, 185]. Однак будь-який процес інтерполяції пов'язаний з певним полем помилок.

У дослідженні [170] корпус аеродинамічного крила 3D AGARD був перевірений з урахуванням взаємодії з рідиною, порівняно результати деформації сітки методом зважування на зворотній відстані (IDW) та методом інтерполяції радіальної базисної функції (RBF). Метод інтерполяції радіальної базисної функції може бути використаний як функція інтерполяції для перенесення переміщень, відомих на межах структурної сітки, в сітку рідини, що виробляє високоякісні сітки з розумним збереженням ортогональності поблизу деформуючих меж [102]. В статті [140] запропоновано в методі інтерполяції радіальної базисної функції техніку утримання, що обмежує деформацію сітки до навколишньої області рухомої поверхні.

В роботах [68-69] розглянуто методи деформації структурованої сітки з використанням контролюючих функцій диференціального рівняння Пуассона. Дослідження згущення вузлів сітки через контрольні функції, що задавали області діагональних ліній, круга, синусоїди за допомогою рівняння Ейлера, що застосовується в задачах газової динаміки, показано в статті [2].

Побудова структурованої сітки поверхні, що моделює щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області квантової точки різних видів через розв'язання хвильового рівняння Шредінгера виконано в роботах [155, 156].

Враховуючи широке застосування структурованих сіток в прикладних задачах, можна стверджувати, що розробка методів генерації дискретних моделей, скінченні елементи яких згущуються в місцях концентрації напружень і в місцях, де конструкція має особливу форму, є актуальною задачею.

1.4 Приклади практичного застосування генерації структурованих дискретних моделей

1.4.1 Огляд сфери застосування генерації структурованих дискретних моделей

На практиці застосування генерації структурованих сіток використовується для моделювання широкого кола об'єктів і процесів:

- моделювання об'єктів, матеріалів, деформацій, тріщин [26, 28, 98, 99, 107, 117, 129, 131, 154, 169, 173, 184];
- моделювання аеродинаміки, гідродинаміки, потоків різного походження [3, 88, 95, 114, 116, 120, 126, 131, 132, 142, 168-169, 173, 180, 183];
- моделювання задач теплопровідності [22, 95, 146, 154, 175];
- моделювання хвиль різної природи [103, 112, 135, 159];
- моделювання магнітостатичної задачі, оцінка електромагнітного поля [134, 180];
- оцінка щільності імпульсу електрона (EMD), його моментів і пов'язаної з ним інформаційної ентропії Шеннона для багатоелектронної молекулярної системи [138];
- моделювання щільності ймовірності знаходження електрону в заданій області квантової точки: циліндричної [38, 39, 56], конічної [54, 55, 155], кубічної [156], призматичної [40];
- моделювання щільності ймовірності знаходження електрону в тривимірній потенціальній ямі [57];
- дослідження зварювання тертям (FSW) [139];
- дослідження в циклонному дизайні падіння тиску [143];
- співставлення базисного представлення змінної поля над областю в контексті чисельного моделювання і зворотних задач, де неперервне скалярне або векторне поле над областю може бути представлено в різних скінченно вимірних базисних наближеннях, таких як неструктурований базис для

чисельного розв'язку прямої задачі і регулярна сітка для представлення розв'язку зворотної задачі [150].

Різні типи диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку можуть асоціюватися з різноманітними типами гідромеханічних задач. Наприклад, задачі, що містять залежність від часу, зводяться до параболічних або гіперболічних рівнянь. Параболічними рівняннями визначаються течії, що мають дисипацію, наприклад, течії, для яких істотною є в'язкість або теплопровідність, в цьому випадку розв'язок буде гладким, а градієнти із плином часу зменшуватимуться, якщо граничні умови не залежать від часу.

Якщо дисипаційні механізми відсутні, для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних розв'язок зберігає сталу амплітуду, а для нелінійних – амплітуда розв'язання може навіть зростати, таким розв'язанням характеризуються гіперболічні диференціальні рівняння в частинних похідних. Еліптичні диференціальні рівняння в частинних похідних зазвичай визначають задачі, що описують врівноважений або сталий стан течії. Але деякі сталі процеси також можна описати параболічними (примежовий шар) або гіперболічними рівняннями (нев'язка надзвукова течія) [24].

1.4.2 Побудова структурованої сітки аеродинамічної форми крила літака

Наведемо деякі приклади побудови структурованої сітки аеродинамічної форми NASA0012 крила літака, що розроблені за допомогою Національного консультативного комітету з аеронавтики (NASA), а параметри в числовому коді можуть бути введені в рівняння для точної генерації поперечного перерізу профілю і обчислення його властивостей.

Розглянемо просту зв'язану обмежену область D (рис. 1.3) в двовимірному просторі з декартовими координатами $\vec{x} = (x, y)^T$, що розділена на чотири області [162, с. 130].

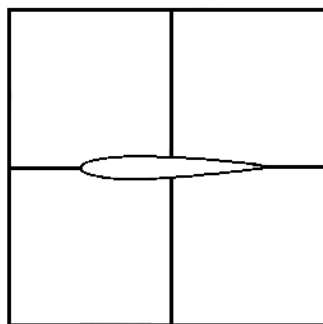


Рис. 1.3. Область D поблизу аеродинамічної форми NASA0012.

В узагальненому вигляді маємо рівняння Пуассона для генерації структурованої сітки

$$a_{22}\bar{x}_{\xi\xi} - 2a_{12}\bar{x}_{\xi\eta} + a_{11}\bar{x}_{\eta\eta} + (a_{22}P_{11}^1 - 2a_{12}P_{12}^1 + a_{11}P_{22}^1)\bar{x}_{\xi} + (a_{22}P_{11}^2 - 2a_{12}P_{12}^2 + a_{11}P_{22}^2)\bar{x}_{\eta} = 0,$$

де 6 коефіцієнтів P_{jk}^i називаються контрольними функціями.

Найпростіший приклад генерації сітки, що має назву лапласової сітки (рис. 1.4) [162, с. 131], отримаємо за умови, якщо всі 6 контрольних функцій дорівнюють нулю, тобто

$$P_{jk}^i = 0,$$

тоді маємо наступний вигляд рівняння Пуассона

$$a_{22}\bar{x}_{\xi\xi} - 2a_{12}\bar{x}_{\xi\eta} + a_{11}\bar{x}_{\eta\eta} = 0.$$

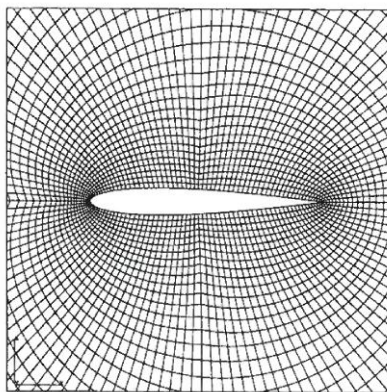


Рис. 1.4. Лапласова сітка.

Припустимо, що точки межі сітки задані на чотирьох краях E_1, E_2, E_3, E_4 області D, тоді сітка всередині цієї області може бути побудована на основі нормованої довжини дуги (рис. 1.5) [162, с. 133]. Отже, маємо 2 алгебраїчних рівняння для генерації сітки:

$$s = s_{E_3}^a(\xi)(1 - t) + s_{E_4}^a(\xi)t$$

$$t = t_{E_1}^a(\eta)(1 - s) + t_{E_2}^a(\eta)s$$

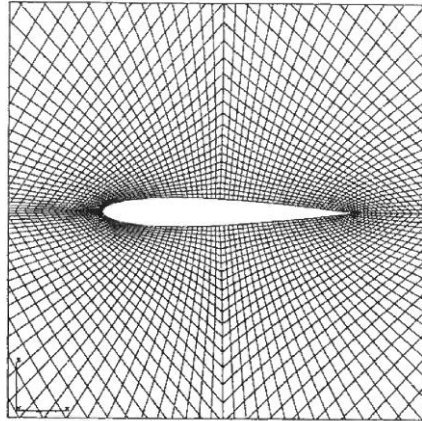


Рис. 1.5. Сітка на основі довжини дуги.

Якщо накласти граничні умови Дірихле-Неймана, то можна згенерувати сітку всередині області D , яка буде ортогональна всім чотирьом краям області D . В цьому випадку для генерації сітки (рис. 1.6) [162, с. 136] маємо рівняння

$$s = s_{E_3}^0(\xi)H_0(t) + s_{E_4}^0(\xi)H_1(t)$$

$$t = t_{E_1}^0(\eta)H_0(s) + t_{E_2}^0(\eta)H_1(s),$$

де верхній індекс 0 вказує на вимогу ортогональності, а H_0 та H_1 – кубічні функції інтерполяції Ерміта, що визначаються як

$$H_0(s) = (1 + 2s)(1 - s)^2 \quad H_1(s) = (3 - 2s)s^2 \quad 0 \leq s \leq 1$$

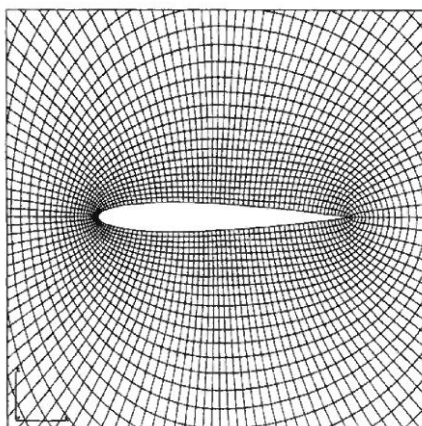


Рис. 1.6. Сітка з граничною ортогональністю.

Ортогональність до межі робить сітку гладкою по внутрішній межі області.

1.4.3 Побудова структурованих сіток під час дослідження стану електрона в заданій області квантової точки

Структуровані дискретні моделі застосовуються під час дослідження процесів та явищ в кванторозмірних гетеросистемах, що дозволяє розглянути стан електронів у різноманітних квантових точках. Для конічної квантової точки хвильове рівняння Шредінгера в циліндричній системі координат має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(r, z) = 0. \quad (1.4)$$

Для розв'язання рівняння (1.4) в частинних похідних використовуємо метод розділення змінних (метод Фур'є). Хвильову функцію шукаємо у вигляді:

$$\psi(r, z) = A \cdot \varphi_1(r) \cdot \varphi_2(z) = A \cdot J_0(k_1 r) \cdot \sin(k_2 z), \quad (1.5)$$

де k_1, k_2 – хвильові числа, $J_0(k_1 r)$ – функція Бесселя нульового порядку.

Тоді для обчислення щільності ймовірності знаходження електрона у заданій області конічної квантової точки для різних аксіальних та радіальних мод з рівняння (1.5) при $A=1$ отримаємо:

$$\rho(r, z) = |\psi(r, z)|^2 = J_0^2(k_1 r) \cdot \sin^2(k_2 z). \quad (1.6)$$

Побудову графіків щільності ймовірності (1.6) знаходження електрона в заданій області циліндричної квантової точки (рис. 1.7) виконуємо в пакеті програм Scilab для різних значень квантових чисел n_i [54, 155].

Для циліндричної квантової точки хвильову функцію можна знайти також за формулою (1.5) і отримати графік за допомогою структурованих сіток (рис. 1.8).

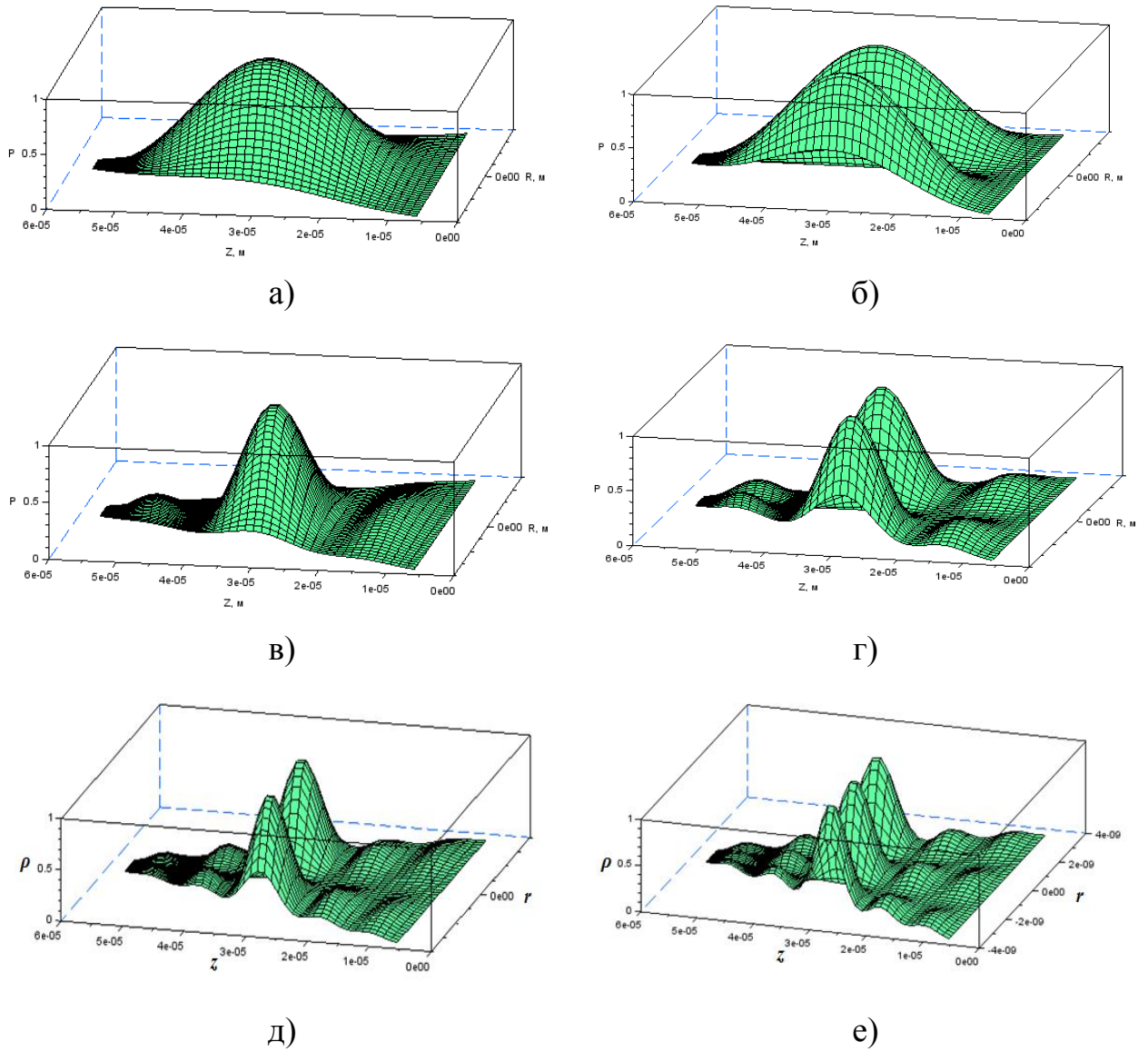


Рис. 1.7. Щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області кінчної квантової точки з відповідними значеннями квантових чисел:

- а) $n_1 = 1, n_2 = 1$; б) $n_1 = 1, n_2 = 2$; в) $n_1 = 2, n_2 = 1$;
 г) $n_1 = 2, n_2 = 2$; д) $n_1 = 3, n_2 = 2$; е) $n_1 = 3, n_2 = 3$.

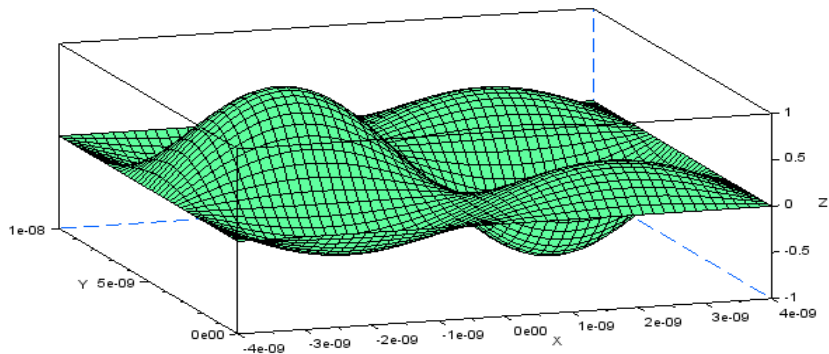


Рис. 1.8. Хвильова функція циліндричної квантової точки

Щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області циліндричної квантової точки буде обчислено також за формулою (1.6), відмінністю буде тільки область побудови (рис. 1.9) та відповідні обчислення [56].

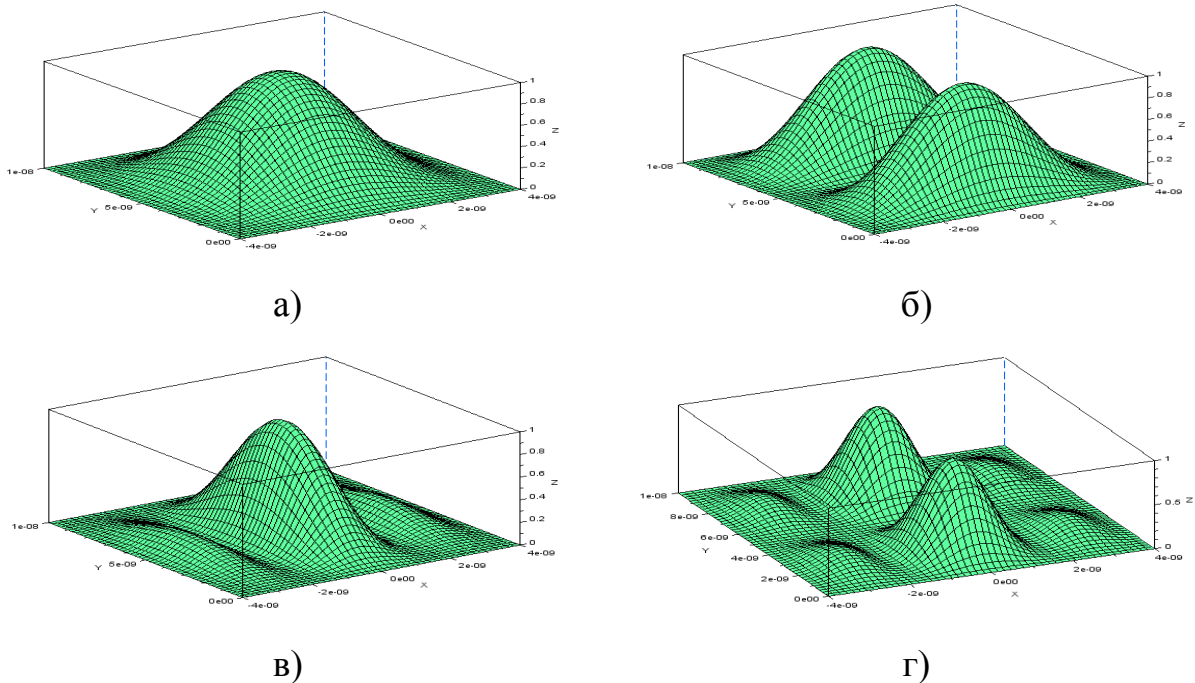


Рис. 1.9. Щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області циліндричної квантової точки з відповідними значеннями квантових чисел: а) $n_1 = 1, n_2 = 1$; б) $n_1 = 1, n_2 = 2$; в) $n_1 = 2, n_2 = 1$; г) $n_1 = 2, n_2 = 2$.

Виконаємо дослідження стану електрона для циліндричної квантової точки з оболонкою [38], що у першому наближенні має потенціальну енергію (модель обмежуючого потенціалу):

$$U(r, z) = \begin{cases} 0 & \text{у ядрі, якщо } 0 \leq r \leq R \text{ та } |z| \leq \frac{H}{2}, \\ U_0 & \text{у оболонці, якщо } R < r \leq R + d \text{ та } \frac{H}{2} \leq |z| \leq \frac{H}{2} + d. \end{cases} \quad (1.7)$$

Тоді рівняння Шредінгера (1.4) буде виконано тільки для ядра, а для оболонки набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} \cdot \psi_2(r, z) = 0, \quad (1.8)$$

Загальний вигляд хвильової функції для ядра $\psi_1(r, z)$ буде збігатися з формулою (1.6), а для оболонки $\psi_2(r, z)$ з урахуванням (1.8) може бути обчислено за формулою:

$$\psi_2(r, z) = B \cdot K_0(k_5 \cdot r) \cdot e^{-k_6 \cdot z}, \quad (1.9)$$

де $K_0(k_5 \cdot r)$ – функція Макдональда (модифікована функція Бесселя другого роду від уявного аргументу).

Тоді будемо графіки (рис. 1.10) відносної ($A=1$) щільності ймовірності знаходження електрона у заданій області циліндричної квантової точки з оболонкою, що дорівнює:

$$\rho(r, z) = \begin{cases} |\psi_1(r, z)|^2, \text{ якщо } |r| \leq R \text{ та } |z| \leq \frac{H}{2} \\ |\psi_2(r, z)|^2, \text{ якщо } R < |r| < R + d \text{ або } \frac{H}{2} \leq |z| \leq \frac{H}{2} + d \end{cases} \quad (1.10)$$

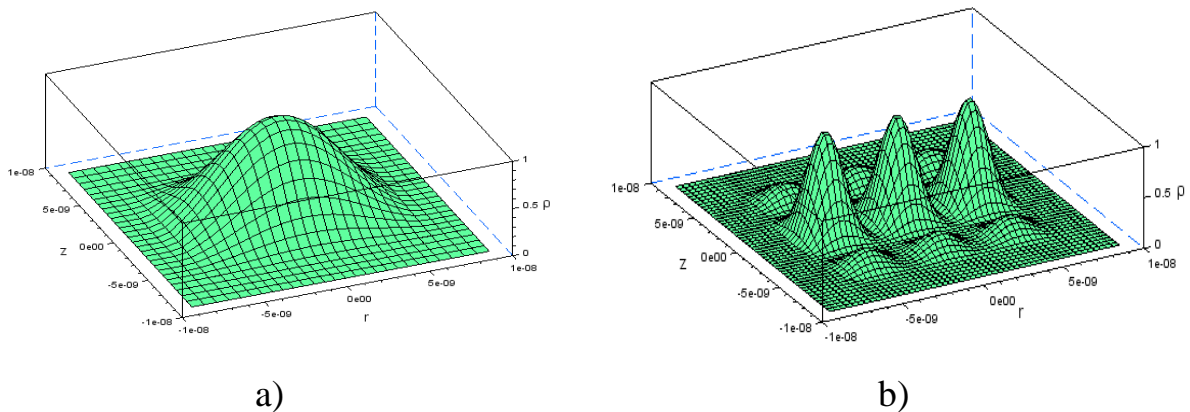


Рис. 1.10. Щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області циліндричної квантової точки з оболонкою з відповідними значеннями квантових чисел: а) $n_1 = 1, n_2 = 1$; б) $n_1 = 2, n_2 = 2$.

Розглянемо модель кубічної квантової точки (просторової потенціальної ями), ребро якої дорівнює $2a$, з оболонкою, товщина якої d [156]. Хвильове рівняння Шредінгера для стаціонарних станів S-електронів (орбітальний момент $l=0$) у ядрі (область I) має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + k_{1,1}^2 \cdot \psi_1(x, y, z) = 0, \quad (1.11)$$

де хвильове число для ядра

$$k_{1,1} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Для оболонки у випадку $U_0 > E$ (повна енергія):

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - k_{2,1}^2 \cdot \psi_2(x, y, z) = 0, \quad (1.12)$$

де хвильове число для оболонки:

$$k_{2,1} = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}.$$

Розв'язуючи задані рівняння методом Фур'є розділення змінних з врахуванням умови неперервності та гладкості хвильової функції, отримаємо різні розв'язки для парної, непарної та суперпозиції парної та непарної функцій.

Тоді щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області кубічної квантової точки для непарної хвильової функції дорівнює:

$$\begin{cases} \rho_{1,1}(x, y) = \sin^2 k_{3,1} x \cdot \sin^2 k_{3,1} y, & |x|, |y| \leq a, \\ \rho_{2,1}(x, y) = B_1 \cdot e^{-2k_{6,1} x} \cdot e^{-2k_{6,1} y}, & |x|, |y| \leq a + d, \end{cases} \quad (1.13)$$

На графіку (рис. 1.11) щільності ймовірності (1.13) різними кольорами позначено області ядра та оболонки.

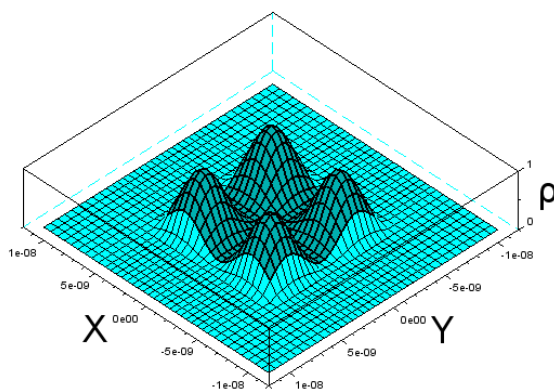


Рис. 1.11. Щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області кубічної квантової точки для непарної хвильової функції при $E=0.335$ eВ.

Щільність ймовірності (рис. 1.12) знаходження електрона в заданій області кубічної квантової точки для парної хвильової функції дорівнює:

$$\begin{cases} \rho_{1,2}(x, y) = \cos^2 k_{3,2}x \cdot \cos^2 k_{3,2}y, & |x|, |y| \leq a, \\ \rho_{2,2}(x, y) = B_2^2 \cdot e^{-2k_{6,2}x} \cdot e^{-2k_{6,2}y}, & |x|, |y| \leq a + d \end{cases} \quad (1.14)$$

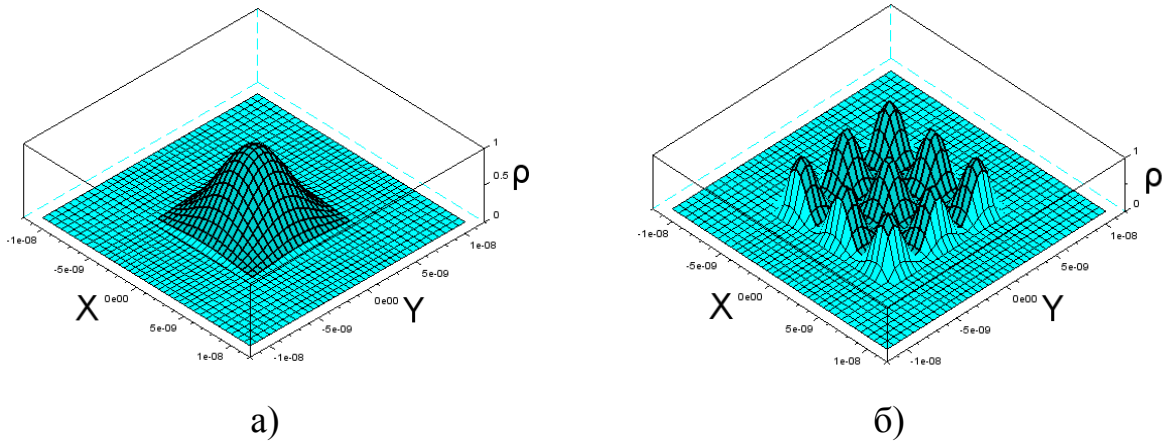


Рис. 1.12. Щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області кубічної квантової точки для випадку парної хвильової функції:

а) $E = 0.105$ eV, б) $E = 0.75$ eV.

Щільність імовірності (рис. 1.13) для стану суперпозиції парної та непарної хвильових функцій виражається залежністю:

$$\psi(x, y) = \cos k_{3,2}x \cdot \sin k_{3,1}y. \quad (1.15)$$

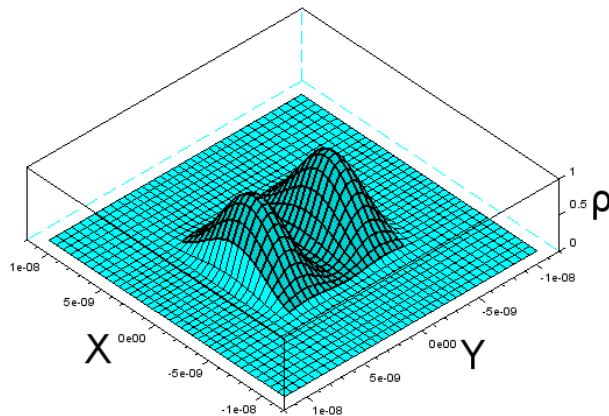


Рис. 1.13. Щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області квантової точки для стану суперпозиції парної та непарної хвильових функцій.

Отримані значення для кубічної квантової точки (рис. 1.13) можуть бути узагальнені для чотирикутної призматичної квантової точки.

Розглянемо стан електрона у трикутній пірамідальній (тетрадральній) квантовій точці у випадку непрозорих стінок. Використовується косокутна (трикутна) система координат: осі координат $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ спрямовано вздовж ребр тетраедра довжиною a , кут між якими $\alpha = 60^\circ$. Хвильове рівняння Шредінгера (1.11) для ядра квантової точки з використанням коефіцієнтів Ламе для косокутної системи координат набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + k^2 \psi(x, y, z) = 0. \quad (1.16)$$

Тоді графіки (рис. 1.14) відносної щільності ймовірності ($A = 1$) знаходження електрона у заданій точці області пірамідальної квантової точки при $z_1 = \frac{a}{2n_3}$:

$$\rho(x, y, z_1) = \sin^2 k_1 u \cdot \sin^2 k_2 v = \sin^2 k_1 \left(x - \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}\right) \cdot \sin^2 k_2 \frac{y}{\sin \alpha}. \quad (1.17)$$

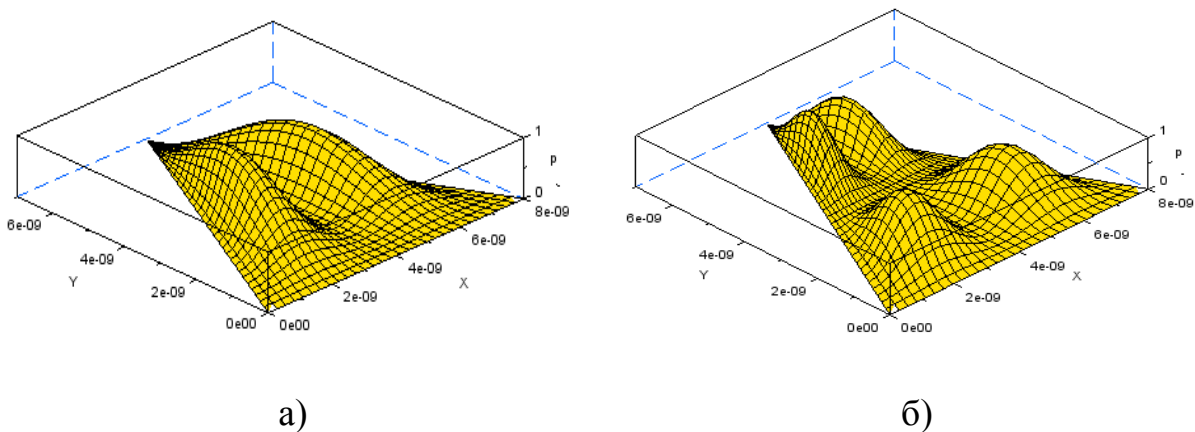


Рис. 1.14. Графіки відносної щільності ймовірності для різних квантових чисел при $z_1 = \frac{a}{2n_3}$: а) $n_1 = 2, n_2 = 1$; б) $n_1 = n_2 = 2$.

Проведені дослідження для різноманітних квантових точок (пірамідальної, кубічної, конічної, циліндричної) використовують для обґрунтування оптимальних параметрів квантових точок при проектуванні сонячних панелей із застосуванням низькорозмірних квантових систем.

Результати досліджень застосовують також при розробці імітаційних віртуальних лабораторних робіт з використанням комп'ютерного моделювання навчального курсу «Фізико-математичне забезпечення магістерських програм» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка і електромеханіка» в Таврійському державному агротехнологічному університеті імені Дмитра Моторного.

Висновки до розділу 1

В першому розділі проведено огляд сучасного стану генерації структурованих дискретних моделей, який є продовженням і доповненням попередніх досліджень, що проведені в роботі [80], а саме: описано основні кроки для побудови сітки, які є загальними для багатьох підходів їх автоматичної генерації; розглянуто алгебраїчні, еліптичні і варіаційні, гіперболічні методи генерації структурованих та блочно-структурованих сіток; проаналізовано спеціальні програмні засоби, за допомогою яких відбувається комп'ютерна генерація сіток; описано рівняння і теорії, на основі яких будуються сітки; наведено чисельні методи, що використовуються при генерації сіток; досліджено широке коло об'єктів і процесів, для моделювання якого використовуються структуровані сітки.

Дослідження методів генерації структурованих сіток виявило переваги та недоліки їхнього використання, а саме: переваги – можливість використання більш високого порядку апроксимації і меншої кількості ресурсів обчислювальних машин; недоліки – обмеження на форму елементів, структуру їхнього розміщення і на геометричну модель, адаптація до складних тіл досить трудомістка і є можливість появи вироджених елементів, декомпозицію на блоки можна застосувати для методів, коли блоки та границі можна представити явно, але у випадку надто складної форми тіла декомпозиція майже не застосовується. Популярною є комбінація генерації

структурованих та неструктурованих сіток, яка дозволяє використати всі переваги і обмежити недоліки обох видів сіток.

Наведено приклади побудови структурованої дискретної моделі аеродинамічної форми NASA0012 крила літака, що розроблені за допомогою Національного консультативного комітету з аеронавтики (НАСА). Також проведено генерацію структурованої сітки щільності ймовірності знаходження електрона в заданій області різноманітних квантових точок з різними хвильовими числами.

Узагальнюючи результати дослідження, можна зробити висновок, що проведений огляд підтверджує актуальність розробки методів генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів для подальшого чисельного аналізу їх властивостей.

Основні наукові і практичні результати даного розділу опубліковано в працях [22, 39-40, 54-57, 67, 71, 155-156].

РОЗДІЛ 2

ГЕНЕРАЦІЯ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ДВОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

2.1 Постановка задачі генерації сітки за допомогою диференціального рівняння Пуассона

Диференціальні методи на основі еліптичних і параболічних рівнянь дають гладкі внутрішні координатні лінії, тому є можливість будувати ортогональні лінії та лінії, що згущуються. Гіперболічні рівняння дозволяють будувати ортогональну систему, але не завжди їх можна застосовувати для областей, наприклад, які мають задані граничні умови. Отже, такі методи використовують для областей, що не вимагають спеціально заданого розподілу вузлів сітки.

Для криволінійної розрахункової області при побудові сітки використовують перетворення координат, що дозволяє криволінійну фізичну область в системі координат (x, y) перевести до прямокутної розрахункової області в системі (ξ, η) . Зв'язок між фізичною та розрахунковою областями визначається залежностями:

$$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta). \quad (2.1)$$

Трансформація від одних координат до інших відбувається за правилом

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{pmatrix},$$

де J – визначник матриці перетворень (якобіан) обчислюється за правилом:

$$J = x_\xi \cdot y_\eta - x_\eta \cdot y_\xi.$$

Тоді за ланцюговим правилом обчислення похідних, отримаємо наступні співвідношення для перетворення координат:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Розглянемо диференціальний метод на прикладі еліптичного рівняння. У найпростішому узагальненому вигляді, з урахуванням перетворення з фізичної до розрахункової області координат (2.1), маємо рівняння Лапласа для генерації структурованої сітки:

$$\begin{cases} \nabla^2 \xi = 0, \\ \nabla^2 \eta = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Рівняння (2.2) дозволяють отримати рівномірну сітку, а для отримання згущення сітки в потрібних областях використовують контрольні функції $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ і рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 \xi = P(\xi, \eta), \quad \nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta). \quad (2.3)$$

Оскільки лінії сітки задають в просторі (ξ, η) , то необхідно отримати залежності $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, тому залежні і незалежні змінні в рівнянні (2.3) необхідно поміняти місцями. Розв'язок системи (2.3) в розрахунковій області системи координат (ξ, η) отримує вигляд:

$$\begin{cases} g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + g \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0, \\ g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + g \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

де

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad g = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2. \end{aligned}$$

У загальному випадку рівняння (2.4) є нелінійними, оскільки коефіцієнти залежать від невідомих величин, тому систему рівнянь (2.4) розв'язують з використанням чисельних методів, наприклад, різницевих схем.

2.2 Переваги і недоліки генерації сітки за допомогою диференціального рівняння Пуассона

Диференціальні методи на основі еліптичних і параболічних рівнянь зазвичай можна використовувати для генерації сіток в областях з довільною межею, оскільки ці методи дають гладкі внутрішні координатні лінії, отже злами поверхні не будуть розповсюджуватися всередину області побудови. Тому є можливість будувати ортогональні лінії та лінії, що згущуються за заданим правилом. Наприклад, на відміну від еліптичних в алгебраїчних методах для складних областей може відбуватися накладання комірок одна на одну, сітка може вийти за межі заданої області. Гіперболічні рівняння простіші для чисельної реалізації, також дозволяють будувати ортогональну сітку, але їх не завжди можна застосувати до областей, де жорстко задана тільки частина граничних поверхонь. Тому гіперболічні методи використовуються зазвичай в простих областях, що мають деякі бічні грані, що не потребують спеціально заданого розподілу вузлів сітки [27].

2.3 Чисельний розв'язок рівняння Пуассона з використанням різницевої схеми

2.3.1 Апроксимація похідних з використанням різницевої схеми

Методи з використанням різницевої схеми ґрунтуються на наближеній заміні похідних їх скінченнорізницеви́ми аналогами [20, 65]. Побудуємо наближення першої та другої похідних для функції однієї змінної $u(x)$, що визначена на відрізку $[a, b]$, неперервна і має неперервні похідні, наприклад, до третього порядку включно. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n проміжків довжиною

$$h = \frac{b - a}{n}. \quad (2.5)$$

Позначимо через u_i, u'_i, u''_i, u'''_i значення функції $u(x)$ та її перших трьох похідних у точці $x = x_i$ і ($i = 0, 1, \dots, n$). Представимо значення функції $u(x)$ в околі точки $x = x_i$ за допомогою формули Тейлора:

$$u(x) = u_i + \frac{u'_i}{1!}(x - x_i) + \frac{u''_i}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{u'''_i}{3!}(x - x_i)^3 + O(|x - x_i|^4) \quad (2.6)$$

де $O(|x - x_i|^4)$ – залишковий член формули Тейлора, що має величину того ж порядку, що і $|x - x_i|^4$.

За допомогою формули (2.6), обчислюємо значення функції $u(x)$ в точках $x = x_{i-1}$ і $x = x_{i+1}$:

$$u_{i-1} = u_i + \frac{u'_i}{1!}(x_{i-1} - x_i) + \frac{u''_i}{2!}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{u'''_i}{3!}(x_{i-1} - x_i)^3 + O(|x_{i-1} - x_i|^4), \quad (2.7)$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{u'_i}{1!}(x_{i+1} - x_i) + \frac{u''_i}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{u'''_i}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + O(|x_{i+1} - x_i|^4). \quad (2.8)$$

Враховуючи рівність (2.5), отримаємо наступні рівності:

$$x_{i-1} - x_i = -h, \quad x_{i+1} - x_i = h. \quad (2.9)$$

Тоді підставляємо значення (2.9) в рівності (2.7) та (2.8), отримаємо спрощені вирази:

$$u_{i-1} = u_i - \frac{u'_i}{1!}h + \frac{u''_i}{2!}h^2 - \frac{u'''_i}{3!}h^3 + O(h^4), \quad (2.10)$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{u'_i}{1!}h + \frac{u''_i}{2!}h^2 + \frac{u'''_i}{3!}h^3 + O(h^4). \quad (2.11)$$

Знайдемо різницю виразів (2.11) та (2.10):

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2u'_i h + \frac{u'''_i}{3}h^3 + O(h^4). \quad (2.12)$$

З рівності (2.12) отримаємо значення для u'_i :

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \frac{u_i'''}{6} h^2 + O(h^4),$$

з якого отримаємо вираз:

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2). \quad (2.13)$$

Перший доданок $\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$ правої частини рівності (2.13) називають центральним скінченнорізницеvim відношенням, що є наближенням похідної, виходячи з її визначення. Другий доданок $O(h^2)$ показує похибку заміни змінної: при зменшенні величини h похибка буде наближуватись за своїм значенням до нуля як h^2 , тобто наближення має другий порядок точності. Це дозволяє визначити величину похибки для кожної апроксимації, що застосовується до певних диференціальних рівнянь та геометричних об'єктів, для яких відбувається генерація сітки.

З рівності (2.13) отримуємо центральну різницеву схему:

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad (2.14)$$

Проводячи аналогічні дії для пари точок $x = x_i$ і $x = x_{i+1}$, отримаємо різницеву схему справа:

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad (2.15)$$

і для пари точок $x = x_i$ і $x = x_{i-1}$, отримаємо різницеву схему зліва:

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad (2.16)$$

Вираз (2.14) зазвичай використовують для внутрішніх точок розбиття, а рівності (2.15) та (2.16) на межі області.

Щоб знайти наближене значення для другої похідної, додаємо вирази (2.10) і (2.11), отримаємо:

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + u_i'' h^2 + O(h^4). \quad (2.17)$$

Виражаємо значення u_i'' з рівності (2.17), тоді отримаємо:

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad (2.18)$$

тоді різницева схема для другої похідної має вигляд:

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - u_i + u_{i-1}}{h^2}. \quad (2.19)$$

З виразу (2.18) робимо висновок, що наближення (2.19) має другий порядок точності.

Різницеву схему називають стійкою, якщо зі зменшенням кроку розбиття початкова похибка не зростає. В іншому випадку маємо нестійку різницеву схему. Розглянемо вираз для норми сітки, що генерується за допомогою рівняння з двома змінними x та y , де позначимо через $u_{i,j}$ значення $u(x, y)$ у вузлі (i, j) :

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j})^2},$$

Тоді відхилення наближеного розв'язку u від точного U можна обчислити за схожою схемою:

$$\|u - U\| = \sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j} - U_{i,j})^2} \quad (2.20)$$

Вираз (2.20) можна застосовувати для контролю ітераційного процесу розв'язування системи рівнянь між наближеними значеннями на двох сусідніх кроках ітерації.

2.3.2 Різницєва схема для рівняння Пуассона

Крайова задача для рівняння Пуассона (2.4) полягає у знаходженні функцій $x(\xi, \eta)$ та $y(\xi, \eta)$, що визначені в певній області з урахуванням крайових умов. Розглянемо випадок умови Діріхле, тобто відоме значення

функції на межі обчислюваної області. Застосуємо різницеві схеми для рівняння Пуассона (2.4) в розрахунковій області системи координат (ξ, η) . Оскільки значення функції на межі області відомо, то необхідно знайти тільки значення функції у внутрішній області, тому буде застосовано тільки центральна різницева схема (2.14) для апроксимації першої похідної та різницева схема (2.19) для другої похідної з урахуванням по якій змінній береться похідна. Позначимо через $x_{i,j}$ значення $x(\xi, \eta)$ у вузлі (i, j) , аналогічно і для $y_{i,j}$.

Розрахункова область системи координат (ξ, η) представляє собою квадрат $[0,1] \times [0,1]$. Тому доречно використати рівномірне розбиття в обох напрямках ξ та η з однаковим кроком розбиття h , що спростить подальші обчислення в обох напрямках. Тоді отримаємо наступні наближення для похідних першого порядку рівняння (2.4):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{(i,j)} &= \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2h}, & \left. \frac{\partial x}{\partial \eta} \right|_{(i,j)} &= \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2h}, \\ \left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_{(i,j)} &= \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2h}, & \left. \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_{(i,j)} &= \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2h}, \end{aligned}$$

для похідних другого порядку по одній змінній:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right|_{(i,j)} &= \frac{x_{i-1,j} - 2x_{i,j} + x_{i+1,j}}{h^2}, & \left. \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right|_{(i,j)} &= \frac{x_{i,j-1} - 2x_{i,j} + x_{i,j+1}}{h^2}, \\ \left. \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right|_{(i,j)} &= \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{h^2}, & \left. \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right|_{(i,j)} &= \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{h^2}, \end{aligned}$$

для мішаних похідних другого порядку, використавши почергово, наприклад, праву різницеву схему (2.15) для кожної змінної окремо, отримаємо вирази:

$$\left. \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{(i,j)} = \frac{x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} - x_{i+1,j} + x_{i,j}}{h^2}, \quad \left. \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{(i,j)} = \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1} - y_{i+1,j} + y_{i,j}}{h^2}.$$

Якщо взяти центральну різницеву схему, то для мішаних похідних другого порядку отримаємо наступні вирази:

$$\left. \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{(i,j)} = \frac{x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1}}{4h^2},$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{(i,j)} = \frac{y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1}}{4h^2}.$$

Підставляємо отримані наближення для похідних в рівняння (2.4). Оскільки крок розбиття всюди був однаковим, то є доцільність виконати скорочення там, де це можливо в отриманому рівнянні. Враховуючи масштабність отриманих виразів і те, що чисельний розв'язок буде виконано в пакеті програм Scilab, доречним буде під час написання програми окремо обчислити всі структурні компоненти рівняння (2.4). Отримане наближення для рівняння (2.4) буде нелінійним рівнянням, тому розв'язання буде виконано чисельним методом. Для цього можна використати метод простих ітерацій чи його удосконалену версію – метод Зейделя.

В найпростішому випадку (на прикладі залежності від однієї змінної) при використанні методу простих ітерацій задане нелінійне рівняння:

$$f(x) = 0 \quad (2.21)$$

записується у вигляді:

$$x = g(x). \quad (2.22)$$

Нехай початкове наближення до кореня заданого рівняння (2.21) відомо і дорівнює

$$x = x_0. \quad (2.23)$$

Підставляємо (2.23) в праву частину (2.22) і отримаємо:

$$x_1 = g(x_0). \quad (2.24)$$

Підставляємо значення (2.24) знову в рівняння (2.22) і отримаємо:

$$x_2 = g(x_1). \quad (2.25)$$

Продовжуємо далі ці дії, тоді отримаємо загальну формулу простої ітерації:

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

Цикл обчислень за формулою (2.26) проводиться, поки не буде виконана умова наперед заданої точності ε :

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon. \quad (2.27)$$

Для кількості змінних, що більша за 1, ліва частина (2.27) приймає вигляд нормованої величини, наприклад, що має структуру (2.20).

Метод Зейделя розв'язання систем рівнянь відрізняється від методу простих ітерацій тим, що після знаходження деякого наближення i -тої компоненти одразу використовуємо його для пошуку наступних $(i + 1)$, $(i + 2)$, ..., n -тої компонент. Це дозволяє забезпечити більш високу точність збіжності методу Зейделя порівняно з методом простих ітерацій.

2.4 Методи побудови початкової сітки

2.4.1 Рівномірна сітка

Рівномірна сітка будується алгебраїчним методом, що розподіляє вузли сітки на рівній відстані один від одного у відповідному напрямку. Якщо область є прямокутником або квадратом, то розподіл стає найпростішим. Наприклад, маємо прямокутник $[a, b] \times [c, d]$ зі сторонами, що паралельні координатним лініям, тоді $x \in [a, b]$ та $y \in [c, d]$. В цьому випадку при заданому кроці розбиття h отримаємо наступні формули задання внутрішніх точок в кожному вузлі (i, j) :

$$x_{i,j} = x_{1,j} + h_x(i - 1), \quad y_{i,j} = y_{i,1} + h_y(j - 1). \quad (2.28)$$

Кроки розбиття кожного окремого інтервалу h_x та h_y (якщо область є квадратною, то $h_x = h_y$) можна знайти за формулою (2.5) відповідно до інтервалу, що розбивається, та кількістю отриманих проміжків n . Варто зазначити, що під час генерації сітки найчастіше через n позначають кількість точок розбиття в заданому напрямку, тоді кількість проміжків буде

дорівнювати $n - 1$. В цьому випадку формула (2.5) для h_x та h_y приймає вигляд:

$$h_x = \frac{b - a}{n_x - 1}, \quad h_y = \frac{d - c}{n_y - 1} \quad (2.29)$$

Якщо область генерації сітки є довільним чи криволінійним чотирикутником (рис. 2.1), тоді нам будуть відомі функції, що задають сторони чотирикутника, а отже відомі значення $x_{1,j}$, $x_{n,j}$, $x_{i,1}$, $x_{i,n}$, $y_{1,j}$, $y_{n,j}$, $y_{i,1}$, $y_{i,n}$, тоді крок інтервалу розбиття буде обчислено для рядка чи стовпчика окремо, наприклад:

$$h_{xj} = \frac{x_{n,j} - x_{1,j}}{n_x - 1}, \quad h_{yi} = \frac{y_{i,n} - y_{i,1}}{n_y - 1} \quad (2.30)$$

а координати внутрішніх точок початкової сітки можуть бути обчислені, якщо в (2.28) підставити відповідні значення кроку (2.30), тоді:

$$x_{i,j} = x_{1,j} + h_{xj}(i - 1), \quad y_{i,j} = y_{i,1} + h_{yi}(j - 1). \quad (2.31)$$

Формули (2.31) з підстановкою (2.30) при однакових кроках розбиття та однаковій кількості вузлів по відповідним напрямленням сітки можуть бути перетворені до вигляду:

$$x_{i+1,j+1} = \frac{x_{1,j+1} \cdot (n-1-i) + x_{n,j+1} \cdot i}{n-1}, \quad y_{i+1,j+1} = \frac{y_{i+1,1} \cdot (n-1-j) + y_{i+1,n} \cdot j}{n-1} \quad (2.32)$$

Недоліком генерації початкової рівномірної сітки є побудова сітки для ввігнутих областей, оскільки така сітка спочатку може виходити за межі області генерації, що позначено темно-синім кольором (рис. 2.1, б), а далі це призводить до перехрещування ліній сітки між собою біля ввігнутої межі області.

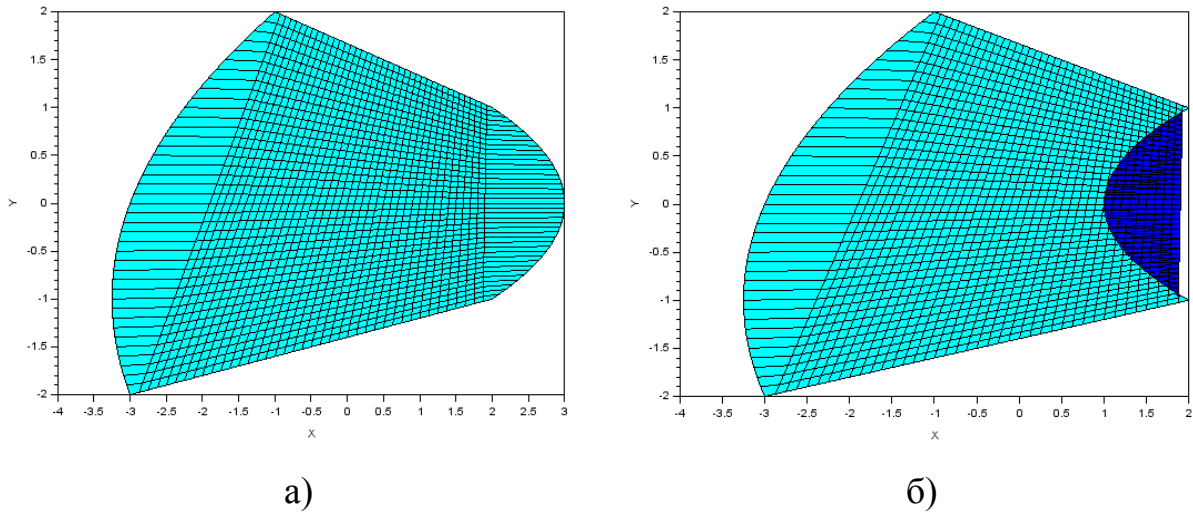


Рис. 2.1. Початкова рівномірна сітка: а) опукла область, б) з опуклою та ввігнутою стороною.

2.4.2 Трансфінитна інтерполяція

Алгебраїчні методи забезпечують швидку побудову сітки, контроль густоти і нахилу координатних ліній за допомогою перехідних коефіцієнтів у формулах трансфінитної інтерполяції, для якої використовуються поліноми. Проте в складних областях алгебраїчні методи можуть не давати потрібний результат: елементи можуть мати кути, близькі до 180° (рис. 2.2). Тому алгебраїчні методи найчастіше використовують як початкове наближення при використанні ітераційних алгоритмів.

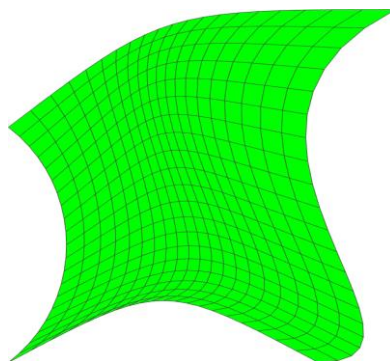


Рис. 2.2. Елементи сітки мають кути, що близькі до розгорнутих

Для контролю згущення сітки в заданій області, враховуючи зв'язок між фізичною та розрахунковою областями (2.1), можна використати проміжну

систему координат. Наприклад, для проміжної системи координат (s, t) можна використати функцію розтягу, що має вигляд:

$$s = P\xi + (1 - P) \left[1 - \frac{\text{th}[Q(1-\xi)]}{\text{th}Q} \right], \quad (2.33)$$

де P і Q – параметри, що забезпечують контроль розподілу точок сітки [37].

Керувати розподіленням вузлів сітки можна, наприклад, при постійному значенні одного параметру $Q = 2$ та різних значеннях іншого $P = 0,1$ – згущення відбувається ліворуч (рис. 2.3. а), $P = 1$ – сітка рівномірна (рис. 2.3. б), $P = 1,9$ – згущення відбувається праворуч (рис. 2.3. в). В формулі (2.33) сітка при $P = 1$ очевидно буде рівномірною, а параметр Q вже не має впливу.

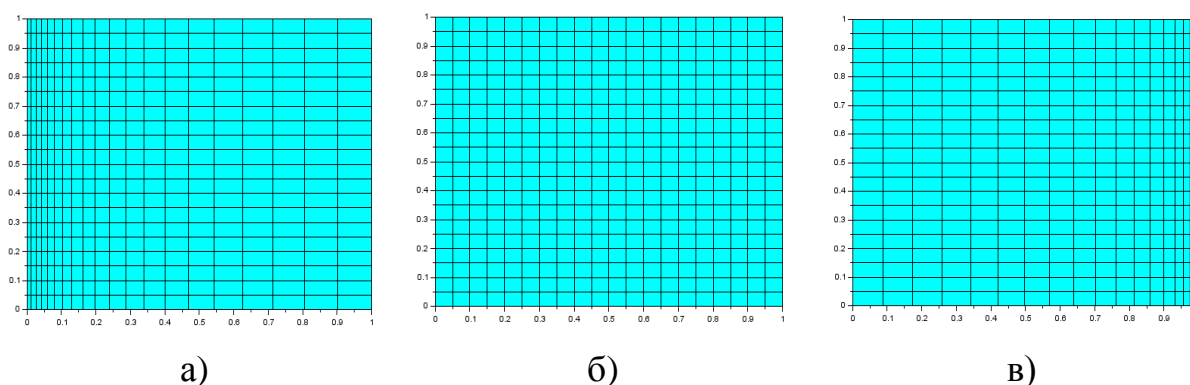


Рис. 2.3. Керування згущенням сітки

2.5 Алгоритм генерації сітки в пакеті програм Scilab

Алгоритм програми призначено для побудови двовимірної структурованої сітки за допомогою диференціального рівняння Пуассона. Використання рівняння Пуассона дозволяє підвищити швидкість генерації сітки та підвищити точність чисельного аналізу за рахунок управління розподілом вузлів по вихідній області. Для побудови структурованої сітки використовується чисельний розв'язок рівняння Пуассона (2.4) методом Зейделя. Отримані сітки можна використовувати для розв'язку крайових задач, визначених на вихідній області. Розглянемо випадок, коли $P(\xi, \eta) = 0$,

$Q(\xi, \eta) = 0$, що дасть змогу дослідити вплив вибору початкового розбиття на генерацію сітки. Отже порівняємо побудови сітки з використанням рівномірного початкового розбиття та початкової сітки, що побудована за допомогою трансфінитної інтерполяції на геометричній області криволінійного чотирикутника, дві протилежні сторони якого прямі, а дві інші – задаються кривими Безьє [25]. На початку роботи програми необхідно задати кількість точок розбиття n по кожному напрямку, в нашому випадку це одне й те саме значення для напрямків x та y . Далі визначаємо наявність матриць для координат x та y , а враховуючи, що буде використано метод Зейделя, то необхідно задати й проміжні матриці. Наведемо лістинг програми із збереженням кольору шрифту програми, де кожному кольору відводиться своя роль, наприклад, замітки автора вказуються зеленим кольором. В лістингу будуть зустрічатися пусті рядки, що робиться для зручності сприйняття інформації блоками, а не суцільним записом. Отже початкові рядки програми будуть містити наступну інформацію:

```
0001 //Вхідні дані //
0002 //Число розбиття n//
0003 clear;
0004 n=31;
0005 X=zeros(n,n);
0006 Y=zeros(n,n);
0007 X1=zeros(n,n);
0008 Y1=zeros(n,n);
```

Далі задаємо координати трьох точок, що обмежують область зліва та справа: нижню, середню та верхню. Ліворуч: (x_{ln}, y_{ln}) – внизу, (x_{ls}, y_{ls}) – всередині для задання вигину кривої Безьє, (x_{lv}, y_{lv}) – вгорі. Праворуч: (x_{rp}, y_{rp}) – внизу, (x_{rs}, y_{rs}) – всередині для задання вигину кривої Безьє, (x_{rv}, y_{rv}) – вгорі. Наприклад:

```

0011 xln=-3;
0012 yln=-2;
0013 xls=-6;
0014 yls=0;
0015 xlv=-4;
0016 ylv=2;
0017
0018 xpn=2;
0019 ypn=-1;
0020 xps=3;
0021 yps=0;
0022 xpv=2;
0023 ypv=1;

```

Формуємо матриці з вказаних точок:

```

0025 P = [xln yln; xls yls; xlv ylv];
0026 Q = [xpn ypn; xps yps; xpv ypv];

```

Задаємо функцію Безьє з використанням функцій Бернштейна:

```

0001 function b=bernstein(t, n, i)
0002     b = t^i * (1 - t) ^ (n - i) * factorial(n) / (factorial(i) * factorial(n - i));
0003 endfunction
0033
0001 function h=bezier(t, P)
0002     m = size(P, 'r');
0003     h = bernstein(t, m - 1, 0) * P(1, :);
0004     for i = 2:m
0005         h = h + bernstein(t, m-1, i-1) * P(i, :);
0006     end
0007 endfunction

```

```

0041
0042 t = [0:0.01:1];
0043 pp=zeros(size(t, 2), 2);
0044 pq=zeros(size(t, 2), 2);
0045
0046 for i = 1 : n
0047     pp(i, :) = bezier((i-1)/(n-1), P);
0048     pq(i, :) = bezier((i-1)/(n-1), Q);
0049 end

```

Далі виконуємо задання початкової сітки методом рівномірного розбиття (сценарій 1):

```

0051 //Крайові початкові значення по розбиттю//
0052 // Рівномірне розбиття//
0053 for i=1 : n
0054     X(1,i)=pp(i,1);
0055     Y(1,i)=pp(i,2);
0056     X(i,1)=xln+(xpn-xln)*(i-1)/(n-1);
0057     Y(i,1)=yln+(ypn-yln)*(i-1)/(n-1);
0058     X(n,i)=pq(i, 1);
0059     Y(n,i)=pq(i, 2);
0060     X(i,n)=xlv+(xpv-xlv)*(i-1)/(n-1);
0061     Y(i,n)=ylv+(ypv-ylv)*(i-1)/(n-1);
0062 end
0063
0064 //Внутрішні початкові значення по розбиттю//
0065 for k=1 : n-2
0066     for j=1 : n-2
0067         X(k+1,j+1)=(X(k+1,1)*(n-1-j)+X(k+1,n)*j)/(n-1);
0068         Y(k+1,j+1)=(Y(k+1,1)*(n-1-j)+Y(k+1,n)*j)/(n-1);

```

0069 end

0070 end

Або виконуємо задання початкової сітки методом трансфінітної інтерполяції (сценарій 2):

0050 *//Значення ліворуч//*

0001 **function** **x**=**x****l**(**eta**)

0002 **b** = **bezier**(**eta**, **P**);

0003 **x** = **b**(1);

0004 **endfunction**

0001 **function** **y**=**y****l**(**eta**)

0002 **b** = **bezier**(**eta**, **P**);

0003 **y** = **b**(2);

0004 **endfunction**

0059 *//Значення праворуч//*

0001 **function** **x**=**x****r**(**eta**)

0002 **b** = **bezier**(**eta**, **Q**);

0003 **x** = **b**(1);

0004 **endfunction**

0001 **function** **y**=**y****r**(**eta**)

0002 **b** = **bezier**(**eta**, **Q**);

0003 **y** = **b**(2);

0004 **endfunction**

0068 **x**l0 = **x****l**(0);

0069 **x**r0 = **x****r**(0);

0070 **x**l1 = **x****l**(1);

0071 **x**r1 = **x****r**(1);

0072 **y**l0 = **y****l**(0);

0073 **y**r0 = **y****r**(0);

0074 **y**l1 = **y****l**(1);

```

0075 yr1 = yr(1);
0001 function x=xb(xi)
0002     x = xl0 + (1 - xi) * (xr0 - xl0);
0003 endfunction
0001 function y=yb(xi)
0002     y = yl0 + (1 - xi) * (yr0 - yl0);
0003 endfunction
0082
0001 function x=xt(xi)
0002     x = xl1 + (1 - xi) * (xr1 - xl1);
0003 endfunction
0001 function y=yt(xi)
0002     y = yl1 + (1 - xi) * (yr1 - yl1);
0003 endfunction
0089 //Виконання циклу для задання координат всіх точок сітки//
0090 for k=1 : n
0091     xi = (k - 1) / (n - 1);
0092     for j=1 : n
0093         eta = (j - 1) / (n - 1);
0094         X(k, j) = (1 - xi) * xl(eta) + xi * xr(eta) + (1 - eta) * xb(xi) + eta * xt(xi)
- (1 - xi) * (1 - eta) * xb(0) - (1 - xi) * eta * xt(0) - xi * (1 - eta) * xb(1) - xi * eta *
xt(1);
0095         Y(k, j) = (1 - xi) * yl(eta) + xi * yr(eta) + (1 - eta) * yb(xi) + eta * yt(xi)
- (1 - xi) * (1 - eta) * yb(0) - (1 - xi) * eta * yt(0) - xi * (1 - eta) * yb(1) - xi * eta *
yt(1);
0096     end
0097 end

```

Приводимо у відповідність значення початкової та проміжної матриць:

```
0099 //Відповідність матриць//
```

```
0100 X1=X;
```

```
0101 Y1=Y;
```

Починаємо ітераційний процес розв'язування рівняння Пуассона методом Зейделя з контролем середнього квадратичного відхилення отриманих результатів, виводом на екран результатів відхилення на кожному сотому кроці ітерацій, а також можливість зупинити процес (break), якщо буде виконана спеціальна умова для заданої точності відхилення ($\sqrt{\text{epsilon}_x^2 + \text{epsilon}_y^2} < 0.001$):

```
0102 //Кількість ітерацій m//
```

```
0103 m=10000;
```

```
0104 for k=1 : m
```

```
0105     for i=2 : n-1
```

```
0106         for j=2 : n-1
```

```
0107             g11 = ((X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) ^ 2 + (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) ^ 2) / 4;
```

```
0108             g12 = (X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) * (X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) / 4 + (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) * (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) / 4;
```

```
0109             g22 = ((X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) ^ 2 + (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) ^ 2) / 4;
```

```
0110             X1(i,j) = (g22 * (X1(i-1,j) + X1(i+1,j)) - g12 * (X1(i+1,j+1) - X1(i+1,j-1) - X1(i-1,j+1) + X1(i-1,j-1)) / 2 + g11 * (X1(i,j-1) + X1(i,j+1))) / (2 * g11 + 2 * g22);
```

```
0111             Y1(i,j) = (g22 * (Y1(i-1,j) + Y1(i+1,j)) - g12 * (Y1(i+1,j+1) - Y1(i+1,j-1) - Y1(i-1,j+1) + Y1(i-1,j-1)) / 2 + g11 * (Y1(i,j-1) + Y1(i,j+1))) / (2 * g11 + 2 * g22);
```

```
0112         end
```

```
0113     end
```

```
0114 //Крок циклу//
```

```
0115 //Відхилення по x i y//
```

```
0116 epsilonx=sqrt(sum((X1-X).^2));
```

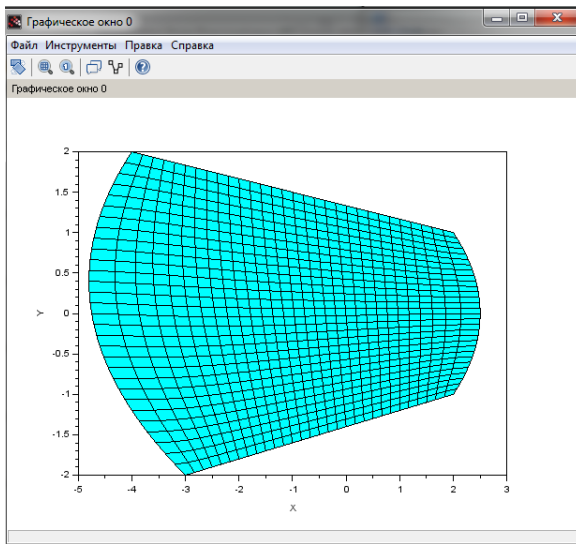
```

0117  epsilon=sqrt(sum((Y1-Y).^2));
0118  proverka = modulo(k,100);
0119  if proverka == 0 then
0120      disp(epsilon,"відхилення по у",epsilonx,"відхилення по
х",k,"Номер кроку циклу")
0121  end
0122  X=X1;
0123  Y=Y1;
0124  if sqrt(epsilonx^2 + epsilon^2) < 0.001 then
0125      disp(k,"Номер кроку циклу");
0126      disp(epsilon,"відхилення по у",epsilonx,"відхилення по х");
0127      break;
0128  end
0129 end

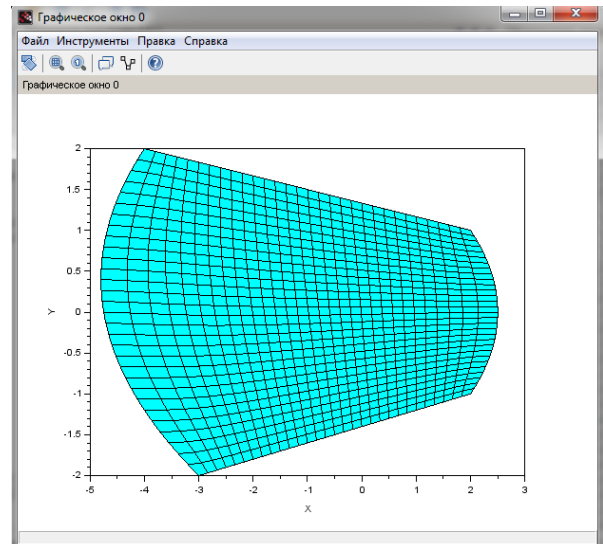
```

Далі виконується безпосередньо побудова отриманої сітки за допомогою команди plot3d.

Під час виконання програми було порівняно результати швидкості збіжності ітераційного процесу (кількість кроків ітерацій) для кожної початкової сітки з однаковою областю побудови. Так, наприклад, для вказаних значень точок, що обмежують область побудови, (з параметрами $x_{ln} = -3$; $y_{ln} = -2$; $x_{ls} = -6$; $y_{ls} = 0$; $x_{lv} = -4$; $y_{lv} = 2$; $x_{pn} = 2$; $y_{pn} = -1$; $x_{ps} = 3$; $y_{ps} = 0$; $x_{pv} = 2$; $y_{pv} = 1$) було згенеровано структуровану сітку (рис. 2.4) за двома сценаріями: 1 – рівномірне початкове розбиття, 2 – використання трансфінітної інтерполяції. Слово «сценарій» обрано для вказаних методів через стандартну назву файлів текстів програм – сценарій в пакеті Scilab.



а)



б)

Рис. 2.4. Структурована сітка опуклої області: а) сценарій 1, б) сценарій 2.

Окрім побудованої сітки на екран виводиться інформація про кількість кроків циклу, витрачених для побудови цієї сітки, тобто можна дізнатись про швидкість її побудови. Наприклад, для побудови сітки за сценарієм 1 (рис. 2.5, а) було витрачено 287 кроків циклу, а за сценарієм 2 (рис. 2.5, б) було витрачено 382 кроки циклу за умови виконання збіжності циклу – квадратичні відхилення параметра x і y повинні бути меншими за 0,001: відхилення x – 0.0009213, відхилення y – 0.0003555 (рис. 2.5, а), відхилення x – 0.0009831, відхилення y – 0.0001294 (рис. 2.5, б). Для спостереження за збіжністю та швидкістю побудови сітки дані про відхилення виводяться не тільки для останнього кроку, а й через кожні 100 кроків циклу. Ці дані виводяться в *Командному вікні* програми під час її роботи (рис. 2.5).

Виходячи з даних швидкості збіжності ітераційного процесу, можна зробити висновок, що для вказаної області побудови кращим буде обрання початкової сітки, яку було згенеровано рівномірно.

0.0026494	0.0009252
Номер кроку циклу	Номер кроку циклу
200.	300.
відхилення по x	відхилення по x
0.0031103	0.0024574
відхилення по y	відхилення по y
0.0009024	0.0003119
Номер кроку циклу	Номер кроку циклу
287.	382.
відхилення по x	відхилення по x
0.0009213	0.0009831
відхилення по y	відхилення по y
0.0003555	0.0001294
а)	б)

Рис. 2.5. Реалізація роботи програми: а) сценарій 1, б) сценарій 2.

Далі проведено дослідження для з'ясування, для яких типів геометрії області краще застосовувати сценарій 1, а для яких – сценарій 2. Під час дослідження емпіричним шляхом було розглянуто швидкість побудови сітки для обох сценаріїв методом простих ітерацій та методом Зейделя для різної кількості точок розбиття та різних за опуклістю областей. Очевидною була перевага методу Зейделя, як удосконаленого методу простих ітерацій, тому подальші порівняння проводились тільки цим методом. Наприклад, в табл. 2.1 наведено дані для методів простої ітерації та Зейделя для ввігнутої області (рис. 2.6) із вказаними контрольними точками межі побудови із заданою похибкою, що сума квадратів відхилень по відповідним координатам не перевищує 0,001.

За даними табл. 2.1 можна зробити висновок, що для ввігнутої області перевага надається початковій сітці, що побудована методом трансфінитної інтерполяції. Цей висновок підтверджено на прикладі інших ввігнутих

областей з відповідною візуалізацією отриманої сітки для кращого розуміння впливу геометрії області на швидкість побудови заданої моделі (Додаток А).

Таблиця 2.1

Порівняння збіжності ітераційних процесів для ввігнутої області

Точки будови межі	Кількіс ть точок розбит тя	Фактори	Рівномірне розбиття		Трансфінитна інтерполяція	
			Метод простих ітерацій	Метод Зейделя	Метод простих ітерацій	Метод Зейделя
xln=-3 yln=-2 xls=1 yls=0	31	Кількість кроків циклу	677	368	261	184
		Відхилення по x	0.0009935	0.0009888	0.0008902	0.0009132
		Відхилення по y	0.0001082	0.0001117	0.0004446	0.0004033
xlv=-4 ylv=2 xrp=2 урp=-1 xrp=-1 урp=0 xrpv=2 урpv=1	41	Кількість кроків циклу	1133	622	405	287
		Відхилення по x	0.0009926	0.0009920	0.0008936	0.0009038
		Відхилення по y	0.0001043	0.0001113	0.0004458	0.0004161
	51	Кількість кроків циклу	1680	932	568	403
		Відхилення по x	0.0009940	0.0009898	0.0008943	0.0009036

		Відхилення по y	0.0001021	0.0001102	0.0004433	0.0004261
61		Кількість кроків циклу	2309	1292	746	532
		Відхилення по x	0.0009943	0.0009926	0.0008970	0.0009002
		Відхилення по y	0.0001005	0.0001097	0.0004409	0.0004304
71		Кількість кроків циклу	3012	1700	938	672
		Відхилення по x	0.0009947	0.0009938	0.0008982	0.0008981
		Відхилення по y	0.0000993	0.0001091	0.0004374	0.0004328

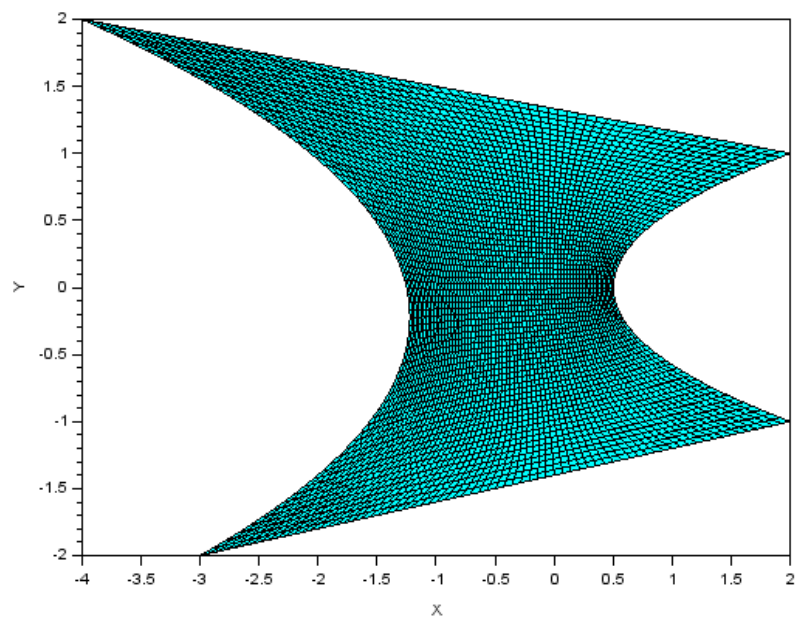


Рис. 2.6. Побудова сітки для ввігнутої області

Проте для опуклої області (рис. 2.7) ситуація кардинально змінюється (табл. 2.2). Швидкість збіжності ітераційного процесу методом Зейделя стає кращою для рівномірного розбиття початкової сітки, що підтверджують аналогічні дослідження з подальшою візуалізацією для інших опуклих областей (Додаток Б).

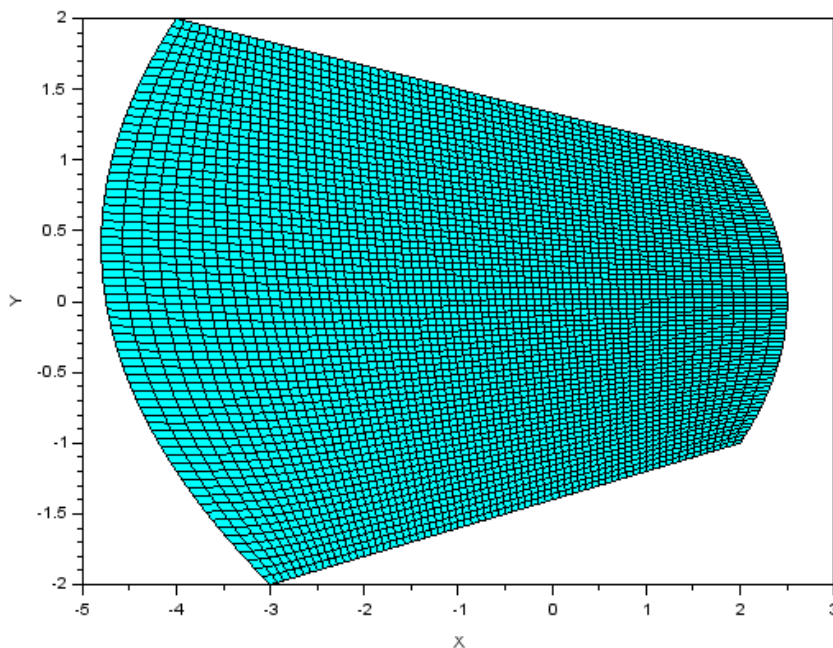


Рис. 2.7. Побудова сітки для опуклої області.

Таблиця 2.2

Порівняння збіжності ітераційних процесів для опуклої області

Точки межі побудови	Кількість точок розбиття	Фактори	Рівномірне розбиття	Трансфінитна інтерполяція
$x_{ln}=-3$	31	Кількість кроків циклу	472	639
$y_{ln}=-2$		Відхилення по x	0.0009534	0.0009879
$x_{ls}=-6$		Відхилення по y	0.0002971	0.0001321
$y_{ls}=0$	41	Кількість кроків циклу	768	1045
$x_{lv}=-4$				
$y_{lv}=2$				

$x_{pn}=2$ $y_{pn}=-1$ $x_{ps}=3$ $y_{ps}=0$ $x_{pv}=2$ $y_{pv}=1$		Відхилення по x	0.0009581	0.0009904
		Відхилення по y	0.0002765	0.0001311
	51	Кількість кроків циклу	1113	1524
		Відхилення по x	0.0009650	0.0009911
		Відхилення по y	0.0002619	0.0001298
		61	Кількість кроків циклу	1503
	Відхилення по x		0.0009676	0.0009911
	Відхилення по y		0.0002496	0.0001286
	71	Кількість кроків циклу	1932	2670
		Відхилення по x	0.0009700	0.0009916
		Відхилення по y	0.0002395	0.0001275

Якщо взяти одну сторону області опуклою, а іншу ввігнутою (рис. 2.8), то збіжність ітераційного процесу залишається кращою для рівномірного розбиття (табл. 2.3), що також підтверджується іншими дослідженнями (Додаток В).

Таблиця 2.3

Порівняння збіжності ітераційних процесів для області з опуклою та ввігнутою сторонами

Точки межі побудови	Кількість точок розбиття	Фактори	Рівномірне розбиття	Трансфінитна інтерполяція
$x_{ln}=-3$ $y_{ln}=-2$ $x_{ls}=-5$ $y_{ls}=0$	31	Кількість кроків циклу	486	732
		Відхилення по x	0.0009607	0.0009951
		Відхилення по y	0.0002581	0.0000896

xlv=-4 ylv=2 xpn=2 урn=-1	41	Кількість кроків циклу	772	1209
		Відхилення по x	0.0009650	0.0009934
		Відхилення по y	0.0002573	0.0000895
xps=1 урs=0 xpv=2 урv=1	51	Кількість кроків циклу	1096	1775
		Відхилення по x	0.0009663	0.0009955
		Відхилення по y	0.0002559	0.0000898
	61	Кількість кроків циклу	1450	2423
		Відхилення по x	0.0009664	0.0009954
		Відхилення по y	0.0002542	0.0000899
	71	Кількість кроків циклу	1827	3145
		Відхилення по x	0.0009670	0.0009951
		Відхилення по y	0.0002525	0.0000899

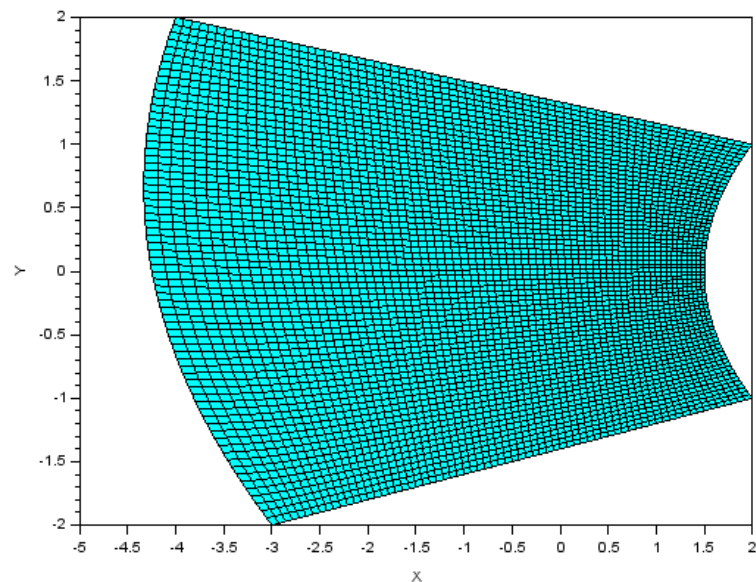


Рис. 2.8. Побудова сітки для області з ввігнутою та опуклою сторонами.

Отже з'ясовано, що для областей криволінійного чотирикутника опуклої або мішаної форми краще обирати для початкової сітки рівномірне розбиття, а для ввігнутої форми – трансфінітну інтерполяцію.

Апробація даного програмного продукту підтверджено авторським свідоцтвом (Додаток Г).

2.6 Застосування контрольних функцій рівняння для згущення сітки в заданій області криволінійного чотирикутника

2.6.1 Контрольні функції для згущення до координатних ліній

Розглянемо приклади контрольних функцій рівняння (2.4) та їх вплив на побудову сітки. Контрольні функції для згущення до координатних ліній можуть бути задані формулами:

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{n=1}^N a_n \frac{(\xi - \xi_n)}{|\xi - \xi_n|} e^{-c_n |\xi - \xi_n|}, \quad (2.34)$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{n=1}^N a_n \frac{(\eta - \eta_n)}{|\eta - \eta_n|} e^{-c_n |\eta - \eta_n|}, \quad (2.35)$$

де N – кількість ліній (координатних ліній $\xi = \xi_n$ та $\eta = \eta_n$), біля яких сітка повинна згущуватися, коефіцієнти a_n, c_n – додатні параметри.

Використання функції (2.34) приводить до суміщення ліній $\xi = const$ до лінії $\xi = \xi_n$, а функції (2.35) приводить до суміщення ліній $\eta = const$ до лінії $\eta = \eta_n$ [37, 136, 163]. Якщо згущення необхідно провести тільки по вертикальним лініям, то $Q(\xi, \eta) = 0$, змінюючи параметри, що залишились можна зміщувати згущення в лівій, наприклад, при $\xi = 0.2$ (рис. 2.9, а), чи правій, наприклад, при $\xi = 0.8$ (рис. 2.9, б), частинах області.

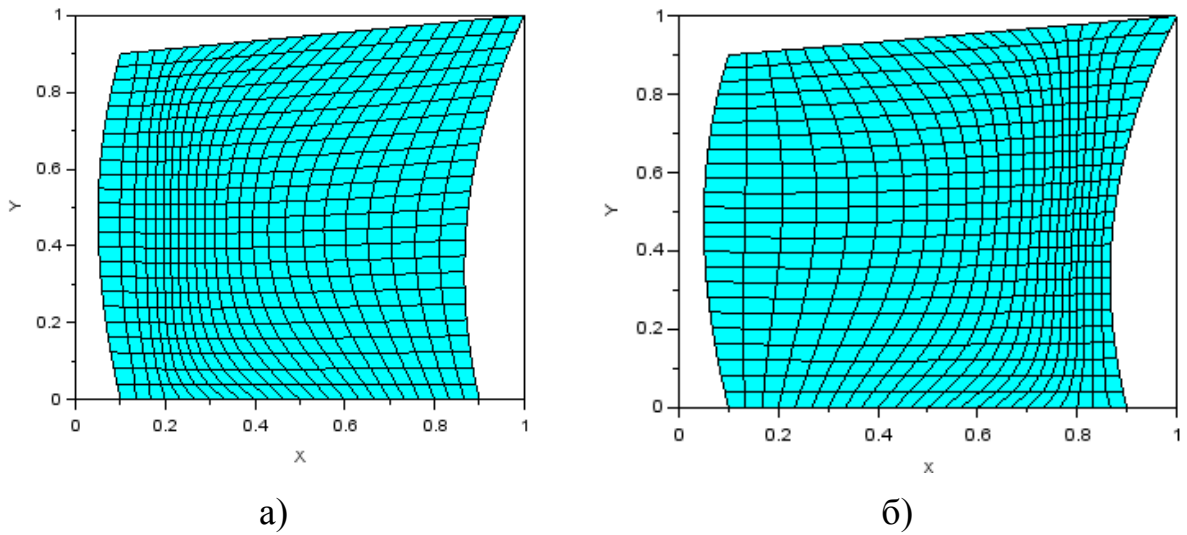


Рис. 2.9. Згущення сітки по вертикальним лініям: а) $\xi = 0.2$, б) $\xi = 0.8$.

Якщо згущення необхідно провести тільки по горизонтальним лініям, то $P(\xi, \eta) = 0$, змінюючи параметри, що залишились можна зміщувати згущення в нижній, наприклад, при $\eta = 0.2$ (рис. 2.10, а), чи верхній, наприклад, при $\eta = 0.7$ (рис. 2.10, б), частинах області.

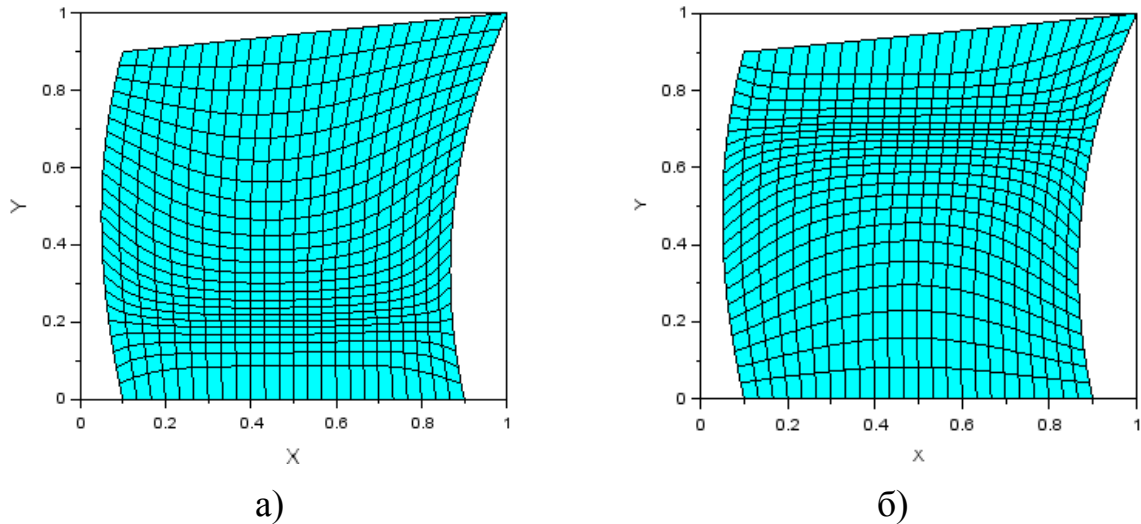


Рис. 2.10. Згущення сітки по горизонтальним лініям: а) $\eta = 0.2$, б) $\eta = 0.7$.

Наведемо фрагмент коду програми побудови згущення для сітки по вертикальним та горизонтальним лініям, що була реалізована в пакеті програм Scilab:

```

for i=2 : n-1
    for j=2 : n-1

```

```

g11 = ((X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) ^ 2 + (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) ^ 2) / 4;
g12 = (X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) * (X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) / 4 + (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) * (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) / 4;
g22 = ((X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) ^ 2 + (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) ^ 2) / 4;
g = (((X(i+1,j) - X(i-1,j))*(Y(i,j+1) - Y(i,j-1)) - (Y(i+1,j) - Y(i-1,j)) * (X(i,j+1) - X(i,j-1)))) / 4)^2;
P1 = -axn * sign((i-1)/(n-1)-x01) * exp(-cxn * abs((i-1)/(n-1)-x01));
Q1 = -ayn * sign((j-1)/(n-1)-y01) * exp(-cyn * abs((j-1)/(n-1)-y01));
X1(i,j) = (g22 * (X1(i-1,j) + X1(i+1,j)) - g12 * (X1(i+1,j+1) - X1(i+1,j-1) - X1(i-1,j+1) + X1(i-1,j-1)) / 2 + g11 * (X1(i,j-1) + X1(i,j+1)) + g * (P1 * (X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) / (2*dx) + Q1 * (X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) / (2 * dy))) / (2 * g11 + 2 * g22);
Y1(i,j) = (g22 * (Y1(i-1,j) + Y1(i+1,j)) - g12 * (Y1(i+1,j+1) - Y1(i+1,j-1) - Y1(i-1,j+1) + Y1(i-1,j-1)) / 2 + g11 * (Y1(i,j-1) + Y1(i,j+1)) + g * (P1 * (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) / (2*dx) + Q1 * (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) / (2 * dy))) / (2 * g11 + 2 * g22);
end
end

```

Символьне позначення в наведеному коді максимально наближене до тих позначень, що наведено в формулах (2.4), (2.34), (2.35), з урахуванням використання методу скінченних різниць (центральні різниці) для наближеної заміни похідних функцій. Спочатку обчислюються значення g_{11} , g_{12} , g_{22} , g , далі $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$. Наостанок обчислюються значення координат $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ фізичної області, що були виведені з використанням формул системи (2.4).

Розглянемо вплив параметрів контрольних функцій на якість сітки. Одним із показників якості сітки є її ортогональність (кути комірок сітки повинні бути близькими до прямих). Зазначимо, що еліптичні методи забезпечують ортогональність ліній сітки [67, 80].

Визначимо значення максимального кута кожного елемента сітки і проведемо візуалізацію за допомогою розфарбовування елементів в градаціях сірого кольору відповідно до зміни значення максимального кута.

Відповідно до різних значень коефіцієнтів a_n , c_n будемо отримувати різні варіанти згущення і якості сітки.

Розглянемо згущення сітки по горизонтальній лінії $y = 0.3$. Тоді контрольна функція (2.34) буде дорівнювати нулю, оскільки немає згущення по вертикалі. Нехай, перший коефіцієнт буде постійним $a_n = 10$, а другий коефіцієнт c_n будемо змінювати: 1) $c_n = 3$ (рис. 2.11, а); 2) $c_n = 5$ (рис. 2.11, б). У першому випадку можна помітити більшу інтенсивність згущення і меншу якість сітки: значення максимального кута відповідно 138.8° та 128.2° , тобто в другому випадку властивість ортогональності є кращою. Отже, більше значення коефіцієнта c_n дає кращий по відношенню до ортогональності результат.

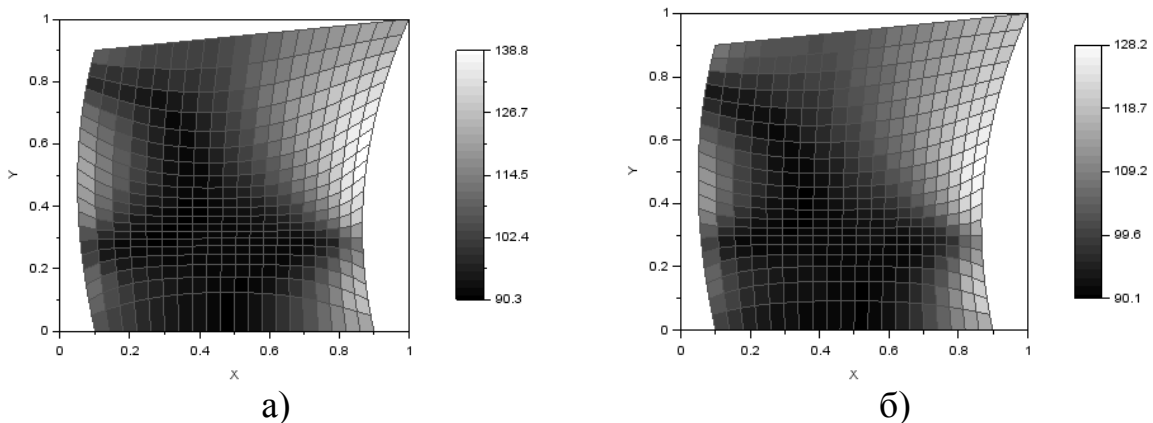


Рис. 2.11. Згущення сітки до горизонтальної лінії $y = 0.3$ при $a_n = 10$:

а) $c_n = 3$; б) $c_n = 5$.

Розглянемо згущення сітки по горизонтальній лінії $y = 0.8$ при постійному значенні другого коефіцієнта, наприклад, $c_n = 5$, а перший коефіцієнт буде приймати значення 1) $a_n = 10$ (рис. 2.12, а); 2) $a_n = 20$ (рис. 2.12, б). У першому випадку можна помітити меншу інтенсивність згущення і кращу якість сітки: значення максимального кута відповідно 128.6° та 144.1° , тобто в першому випадку ортогональність є кращою. Отже, менше

значення коефіцієнта a_n дає кращий по відношенню до ортогональності результат.

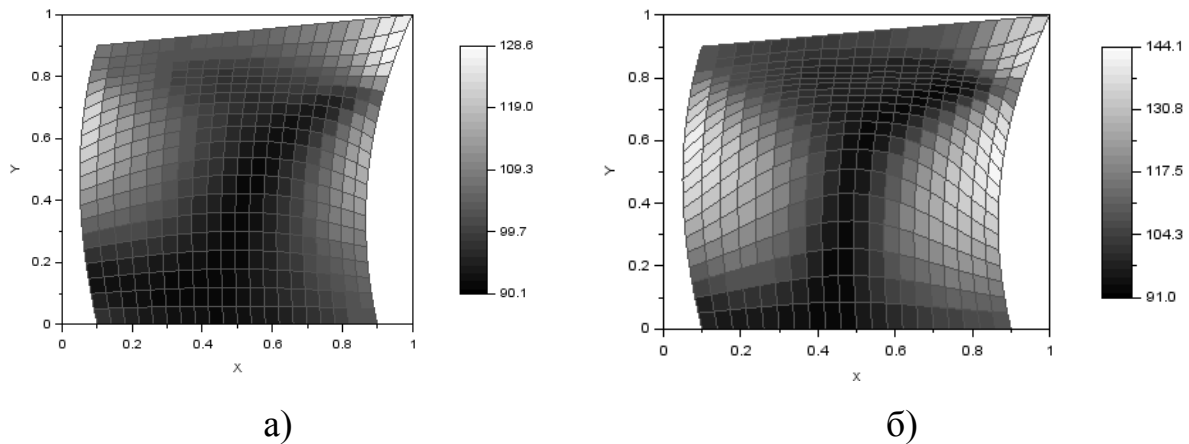


Рис. 2.12. Згущення сітки до горизонтальної лінії $y = 0.8$ при $c_n = 5$:

а) $a_n = 10$; б) $a_n = 20$.

Емпіричним методом прослідкуємо залежність між значеннями змінних (ξ, η) розрахункової та (x, y) фізичної областей на прикладі згущення до горизонтальних ліній при значеннях параметрів $a_n = 5$, $c_n = 3$ для ввігнутої фізичної області (рис. 2.13).

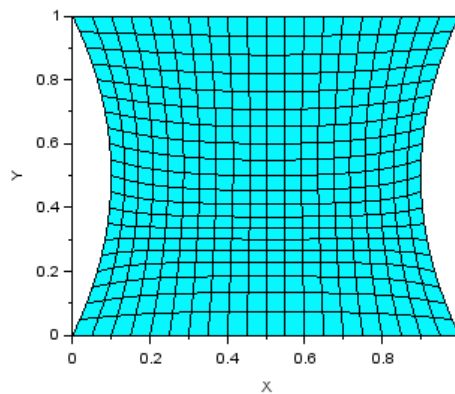


Рис. 2.13. Згущення сітки до горизонтальної лінії $y = 0.3$ для ввігнутої області.

Під час емпіричного дослідження було отримано залежність між значеннями змінної η розрахункової та змінної y фізичної областей на прикладі згущення до горизонтальних ліній (табл. 2.4) для ввігнутої області

шляхом її розтягування вгору від співвідношення вертикальних ліній 1:1 до 1:10 з кроком 0.25 та коефіцієнтом розтягу k .

Таблиця 2.4

Залежність між значеннями змінних розрахункової та фізичної областей

η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y	0.1k	0.2k	0.3k	0.4k	0.5k	0.6k	0.7k	0.8k

За даними табл. 2.4 можна спостерігати умовну (зважаючи на коефіцієнт k) рівність між собою значень розрахункової та фізичної областей і зробити висновок: якщо в формулі (2.35) покласти $\eta_n = 0.2$, то сітка буде згущуватися в фізичній області до лінії $y = 0.2$, або навпаки, якщо необхідно отримати згущення до лінії $y = 0.6$, то в формулу (2.35) необхідно підставити значення $\eta_n = 0.6$.

Також було отримано залежність між значеннями змінної η розрахункової та змінної y фізичної областей на прикладі згущення до горизонтальних ліній (табл. 2.5) для ввігнутої області шляхом її розтягування праворуч від співвідношення горизонтальних ліній 1:1 до 1:10 з кроком 0.25 та коефіцієнтом розтягу k .

За даними табл. 2.5 можна зробити висновок, що при невеликому розтягуванні горизонтальних ліній можна спостерігати рівність значень змінної η розрахункової та змінної y фізичної областей під час згущення до горизонтальних ліній. Але існує певне значення коефіцієнта розтягу при якому відбувається зміщення горизонтальної лінії, що веде до невеликої зміни значення η розрахункової області, щоб отримати необхідне значення центру згущення фізичної області.

Наприклад, якщо значення змінних (ξ, η) розрахункової квадратної області $[0; 1] \times [0; 1]$ відповідають значенням змінних (x, y) фізичної області з криволінійними сторонами, що обмежена прямокутником $[0; 7] \times [0; 1]$, то звідси маємо коефіцієнт розтягу $k = 7$ (співвідношення 1:7). Якщо необхідно

отримати згущення до лінії $y = 0.8$, то за даними табл. 2.5 визначаємо, що в формулу (2.35) необхідно підставити значення $\eta_n = 0.79$.

Таблиця 2.5

Залежність між значеннями змінних розрахункової та фізичної областей

Значення y	Значення η	Проміжок співвідношень між горизонтальними лініями	Кількість отриманих результатів	Відносна частота отриманих результатів
0.1	0.1	1:1 – 1:1.75	4	0.11
	0.11	1:2 – 1:10	33	0.89
0.2	0.2	1:1 – 1:5.75	17	0.46
	0.21	1:6 – 1:10	20	0.54
0.3	0.3	1:1 – 1:10	37	1
0.4	0.4	1:1 – 1:10	37	1
0.5	0.5	1:1 – 1:10	37	1
0.6	0.6	1:1 – 1:10	37	1
0.7	0.7	1:1 – 1:10	37	1
0.8	0.8	1:1 – 1:3.75	12	0.32
	0.79	1:4 – 1:10	25	0.68
0.9	0.9	1:1 – 1:1.75	4	0.11
	0.89	1:2 – 1:10	33	0.89

Емпіричним шляхом було встановлено, що на залежність між змінними у табл. 2.4 впливає геометрія області побудови. Якщо значення змінних (ξ, η) розрахункової квадратної області $[0; 1] \times [0; 1]$ відповідають значенням змінних (x, y) фізичної прямокутної області $[a; b] \times [c; d]$, то для визначення ліній згущення $x = x_0$ та $y = y_0$ в фізичній області через лінії $\xi = \xi_0$ та $\eta = \eta_0$

розрахункової в формулах (2.34)-(2.35) можна скористатися наступними формулами:

$$x_0 = (b - a)\xi_0 + a, \quad (2.36)$$

$$y_0 = (d - c)\eta_0 + c. \quad (2.37)$$

Якщо геометрія фізичної області не є прямокутною, а має криволінійні межі, то формули (2.36) та (2.37) можуть дати апроксимуючі значення для прогнозованих ліній згущення за умови, що задану криволінійну область можна покрити прямокутною областю $[a; b] \times [c; d]$.

Варто зазначити, що значний нахил геометричної форми області впливає на відповідний нахил лінії згущення. Це стосується також опуклості та ввігнутості меж області. Наприклад, на рис. 2.13 фізична область покривається квадратом $[0; 1] \times [0; 1]$, тому формули (2.36)-(2.37) дають апроксимуюче значення залежності ліній згущення $x_0 = \xi_0$, проте можна побачити опуклість ліворуч фізичної області, тому в табл. 2.4 більшому значенню розрахункової області відповідає менше (лівіше) значення фізичної області.

Уточнення формул (2.36)-(2.37) можна провести за рахунок перерізів області (відрізкам) по необхідним напрямкам згущення $[a_i; b_i]$ або $[c_i; d_i]$, тоді отримаємо

$$x_0 = (b_i - a_i)\xi_0 + a_i, \quad (2.38)$$

$$y_0 = (d_i - c_i)\eta_0 + c_i. \quad (2.39)$$

Значення $(a_i; b_i)$ або $(c_i; d_i)$ формул (2.38)-(2.39) легко визначаються вузлами сітки на межі фізичної області та координатами точки заданого згущення. Враховуючи можливі нахили лінії згущення сітки, краще спочатку визначитись з контрольними точками, через які буде проходити лінія згущення.

2.6.2 Контрольні функції для згущення до кола і точки

Контрольні функції для згущення до точок з координатами (ξ_i, η_i) можуть бути задані формулами:

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^I b_i \frac{(\xi - \xi_i)}{|\xi - \xi_i|} e^{-d_i \sqrt{[(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2]}}, \quad (2.40)$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^I b_i \frac{(\eta - \eta_i)}{|\eta - \eta_i|} e^{-d_i \sqrt{[(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2]}}, \quad (2.41)$$

де I – кількість точок (з координатами $\xi = \xi_i$ та $\eta = \eta_i$), біля яких сітка повинна згущуватися, коефіцієнти b_i, d_i – додатні параметри.

Генерація сітки із згущенням до точки за допомогою рівняння (2.4) з використанням контролюючих функцій (2.40) та (2.41) носить доволі стабільний характер відносно кутів отриманих комірок сітки незалежно від параметрів контролюючих функцій, що можна продемонструвати отриманими результатами дослідження в градаціях сірого кольору з відповідною метрикою (рис. 2.14).

Значення максимальних кутів комірок сітки лежать в межах $[90^\circ; 121^\circ]$. Візуально можна впевнитись, що більшим значенням кутів відповідають світліші ділянки області, що закономірно розташовані в місцях особливої форми – кутових краях області.

Для контролю згущення, наприклад, у формі кіл можна скористатися наступними формулами контрольних функцій:

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{n=1}^N a_n \text{sign}(\xi - \xi_0) e^{-c_n (|\xi - \xi_0| - \sqrt{R^2 - (\eta - \eta_0)^2})}, \quad (2.42)$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{n=1}^N b_n \text{sign}(\eta - \eta_0) e^{-d_n (|\eta - \eta_0| - \sqrt{R^2 - (\xi - \xi_0)^2})}, \quad (2.43)$$

де N – кількість кіл (координати відповідних центрів та (ξ_0, η_0)), до яких сітка повинна згущуватися, коефіцієнти a_n, c_n, b_n, d_n – додатні параметри.

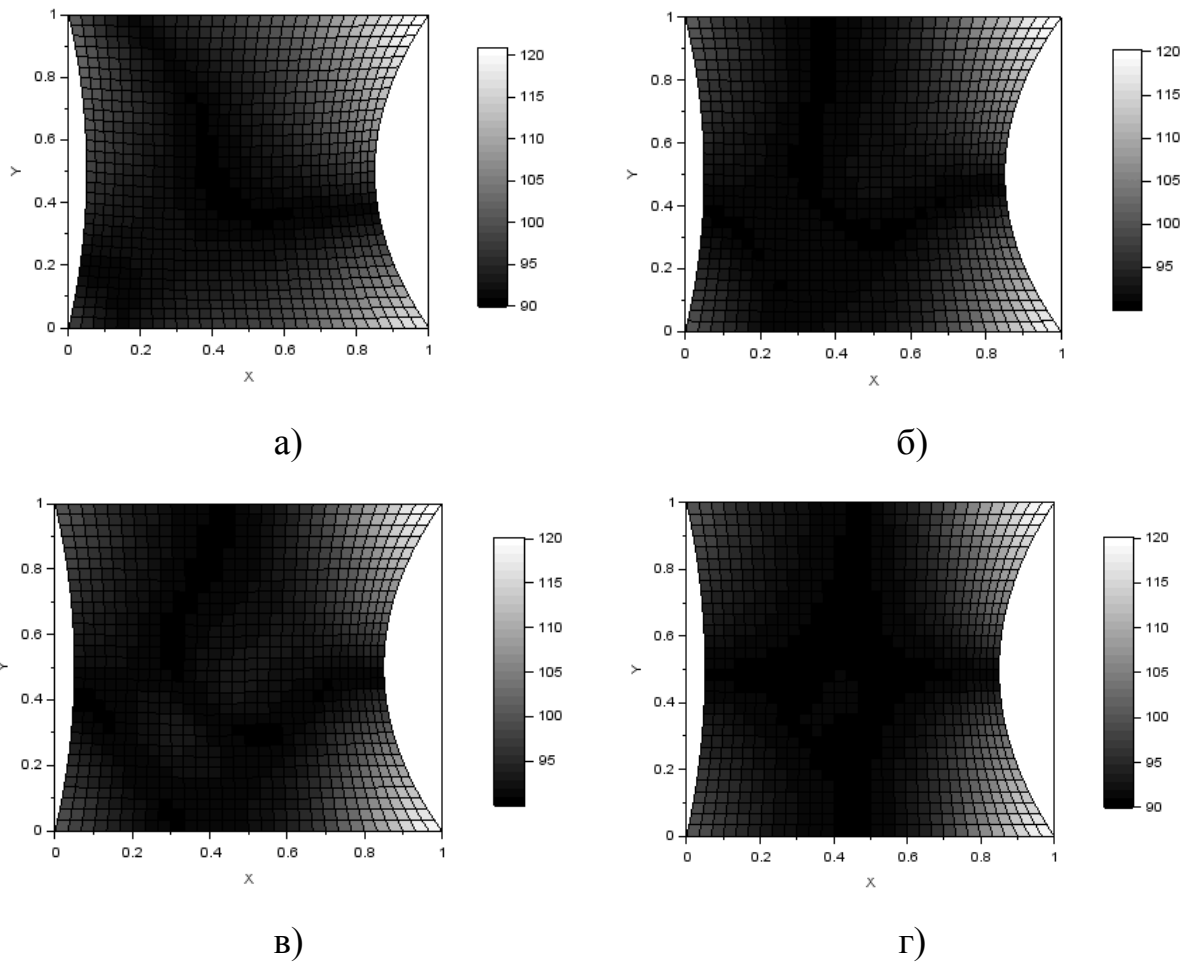


Рис. 2.14. Згущення сітки до точки $(0,4;0,4)$ із заданими параметрами контролюючих функцій: а) $b_i = 1, d_i = 1$; б) $b_i = 1, d_i = 5$; в) $b_i = 2, d_i = 10$; г) $b_i = 2, d_i = 50$.

Якщо відійти від умови a_n, b_n – додатні параметри, тобто взяти їх значення від’ємними, то отримаємо розрідження всередині кола (рис. 2.15).

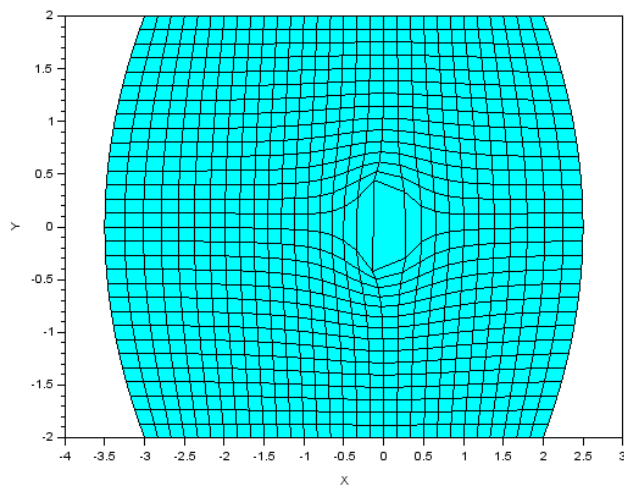


Рис. 2.15. Розрідження сітки в колі з центром в точці $(0, 0)$.

Змінюючи координати центра кола (ξ_0, η_0) , можна побачити, як наближеність кола до межі області впливає на розташування ліній сітки. Для візуалізації цього прикладу розглянемо згущення для одного кола з центром в точці $(0, 0)$ (рис. 2.16, а) або $(-1, 0)$ (рис. 2.16, б).

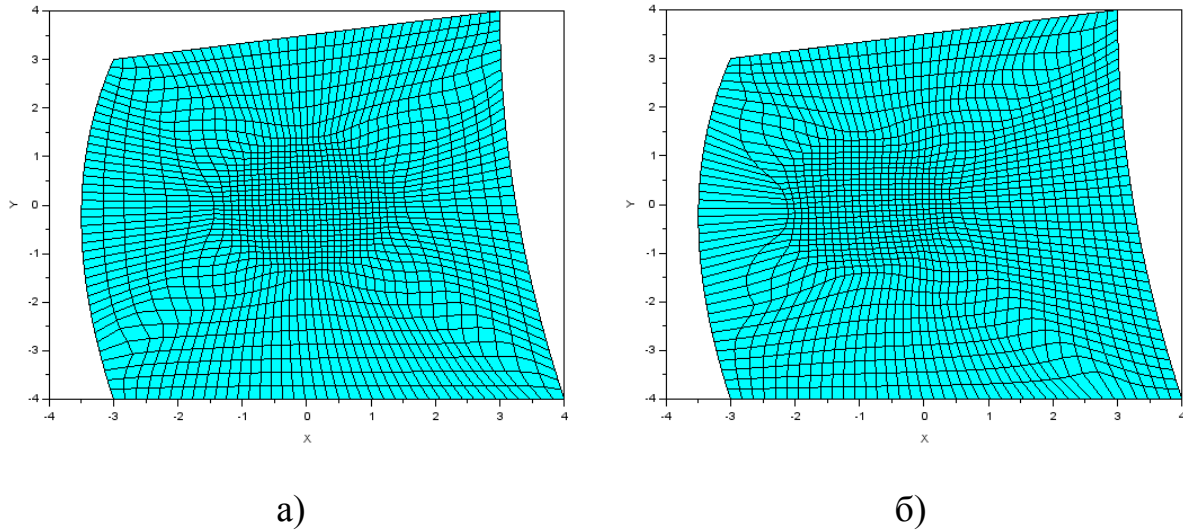


Рис. 2.16. Згущення сітки до кола з центром в точці: а) $(0, 0)$; б) $(-1, 0)$.

Очевидно, якщо збільшити радіус кола, тобто зробити його достатньо великим у порівнянні із заданою областю побудови, то отримаємо розрідженість сітки біля границь області, проте всередині кола зберігається умова ортогональності ліній сітки (рис. 2.17).

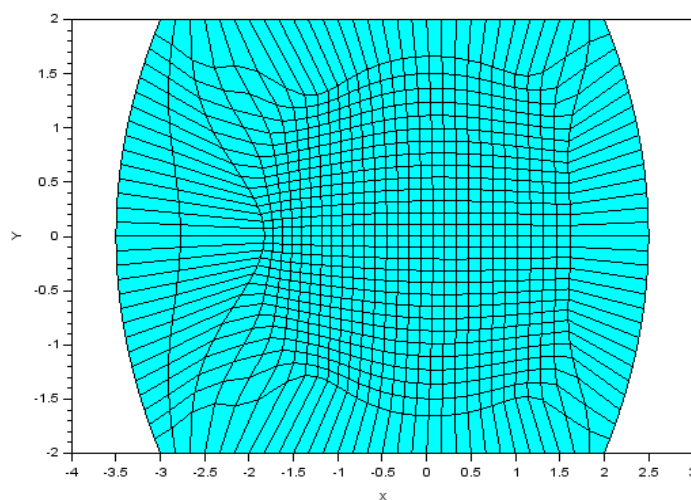
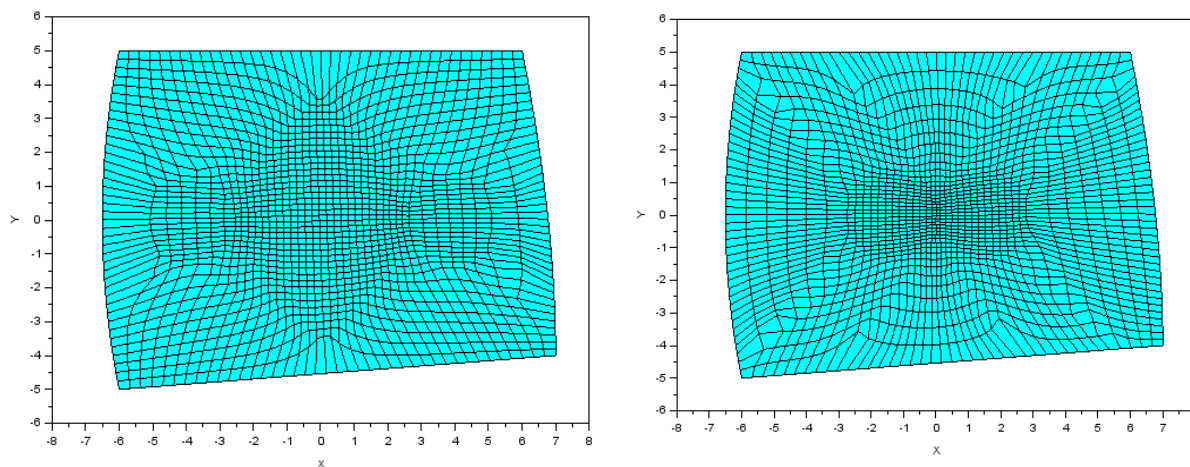


Рис. 2.17. Згущення сітки до кола з радіусом $R = 1,5$.

Проведемо дослідження генерації сітки для двох кіл, центри яких розташовані на одній горизонтальній лінії, а радіуси співпадають (рис. 2.18).



а)

б)

Рис. 2.18. Згущення сітки одночасно до двох кіл з радіусами $R = 1,5$ та відстанями між відповідними центрами кіл: а) 8; б) 3.

Проте інтерес представляє вплив параметрів a_n, b_n, c_n, d_n контрольних функцій на якість сітки. Одним із показників якості сітки є її ортогональність (кути комірок сітки повинні бути близькими до прямих). Відомо, що еліптичні методи забезпечують ортогональність ліній сітки [67, 80].

Дослідимо значення максимального кута кожного елемента на прикладі сітки з двома колами (рис. 2.18, б). Розглянемо випадок, коли значення параметрів для одного кола будуть відповідно дорівнювати параметрам іншого. Якщо перший параметр залишити незмінним $a_n = b_n = 3$, а для другого параметру розглянути 2 випадки: $c_n = d_n = 40$ і $c_n = d_n = 20$, то побачимо, що максимальне значення найбільшого кута елемента в першому випадку дорівнює $147,7^\circ$ (рис. 2.19, а) дає менший результат порівняно з другим випадком $157,6^\circ$ (рис. 2.19, б). Отже, якість першої сітки (її ортогональність) є кращою за якість другої сітки. Це означає, що більше значення другого параметра дає кращу якість сітки.

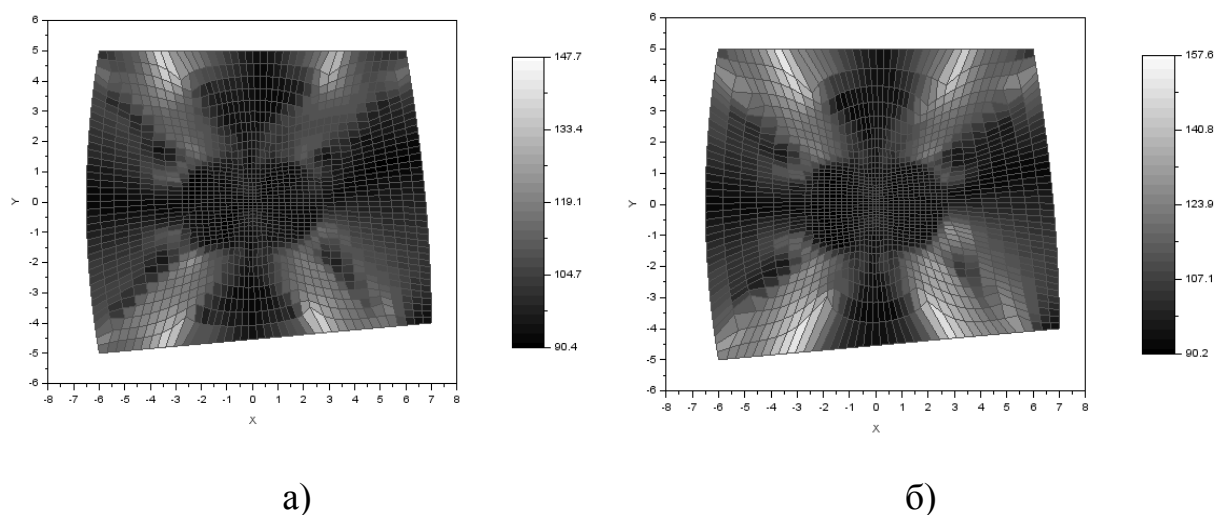


Рис. 2.19. Згущення сітки одночасно до двох кіл з параметрами контрольних функцій $a_n = b_n = 3$: а) $c_n = d_n = 40$; б) $c_n = d_n = 20$.

2.6.3 Особливості застосування контрольних функцій рівняння для згущення сітки

Під час дослідження згущення сітки за допомогою контрольних функцій було помічено, що всі контрольні функції були записані у вигляді композиції експоненти та іншої функції, що відповідала за відповідну візуалізацію. Так, наприклад, формули (2.34)-(2.35) містять у степені експоненти вирази $|\xi - \xi_n|$ та $|\eta - \eta_n|$, де модулі забезпечують постійний знак показника експоненти, а всередині модулів йде різниця змінної та постійної величини, яка буде показувати відхилення змінної величини від заданої. Якщо ці вирази прирівняти до нуля, то отримаємо формули для побудови ліній $\xi = \xi_n$ та $\eta = \eta_n$. За тим самим методом формули (2.40)-(2.41) використовує залежності $\sqrt{[(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2]}$, що застосовуються для побудови точки, якщо цей вираз прирівняти до нуля. Формули (2.42)-(2.43) містять підказку, що вказує на рівняння кола $|\xi - \xi_0| - \sqrt{R^2 - (\eta - \eta_0)^2}$ або $|\eta - \eta_0| - \sqrt{R^2 - (\xi - \xi_0)^2}$, якщо ці вирази прирівняти до нуля та виконати певні перетворення.

Отже можна зробити припущення: якщо необхідно побудувати згущення до лінії, яку можна задати рівнянням $f(\xi, \eta) = 0$, то контрольну функцію можна задати у вигляді

$$P(\xi, \eta) = -\sum_{n=1}^N a_n \text{sign}(\xi - \xi_0) e^{-c_n |f(\xi, \eta)|}, \quad (2.44)$$

$$Q(\xi, \eta) = -\sum_{n=1}^N b_n \text{sign}(\eta - \eta_0) e^{-d_n |f(\xi, \eta)|}, \quad (2.45)$$

причому значення ξ_0 та η_0 будуть відрізнятися від нуля, якщо для стандартного графіку $f(\xi, \eta) = 0$ існують його перетворення шляхом переносу по напрямкам координатних ліній.

Розглянемо згущення до діагональної лінії, що проходить через початок координат і II та IV координатні чверті та задається рівнянням $\xi + \eta = 0$, тобто за нашим припущенням:

$$f(\xi, \eta) = \xi + \eta \quad (2.46)$$

Рівняння (2.46) є стандартним за формулюванням – лінія проходить через початок координат, тоді в формулах (2.44), (2.45) значення ξ_0 та η_0 будуть дорівнювати нулю (рис. 2.20, а). Якщо необхідно провести згущення, наприклад, лівіше на 1, то в формулі (2.44) необхідно покласти $\xi_0 = -1$ (рис. 2.20, б).

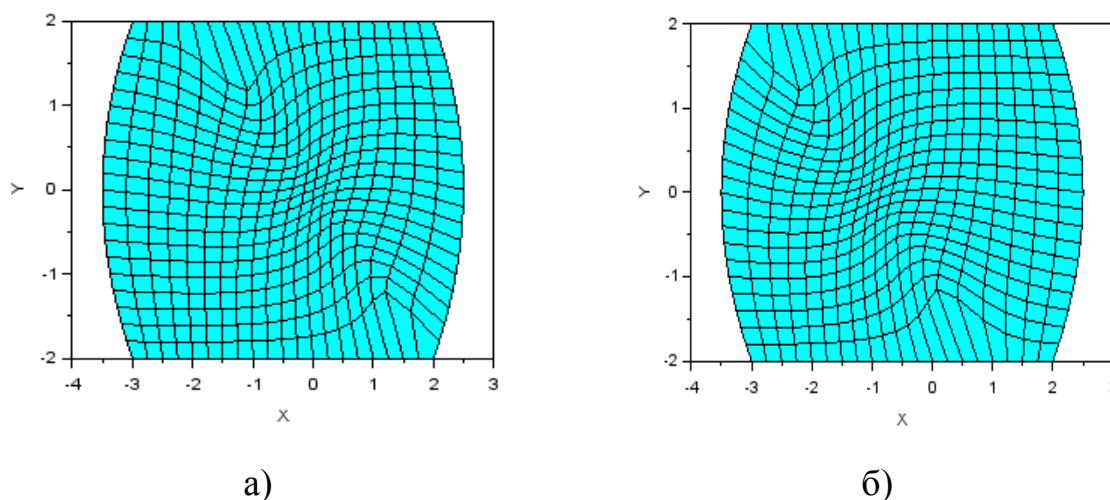


Рис. 2.20. Згущення сітки до діагональної лінії: а) без суміщення; б) суміщення ліворуч на 1.

Треба зауважити, що при побудові двох діагональних взаємно перпендикулярних прямих можна скористатися іншим рівнянням

$$(\xi + \eta) \cdot (\xi - \eta) = 0$$

або його варіаціями $\xi^2 = \eta^2$ чи $|\xi| = |\eta|$. Тобто для побудови певних форм згущень сітки можна використовувати різні за формою і записом контрольні функції.

Висновки до розділу 2

В розділі було розроблено математичний апарат для побудови структурованих сіток диференціальним методом на прикладі рівняння Пуассона із заданими параметрами згущення контрольних функцій та гарантією якості моделі. Досліджено вплив геометрії області (опуклості та угнутості ліній сторін криволінійного чотирикутника) та вибір методу побудови початкової сітки на швидкість генерації заданої структурованої моделі даної області еліптичним методом. Емпіричним методом досліджено залежність між значеннями змінних розрахункової та фізичної областей та вплив геометрії області на цю залежність.

Було розглянуто методи побудови структурованих дискретних моделей, їх недоліки і переваги. Особлива увага була приділена дослідженню впливу контрольних функцій на керування сіткою.

Було показано на прикладах алгебраїчних методів можливості згущення сітки праворуч чи ліворуч.

Для диференціального методу (еліптичного) розглядалися контрольні функції, за допомогою яких можна виконати згущення до горизонтальних, вертикальних, діагональних ліній, досліджено вплив параметрів цих контрольних функцій на згущення. Було досліджено вплив параметрів контрольних функцій, за допомогою яких можна побудувати згущення до одного, двох чи більше кіл, еліптичного методу на якість побудованої сітки, а

саме її ортогональність. Дослідження супроводжувалось візуалізацією отриманих результатів.

Основні наукові і практичні результати даного розділу опубліковано в працях [25, 68-70, 72-76].

РОЗДІЛ 3 ГЕНЕРАЦІЯ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ПОВЕРХНІ

3.1 Постановка задачі генерації сітки поверхні

Важливу роль в конструюванні та виробництві відіграють поверхні та методи їх описування. Наприклад, поверхні застосовуються під час розробки та виробництва корпусів та їх частин автомобілів, кораблів, літаків, ракет та іншого. В цьому випадку основу конструювання складає форма та геометрія поверхні. Аеродинамічні задачі є одними із найскладніших комплексних задач, оскільки для моделювання літака, гвинтокрила чи будь-якого літального апарату необхідно враховувати всі частини, з яких він складається, а також їх взаємний вплив на поле течії навколо інших структурних компонент. Оскільки вимоги до використання літальних апаратів стають жорсткішими через підвищення рівня безпеки пасажирів, економічної ефективності, що впливає на вибір форми і матеріалів, з якого зроблено компоненти, то виникає необхідність більш детального дослідження особливостей форм елементів апарату та їх взаємного розташування.

Опис поверхні відіграє важливу роль в аналізі даних, що отримані у медицині, фізиці та інших природничих науках. В автоматизованому проектуванні розробляють тривимірну математичну модель поверхні, що дозволяє провести аналіз характеристик поверхні, наприклад аналіз кривини, або фізичних кількісних характеристик, що залежать від поверхні, наприклад обчислити об'єм утвореного тіла чи його частини, площу поверхні, момент інерції та ін.

Поверхні дуже часто зображують у вигляді сітки кривих, що лежать в ортогональних січних площинах, з тривимірними контурами деталей. Найпростішим прикладом утворення тривимірної поверхні є обертання двовимірного об'єкта навколо осі, в результаті чого утворюється поверхня обертання. Зазвичай такі поверхні визначаються за допомогою параметрів, що

характеризують відстань та кут, тобто циліндричною системою координат. Але взаємозв'язок між циліндричною та декартовою системами координат є загально відомим, тому це не створює проблеми для подальшого дослідження.

Наприклад, щоб задати значення координат поверхні циліндра, можна скористатися формулами:

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\varphi, \\ y = R \cdot \sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad (3.1)$$

де R – радіус основи циліндра, φ – кут повороту обертання ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), а параметр z характеризує висоту циліндра і змінюється в певних межах, зазвичай $z \in [0; H]$, де H – висота циліндричної поверхні.

Розглянемо вплив параметрів контрольних функцій рівняння Пуассона на сітку, що є моделлю поверхні обертання. Оскільки циліндричні та конічні форми широко розповсюджені в інженерних конструкціях, то дослідження згущення сітки в місцях концентрації напружень таких поверхонь є актуальною задачею.

3.2 Згущення сітки циліндричної поверхні

З математичної точки зору розгортка циліндра представляє собою прямокутник, тому згущення сітки на поверхні циліндра виконується спочатку на розгортці, а далі утворюється просторова фігура з використанням залежності (3.1). Наведемо лістинг (рис. 3.1) одного із способів реалізації заданого перетворення (3.1) в пакеті програм Scilab.

Вказаний лістинг (рис. 3.1) є універсальним для згортки плоскої фігури до поверхні обертання і може бути застосований не тільки для циліндричної поверхні, а й для конічної та інших типів поверхонь обертання (рис. 3.2).

```

for j=1:n
  for i=1:n
    l=X1(n,j)-X1(1,j);
    r=l/(2*pi);
    fi=(X1(i,j)-X1(1,j))*2*pi/l;
    X(i,j) = r*cos(fi);
    Y(i,j) = r*sin(fi);
  end
end
end

```

Рис. 3.1. Побудова поверхні обертання.

Зауважимо, що для циліндричної поверхні заданий алгоритм спрощується, оскільки довжина кола та радіус основи циліндра є постійною величиною, тому задані величини обчислюються до початку циклу, а отже кількість обчислень всередині циклу зменшується.

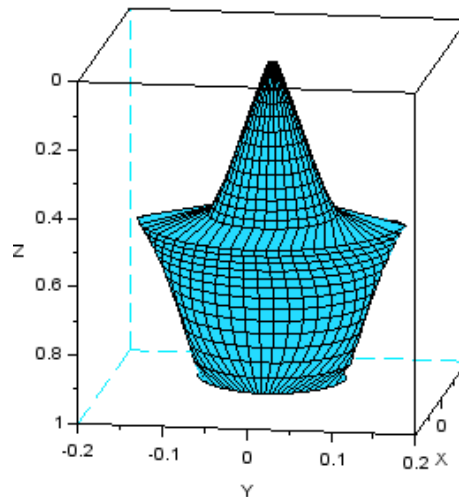
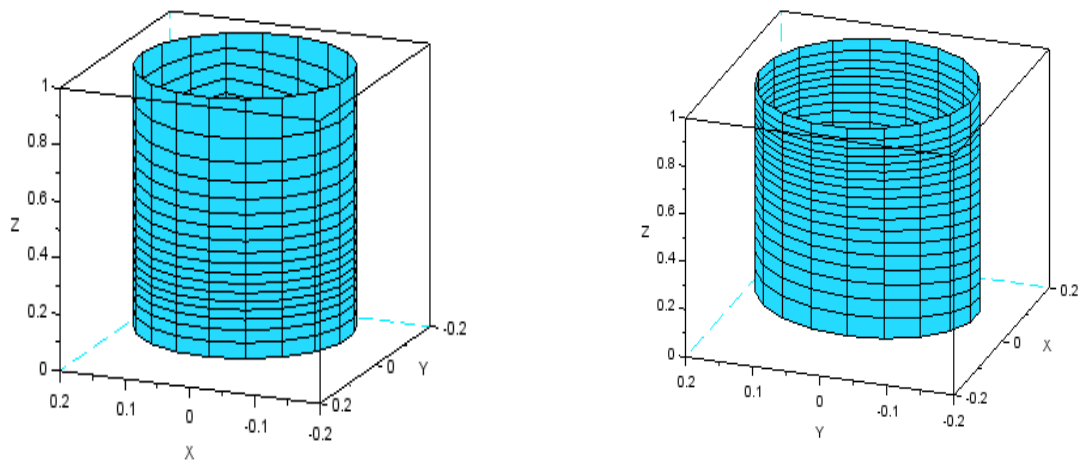


Рис. 3.2. Генерація сітки поверхні обертання.

Виконуємо генерацію сітки в пакеті програм Scilab за допомогою формул (2.4), а згущення по вертикальним лініям за допомогою формули (2.35). В результаті розрахунків будемо згущення на поверхні циліндра (рис. 3.3) з наступними умовами для формули (2.35):

$$N = 1, \quad a_n = 5, \quad c_n = 1, \quad \eta_n = 0.3. \quad (3.2)$$

$$N = 1, \quad a_n = 5, \quad c_n = 1, \quad \eta_n = 0.8. \quad (3.3)$$



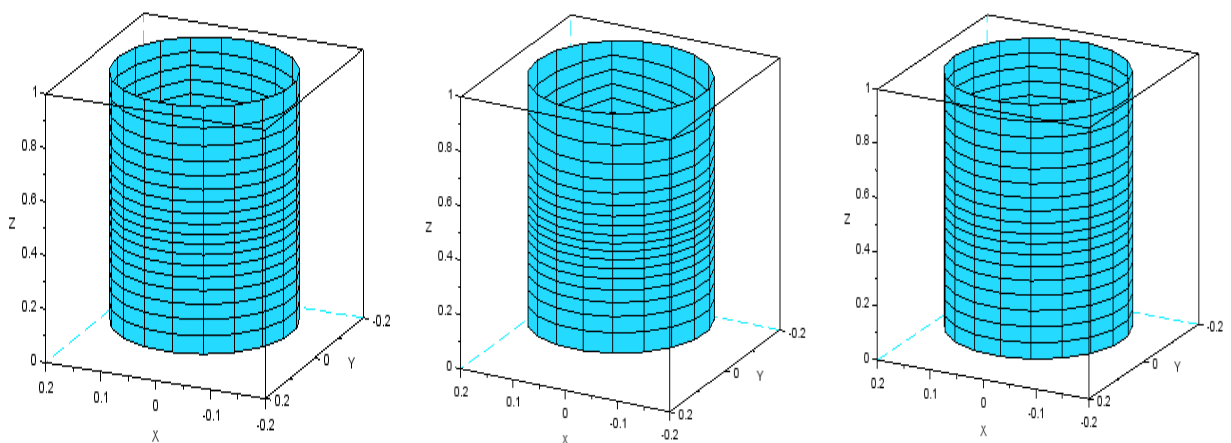
а) б)

Рис. 3.3. Згущення сітки поверхні циліндра з параметрами контрольних функцій: а) умова (3.2), б) умова (3.3).

Для дослідження впливу параметрів контрольних функцій на якість сітки порівняємо результати генерації для різних значень параметрів a_n , c_n при $\eta_n = 0.5$, останнє значення забезпечить кращу наочність. Отже, для рівняння (2.35) беремо наступні загальні умови:

$$n = 20, N = 1, \eta_n = 0.5. \quad (3.4)$$

Тоді можна спостерігати за змінами сітки через зміну параметрів для циліндричної поверхні (рис. 3.4).



а) б) в)

Рис. 3.4. Згущення сітки поверхні циліндра з параметрами контрольних функцій: а) $a_n = 3$, $c_n = 1$; б) $a_n = 5$, $c_n = 1$; в) $a_n = 5$, $c_n = 5$.

За результатами досліджень (рис. 3.4) можна зробити висновок, що збільшення другого параметра формул (2.35) зменшує інтенсивність згущення сітки.

3.3 Згущення сітки конічної поверхні

Для конічної поверхні виконуємо аналогічну для циліндра генерацію структурованої сітки за допомогою рівнянь (2.4). В результаті розрахунків будемо згущення на поверхні конусів (рис. 3.5) з наступними умовами для формули (2.35):

$$n = 20, N = 1, a_n = 5, c_n = 1, \eta_n = 0.2. \quad (3.5)$$

$$n = 20, N = 1, a_n = 5, c_n = 1, \eta_n = 0.7. \quad (3.6)$$

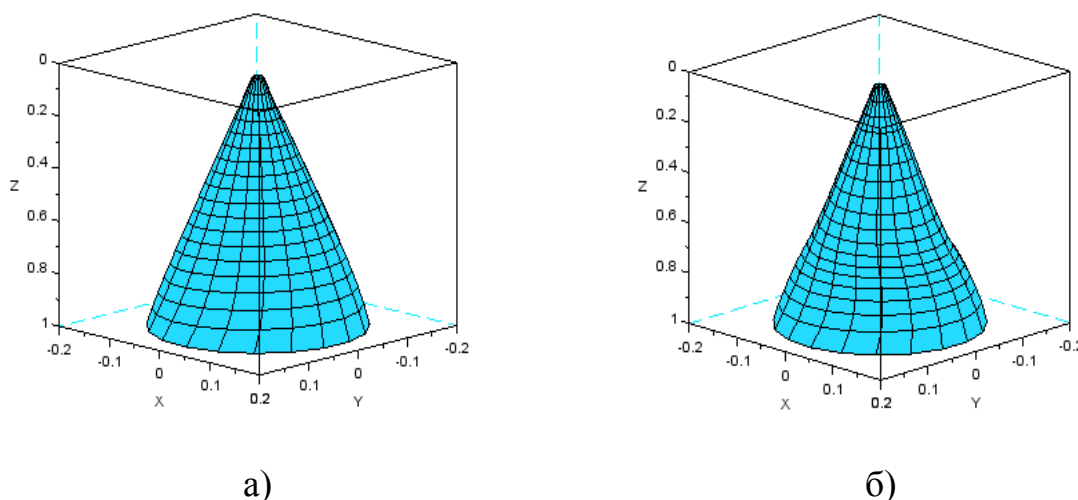


Рис. 3.5. Згущення сітки поверхні конуса з параметрами контрольних функцій: а) умова (3.5), б) умова (3.6).

Для дослідження впливу параметрів контрольних функцій на якість сітки порівняємо результати генерації для різних значень параметрів a_n , c_n при $\eta_n = 0.5$. Отже, для рівняння (2.35) беремо наступні загальні умови (3.4). Також для наочності згущення сітки розташуємо конічну поверхню вершиною донизу (рис. 3.6).

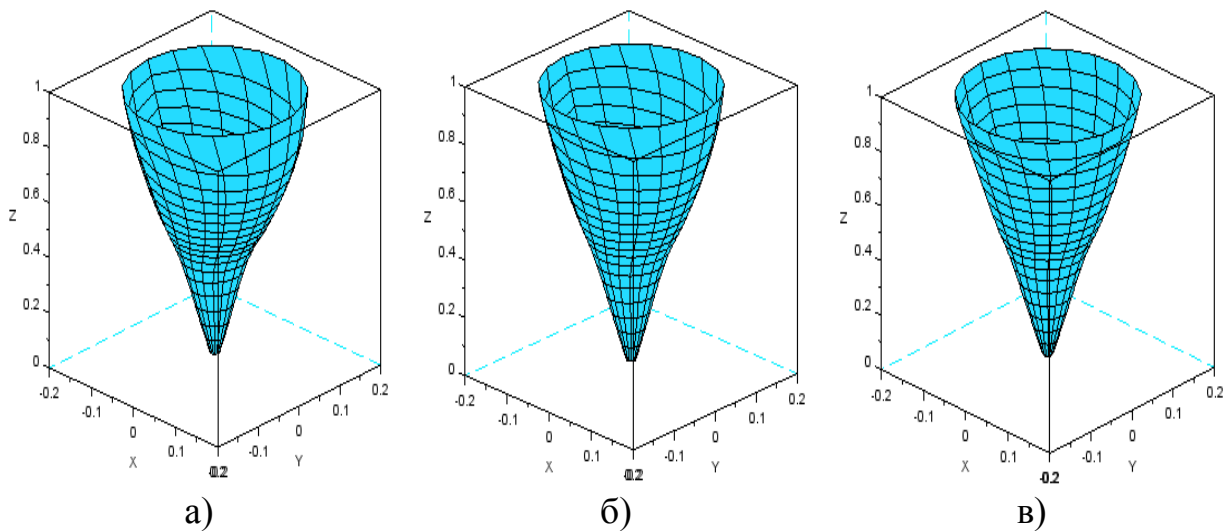


Рис. 3.6. Згущення сітки поверхні конуса з параметрами контрольних функцій: а) $a_n = 8$, $c_n = 1$; б) $a_n = 6$, $c_n = 1$; в) $a_n = 6$, $c_n = 3$.

За результатами досліджень (рис. 3.6) аналогічно до попередніх розрахунків (рис. 3.4) можна зробити висновок, що збільшення другого параметра (2.35) зменшує інтенсивність згущення сітки.

3.4 Згущення сітки на межі з'єднання двох поверхонь

На практиці найчастіше згущення сітки розглядається в місцях концентрації напружень, що може бути місцем з'єднання конструкцій різних форм. Під час математичного моделювання заданого процесу виникає проблема суміщення вузлів сітки в місцях з'єднання конструкції, згущення сітки додає ускладнення до процесу суміщення вузлів. В авіабудуванні та ракетобудуванні найчастіше використовують поверхні з кращими властивостями обтікання, що не мають явно виражених кутів, наприклад, для зменшення спротиву повітря. Прикладом таких тіл є тіла обертання.

Виконуємо генерацію сітки, що моделює комбінацію циліндричної та конічної поверхонь, враховуючи, що така комбінація також може бути представлена спочатку у вигляді розгортки – комбінації прямокутника та трапеції. Виконуємо генерацію сітки вказаного геометричного об'єкта для розгортки за допомогою формул (2.4), а згущення по вертикальним лініям за

допомогою формули (2.35). Для згортки до комбінації циліндричної та конічної поверхонь використовуємо раніше розглянутий лістинг (рис. 3.1).

Досліджуємо вплив параметрів контрольних функцій (2.35) на згущення сітки на межі з'єднання циліндричної та конічної поверхонь (рис. 3.7). Було встановлено, що збільшення першого параметра a_n підвищує інтенсивність згущення сітки, внаслідок чого погіршується властивість ортогональності сітки, а збільшення другого параметра c_n – зменшує інтенсивність згущення сітки, що покращує ортогональність ліній сітки.

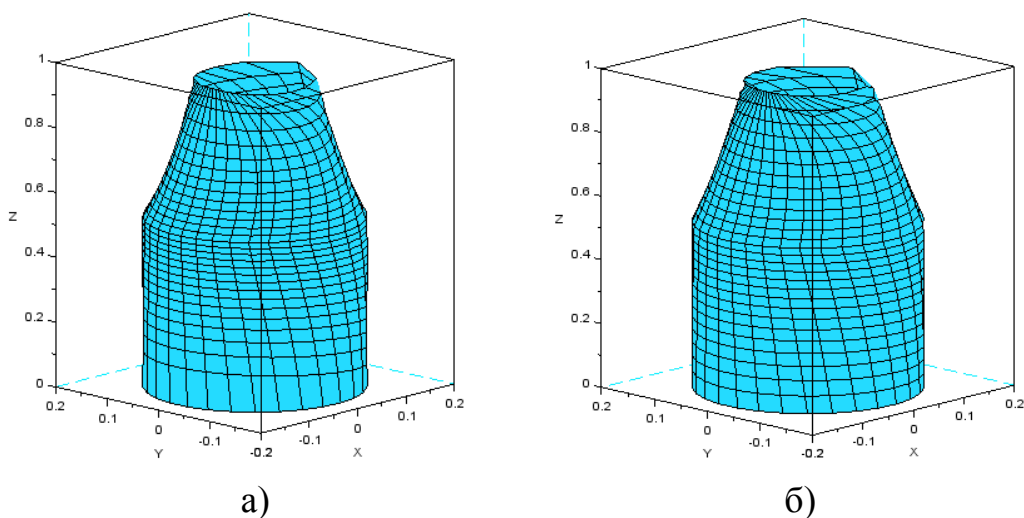


Рис. 3.7. Згущення сітки на межі з'єднання циліндричної та конічної поверхонь: а) $a_n = 6$, $c_n = 1$; б) $a_n = 3$, $c_n = 1$.

Згущення сітки, що моделює комбінацію циліндричної та сферичної поверхонь, досліджується також за допомогою рівнянь (2.4) та (2.35). Проте в цій комбінації існує проблема суміщення вузлів сітки під час згущення ліній (рис. 3.8). Але залежність інтенсивності згущення від параметрів контрольних функцій залишається такою ж, як і для комбінації циліндричної та конічної поверхонь.

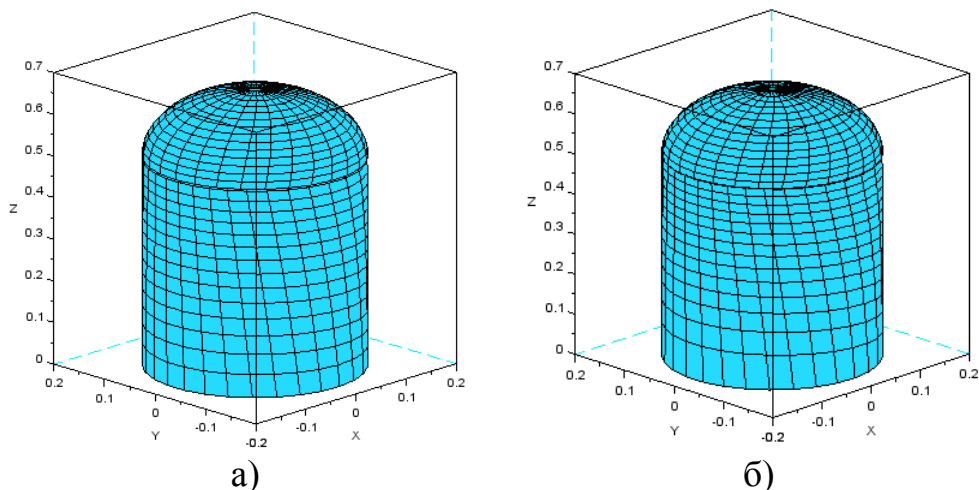


Рис. 3.8. Згущення сітки на межі з'єднання циліндричної та сферичної поверхонь: а) $a_n = 3$, $c_n = 1$; б) $a_n = 5$, $c_n = 1$.

Аналогічна ситуація щодо інтенсивності згущення залишається і для комбінації двох конічних поверхонь (рис. 3.9).

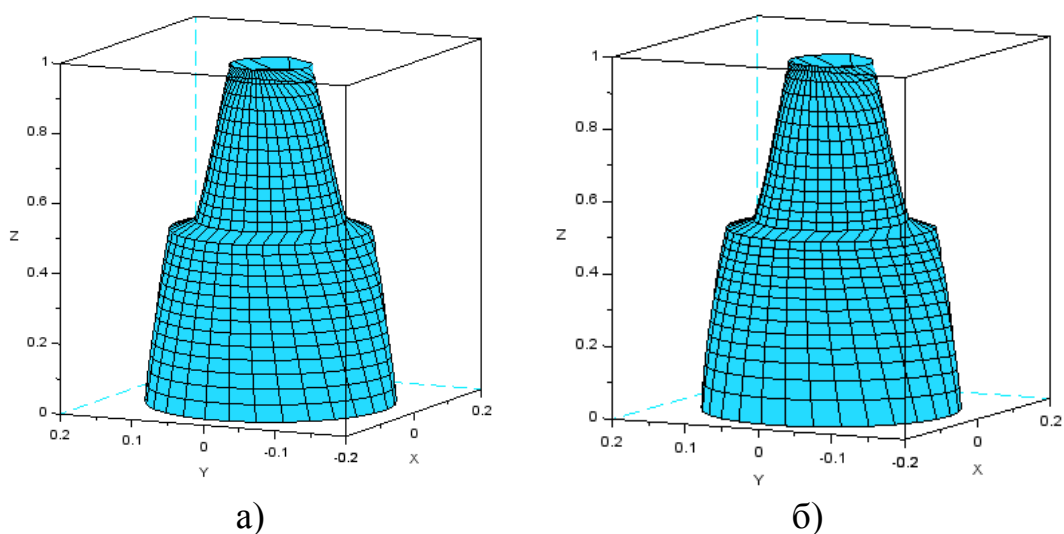


Рис. 3.9. Згущення сітки на межі з'єднання двох конічних поверхонь: а) $a_n = 3$, $c_n = 1$; б) $a_n = 5$, $c_n = 1$.

3.5 Згущення сітки на поверхнях, що отримані під час розв'язку рівняння Шредінгера

Згущення сітки можна провести для розв'язку рівняння Шредінгера (1.11) під час дослідження стану електрону у ядрі кубічної квантової точки.

Актуальність даних розрахунків обумовлена використанням квантових точок в різних галузях, однією з яких є застосування квантових точок під час вироблення сонячних панелей. Більш детальне дослідження різних форм квантових точок з відповідною хвильовою функцією та обчисленням енергії дозволяє робити висновки щодо оптимальності використання певних форм квантових точок. В даному випадку згущення дозволяє більш детально дослідити значення хвильової функції в певній області ядра кубічної квантової точки при невеликому значенні кількості точок розбиття, що може зекономити ресурси техніки.

Для парної хвильової функції із знайденою щільністю ймовірності знаходження електрона в заданій області ядра квантової точки (1.14) використовуємо для згущення отриманої сітки (рис. 1.12, а) рівняння Пуассона (2.4) з контрольними функціями (2.34)-(2.35) для згущення до координатної лінії $\eta_n = 0.5$ (рис. 3.10, а) та одночасно до двох координатних ліній $\xi_n = 0.5, \eta_n = 0.5$ (рис. 3.10, б). Параметри контрольних функцій для кращої візуалізації обираємо $a_n = 10, c_n = 1$, враховуючи, що збільшення параметра a_n дає сильнішу інтенсивність згущення.

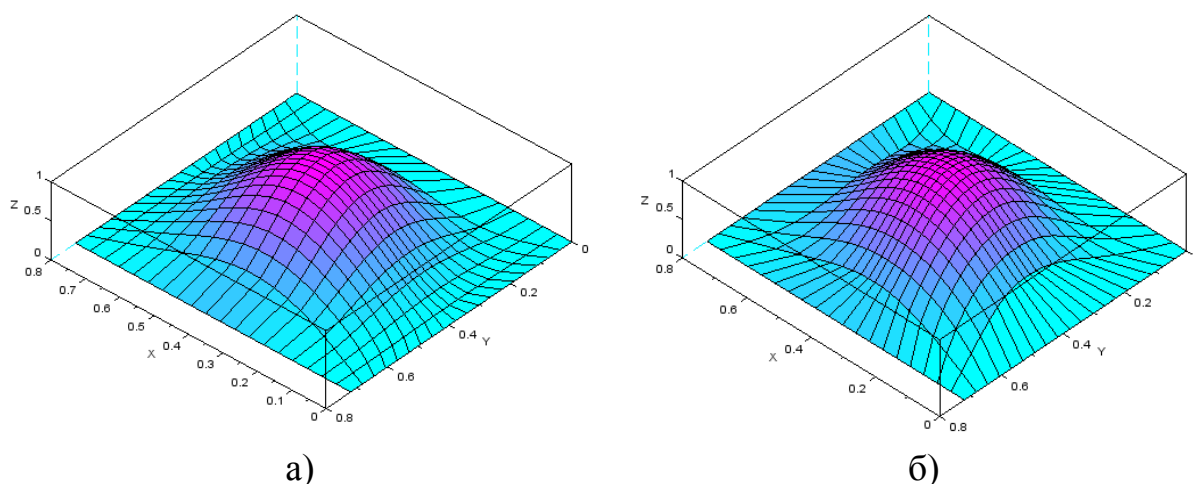


Рис. 3.10. Згущення сітки щільності ймовірності для непарної хвильової функції: а) $\eta_n = 0.5$; б) $\xi_n = 0.5, \eta_n = 0.5$.

Для непарної хвильової функції із знайденою щільністю ймовірності знаходження електрона в заданій області ядра квантової точки (1.13)

використовуємо для згущення отриманої сітки (рис. 1.11) рівняння Пуассона (2.4) з контрольними функціями (2.34)-(2.35) для згущення до координатної лінії $\xi_n = 0.8$ (рис. 3.11, а) та одночасно до двох координатних ліній $\xi_n = 0.5, \eta_n = 0.5$ (рис. 3.11, б). Параметри контрольних функцій для кращої візуалізації обираємо $a_n = 10, c_n = 1$, враховуючи, що збільшення параметра a_n дає сильнішу інтенсивність згущення.

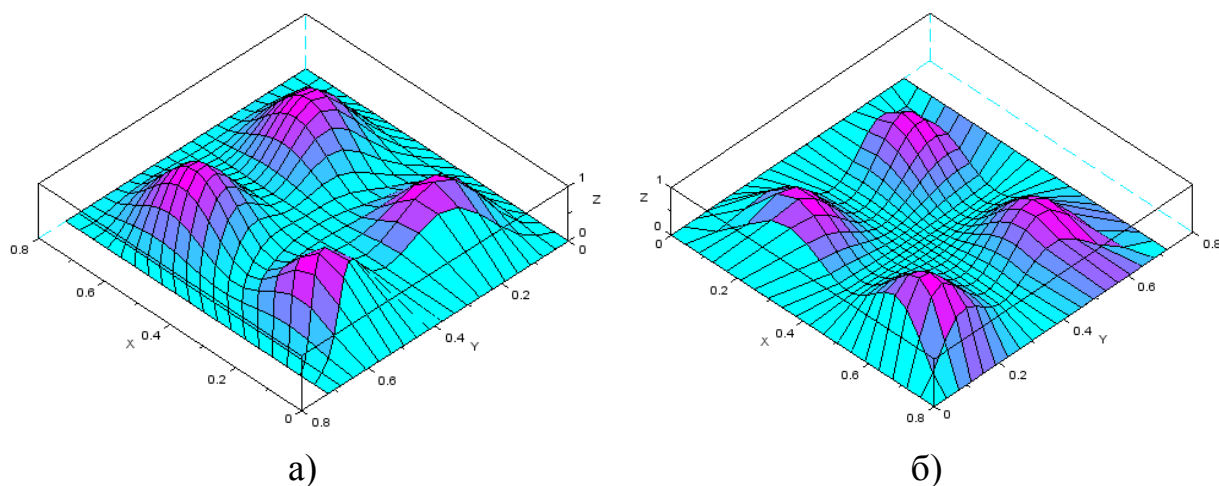


Рис. 3.11. Згущення сітки щільності ймовірності для парної хвильової функції: а) $\xi_n = 0.8$; б) $\xi_n = 0.5, \eta_n = 0.5$.

Аналогічно для суперпозиції парної та непарної хвильових функцій (1.15) згущуємо сітку щільності ймовірності (рис. 1.13) до координатних ліній $\eta_n = 0.2$ (рис. 3.12, а) та $\eta_n = 0.5$ (рис. 3.12, б).

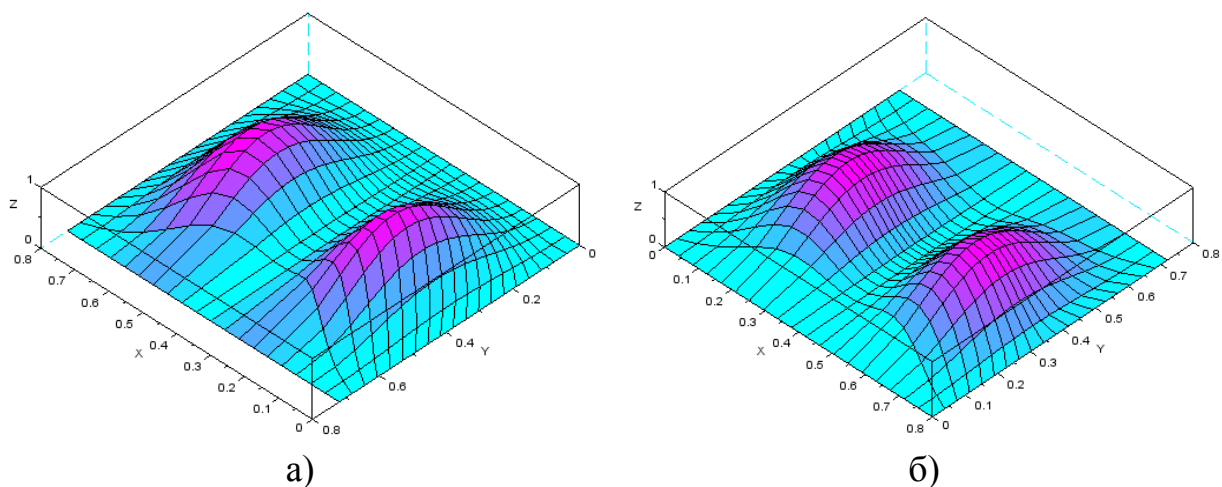


Рис. 3.12. Згущення сітки щільності ймовірності для суперпозиції парної та непарної хвильових функцій: а) $\eta_n = 0.2$; б) $\eta_n = 0.5$.

Висновки до розділу 3

В розділі 3 було досліджено вплив параметрів контрольних функцій рівняння Пуассона на згущення сітки поверхонь різних типів. Більш детально розглянуто поверхні обертання, оскільки такі поверхні широко використовуються в сучасній технічній промисловості, а саме: авіабудування, ракетобудування та ін. Оскільки навіть маленька помилка під час розрахунків в таких задачах може привести не тільки до фінансових втрат, а й до людських жертв, то такі дослідження вимагають більшої точності обчислень. Отже виникає необхідність ретельного дослідження поверхні в місцях концентрації напружень, що можна зробити за допомогою згущення сітки в такій області, при цьому зекономити технічні ресурси під час виконання алгоритму. Тому було досліджено згущення сітки на поверхнях циліндра, конуса, також на місці з'єднання циліндричної та конічної, циліндричної та сферичної, двох конічних поверхонь. Також досліджено згущення сітки на поверхні, що моделює щільність ймовірності знаходження електрона в заданій області квантової точки на прикладі кубічної квантової точки. Всі проведені дослідження на різних поверхнях підтверджують результати щодо впливу параметрів контрольних функцій на інтенсивність згущення сітки. Дослідження було проведено на прикладі згущення до певних ліній сітки, а у випадку комбінацій поверхонь згущення виконано до лінії з'єднання. Отже для посилення згущення необхідно збільшити перший параметр контрольної функції, другий параметр при збільшенні робить сітку більш рівномірною, близькою до ортогональної.

РОЗДІЛ 4

ГЕНЕРАЦІЯ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕРІЗІВ ТРИВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

4.1 Постановка задачі генерації сіток перерізів тривимірних геометричних об'єктів

Розв'язання сучасних задач моделювання просторових об'єктів чи динамічних процесів у складних структурах вимагає дослідження та створення все більш складних механіко-математичних моделей. Блочно-структуровані адаптивні прямокутні сітки широко використовуються під час реалізації методу скінченних різниць та скінченних елементів для розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних. Локально-адаптивні сітки дозволяють виконати зменшення довжини комірок тільки в тих областях, де розв'язок має великий градієнт. Цей метод дає можливість скоротити обсяг пам'яті, що використовується комп'ютером, тобто дозволяє ефективно використовувати комп'ютерні ресурси, а це в свою чергу підвищує швидкість збіжності наближеного розв'язку і допомагає отримати більший порядок точності розв'язку у порівнянні з іншими методами.

Для просторових об'єктів виникає необхідність використання трьох незалежних змінних (координат) в рівнянні Пуассона. Проте для наочності дослідження згущення сітки буде застосовано метод перерізів, коли одна з координат приймає постійне значення. Отже дослідження буде проведено знову за допомогою рівняння Пуассона (2.4). Враховуючи, що практично значущими будуть місця з'єднання, які найчастіше йдуть по прямій лінії, то знову обираємо контрольні функції (2.34)-(2.35) для згущення по координатним лініям.

4.2 Згущення сітки в перерізі моделі тривимірного геометричного об'єкта при кутовому з'єднанні

Розглянемо задачу про з'єднання двох балок під прямим кутом, що у перерізі буде виглядати як з'єднання двох прямокутних трапецій $ABCF$ та $CDEF$ (рис. 4.1). Оскільки саме в місцях з'єднання конструкцій буде спостерігатися найбільша концентрація напружень, то необхідно дослідити значення функцій в околі лінії з'єднання CF . Отже виконуємо згущення сітки окремо в кожній трапеції до лінії CF .

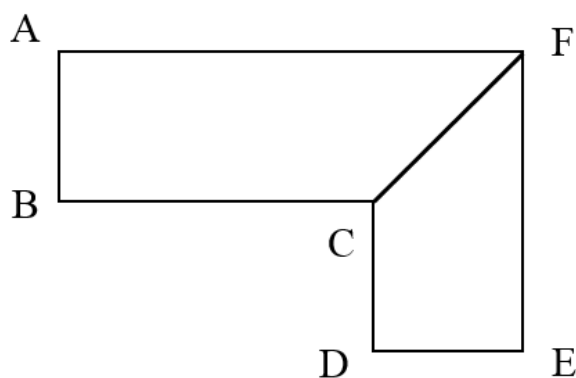


Рис. 4.1. Переріз з'єднання двох балок.

Оскільки інтерес представляє дослідження сітки в околі лінії CF , то виконуємо зручне для подальших обчислень масштабування в межах квадратної області і будуємо початкову сітку, що має 21 вузол по кожній стороні трапеції (рис. 4.2).

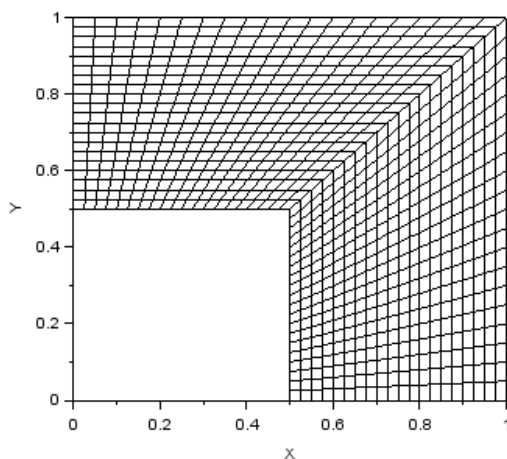


Рис. 4.2. Початкова сітка кутового з'єднання.

Згущення до лінії з'єднання CF виконується окремо по кожній трапеції. Для трапеції ABCF виконується згущення праворуч до вертикальної координатної лінії $\xi = 1$, отже використовуємо формулу (2.34), а для трапеції CDEF згущення проводиться до верхньої горизонтальної лінії $\eta = 1$ формули (2.35). Щоб отримати відповідність вузлів сітки після її згущення на межі з'єднання двох трапецій параметри контрольних функцій обираються однаково для обох трапецій (рис. 4.3).

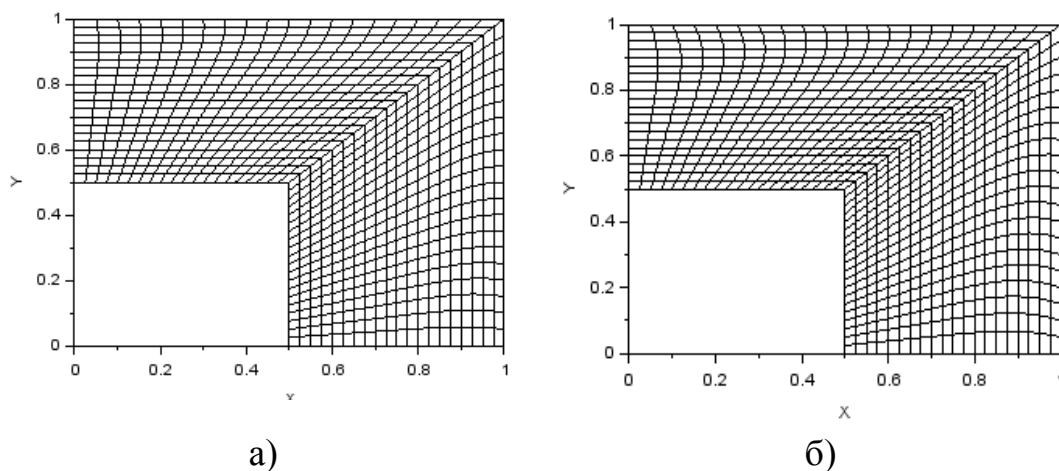


Рис. 4.3. Згущення сітки по лінії з'єднання двох трапецій: а) $a_n = 9$, $c_n = 1$;
 б) $a_n = 12$, $c_n = 1$.

Щоб наочно простежити за зміною інтенсивності згущення, зменшується кількість вузлів побудованої сітки по кожній стороні трапеції з 21 до 11 (рис. 4.4).

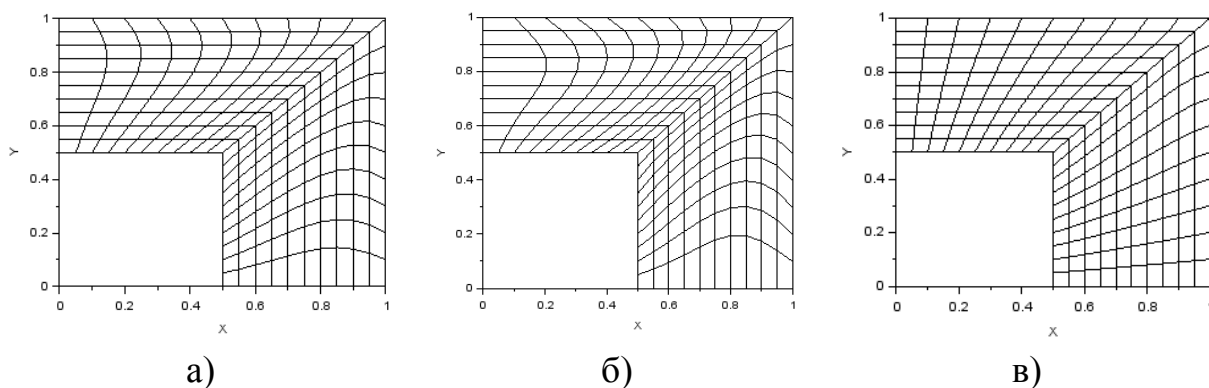


Рис. 4.4. Згущення сітки по лінії з'єднання двох трапецій: а) $a_n = 14$, $c_n = 1$;
 б) $a_n = 20$, $c_n = 1$; в) $a_n = 20$, $c_n = 5$.

Проведене дослідження (рис. 4.4) підтверджує отримані попередні результати про вплив параметрів контрольних функцій на інтенсивність згущення сітки: при збільшенні першого параметра a_n збільшується інтенсивність згущення, а при збільшенні другого параметра c_n сітка наближається за структурою до рівномірного розподілу вузлів.

Виконані розрахунки із наступною генерацією сітки було зроблено для моделей балок однакової товщини, що для трапецій виражається рівністю сторін $AB = DE$. В цьому випадку лінія з'єднання CF була бісектрисою $\angle AFE$. Проте цей факт не впливає на виявлену закономірність між параметрами контрольних функцій (2.34)-(2.35) та інтенсивністю згущення сітки. Це можна продемонструвати, якщо довжини відповідних сторін трапецій не будуть рівними, наприклад, $AB = 0.5$, $DE = 0.7$ (рис. 4.5).

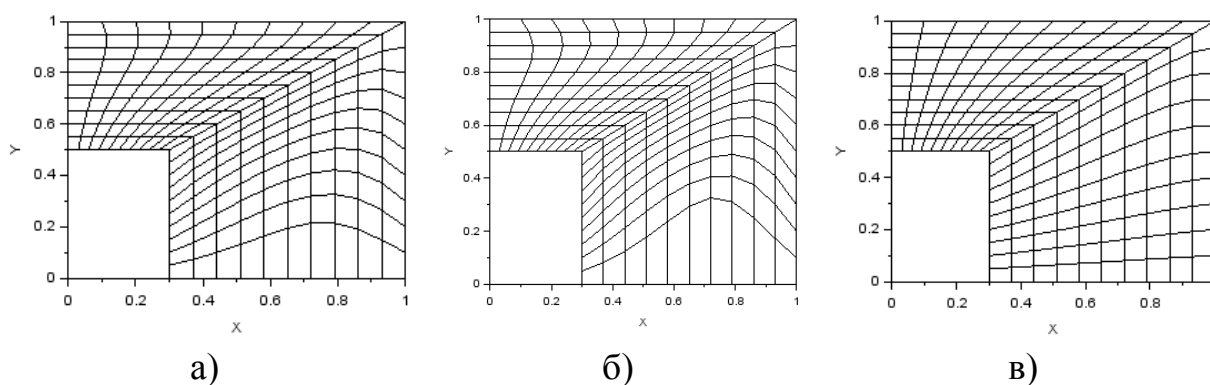


Рис. 4.5. Згущення сітки по лінії з'єднання двох трапецій: а) $a_n = 14$, $c_n = 1$; б) $a_n = 20$, $c_n = 1$; в) $a_n = 20$, $c_n = 5$.

Порівнюючи отримані результати для параметрів контрольних функцій $a_n = 20$, $c_n = 1$, можна зробити висновок, що для більшої ширини трапеції (рис. 4.5, б) спостерігається більше відхилення ліній сітки від однієї сторони до лінії згущення порівняно з трапецією, що має меншу ширину (рис. 4.4, б). Аналогічна ситуація проявляється і для параметрів $a_n = 14$, $c_n = 1$ для більшої (рис. 4.5, а) та меншої ширини трапеції (рис. 4.4, а), але через менший параметр $a_n = 14$ порівняно з $a_n = 20$ інтенсивність згущення також є меншою.

4.3 Згущення сітки в перерізі моделі тривимірного геометричного об'єкта для прямого з'єднання

Розглянемо задачу про з'єднання двох балок по напрямку прямої лінії. Розглянемо більш міцне V-подібне з'єднання, що у перерізі буде виглядати як з'єднання двох п'ятикутників AKLMD та KBCML (рис. 4.6). Оскільки саме в місцях з'єднання конструкцій буде спостерігатися найбільше напруження, то необхідно дослідити значення функцій в околі лінії з'єднання – ламаної KLM.

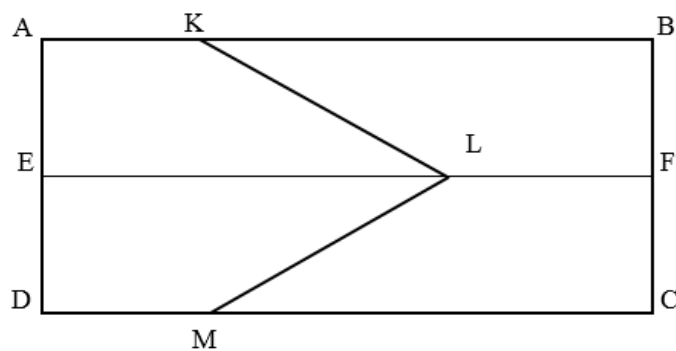
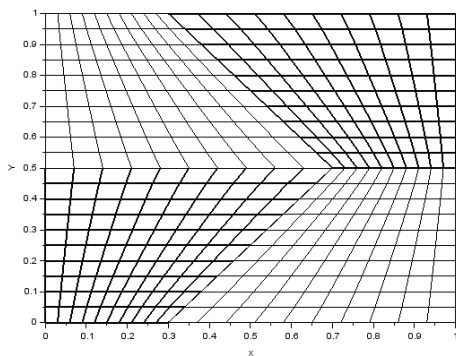
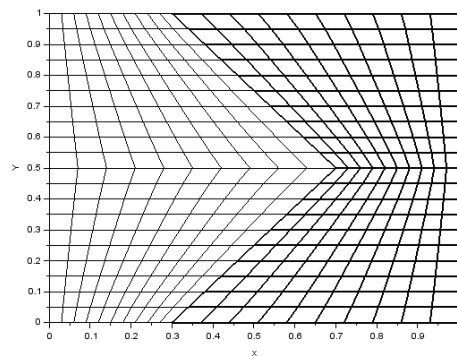


Рис. 4.6. Переріз прямого з'єднання двох балок.

Розглянемо два варіанти побудови блочно-структурованих сіток в заданій області (рис. 4.6). В першому випадку виконаємо спрощення області до розбиття на чотири чотирикутники – прямокутні трапеції (рис. 4.7, а), а в другому залишаємо два п'ятикутники (рис. 4.7, б).



а)



б)

Рис. 4.7. Розбиття області: а) 4 чотирикутники; б) 2 п'ятикутники.

В першому випадку (рис. 4.7, а) виконуємо згущення сітки окремо в кожній трапеції до відповідної лінії з'єднання: для трапецій AKLE та KBFL до спільної лінії KL, а для DELM та LFCM – до лінії LM. Для трапецій AKLE та DELM виконується згущення праворуч до вертикальної координатної лінії $\xi = 1$, а для трапецій KBFL та LFCM виконується згущення ліворуч до вертикальної координатної лінії $\xi = 0$, отже всюди використовуємо формулу (2.34). Щоб отримати відповідність вузлів сітки після її згущення на межі з'єднання двох трапецій параметри контрольних функцій обираються однаково для обох трапецій, а для наочності беремо по 11 вузлів для кожної сторони трапеції та виділяємо жирними лініями сусідні трапеції (рис. 4.8).

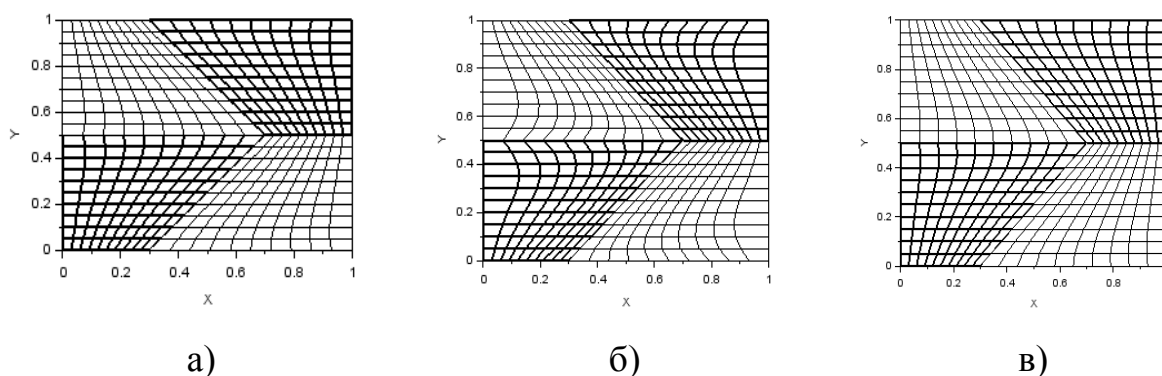


Рис. 4.8. Згущення сітки по лінії з'єднання трапецій: а) $a_n = 10$, $c_n = 1$;
 б) $a_n = 20$, $c_n = 1$; в) $a_n = 20$, $c_n = 2$.

В другому випадку (рис. 4.7, б) виконуємо згущення сітки окремо в кожному п'ятикутнику до лінії з'єднання – ламаної KLM. Для п'ятикутника AKLMD виконується згущення праворуч до вертикальної координатної лінії $\xi = 1$, а для п'ятикутника KBCML виконується згущення ліворуч до вертикальної координатної лінії $\xi = 0$, отже всюди також використовуємо формулу (2.34). Щоб отримати відповідність вузлів сітки після її згущення на межі з'єднання двох п'ятикутників параметри контрольних функцій обираються однаково для них, а для наочності беремо по 11 вузлів для сторін і ламаної та виділяємо жирними лініями для окремих п'ятикутників (рис. 4.9).

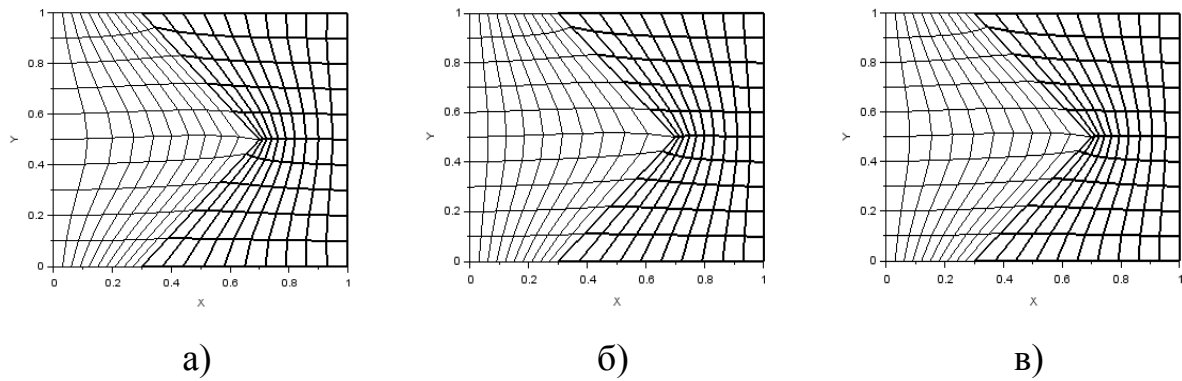


Рис. 4.9. Згущення сітки по лінії з'єднання трапецій: а) $a_n = 10$, $c_n = 2$;
 б) $a_n = 10$, $c_n = 3$; в) $a_n = 15$, $c_n = 3$.

Очевидним є підтвердження попередніх результатів про вплив параметрів контрольних функцій на інтенсивність згущення сітки та її якість. Проте розбиття першим способом заданої області на чотири чотирикутники виявило один істотний недолік, а саме: через фіксацію вузлів сітки на межі кожної області не відбувалось згущення вузлів по умовній лінії з'єднання EF на відміну від другого способу. Отже спосіб розбиття заданої області на чотири чотирикутники може не давати потрібних результатів для подальших досліджень в залежності від поставленої задачі. За результатами дослідження деформації сітки перевага надається розбиттю області на два п'ятикутники.

4.4 Крайова задача вигину тонкої пластинки

Розглянемо крайову задачу вигину тонкої пластинки, де необхідно знайти значення переміщення $w(x, y)$, використовуючи рівняння Софі Жермен:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (4.1)$$

де q – інтенсивність зовнішнього напруження,

D – циліндрична жорсткість пластинки.

Значення D обчислюється за формулою:

$$D = \frac{Eh^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}, \quad (4.2)$$

де E – модуль пружності першого роду (модуль Юнга),

h – товщина пластинки,

ν – коефіцієнт Пуассона.

Розглянемо випадок жорсткого защемлення на контурі пластинки. Це означає накладання двох наступних умов для точок контуру, а саме:

1) відсутність прогину:

$$w = 0; \quad (4.3)$$

2) внутрішня нормаль \bar{n} до контуру не повертається в площині, що перпендикулярна до площини пластинки, тобто

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (4.4)$$

Якщо обрати систему координат так, що для певних точок контуру вектор нормалі \bar{n} буде паралельним до осі абсцис, то умова (4.4) буде мати вигляд:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (4.5)$$

Аналогічно, якщо на певній області контуру вектор нормалі \bar{n} буде паралельним до осі ординат, то умова (4.4) набуде вигляду:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (4.6)$$

Для розв'язання рівняння (4.1) застосуємо наступні різницьві схеми:

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right|_{(i,j)} = \frac{w_{i+2,j} - 4 \cdot w_{i+1,j} + 6 \cdot w_{i,j} - 4 \cdot w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{h_x^4}, \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right|_{(i,j)} = \frac{w_{i,j+2} - 4 \cdot w_{i,j+1} + 6 \cdot w_{i,j} - 4 \cdot w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{h_y^4}, \quad (4.8)$$

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{(i,j)} = (4 \cdot w_{i,j} - 2 \cdot (w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i-1,j}) + w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-2}) / (h_x^2 \cdot h_y^2), \quad (4.9)$$

де h_x, h_y – кроки сітки по відповідним напрямкам координатних ліній x та y ,

(i, j) – сіткові координати.

Після підстановки різницевих схем (4.7) – (4.9) в рівняння (4.1) отримаємо систему лінійних рівнянь. Отримана система рівнянь може бути розв’язана, наприклад, за допомогою функції $lusolve(A, b)$ пакету програм Scilab, що за значеннями розрідженої матриці коефіцієнтів A та стовпця b значень правої частини системи рівнянь дає розв’язок заданої системи лінійних рівнянь.

В найпростішому випадку розглянемо вигин квадратної пластинки зі стороною $a = 1$ і товщиною $h = 0,1$ з рівномірним напруженням $q = 0,05$ та значенням вхідних параметрів рівняння $E = 203200$; $\nu = 0,27$. В результаті розв’язання рівняння (4.1) різницевою схемою (4.7) – (4.9) в пакеті Scilab генеруємо сітку (рис. 4.10), що моделює прогин пластинки.

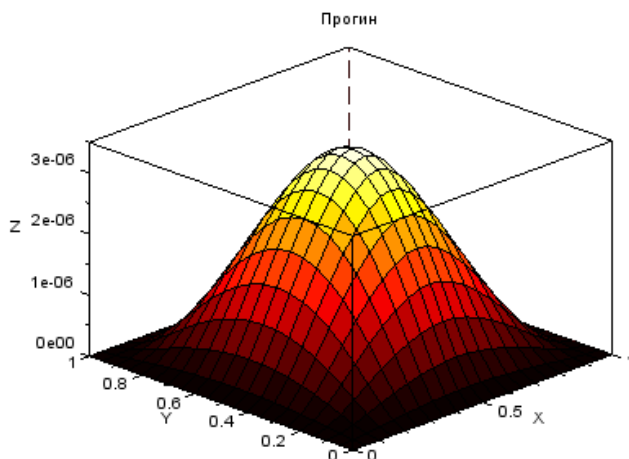


Рис. 4.10. Прогин квадратної тонкої пластинки.

Щоб дослідити більшу кількість значень функції прогину w в певній зоні без збільшення кількості вузлів сітки виконаємо її згущення до цієї зони. Згущення сітки проводимо за допомогою рівняння Пуассона (2.4) з використанням контрольних функцій (2.34), (2.35) для згущення по координатним лініям, що дає змогу більш детально оцінити, наприклад, поведінку біля центральних (для заданої області) координатних ліній $x = 0,5$; $y = 0,5$.

Для порівняння результатів виконуємо згущення тільки до однієї лінії для першого випадку (рис. 4.11, а) з наступними параметрами формули (2.34):

$$n = 21, N = 1, a_n = 3, c_n = 2, \xi_n = 0.5. \quad (4.10)$$

Для другого випадку (рис. 4.12, б) проводимо згущення одночасно до двох ліній, тому застосовуємо параметри для формул (2.34) та (2.35):

$$n = 21, N = 1, a_n = 7, c_n = 5, \xi_n = 0.5, \eta_n = 0.5. \quad (4.11)$$

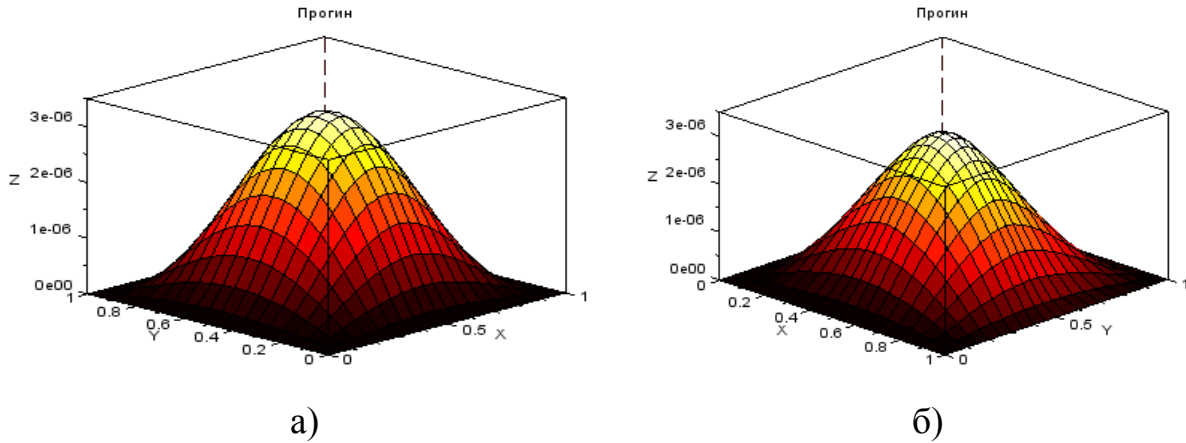


Рис. 4.11. Згущення сітки крайової задачі вигину пластинки з відповідними параметрами контрольних функцій: а) умови (4.10), б) умови (4.11).

У випадку пластинки з двома протилежними сторонами, рівняння яких задаються за допомогою функцій Безьє, аналогічно задачі для квадратної пластинки виконаємо згущення (рис. 4.12) до координатних ліній з наступними параметрами контрольних функцій:

$$n = 21, N = 1, a_n = 3, c_n = 5, \eta_n = 0.5. \quad (4.12)$$

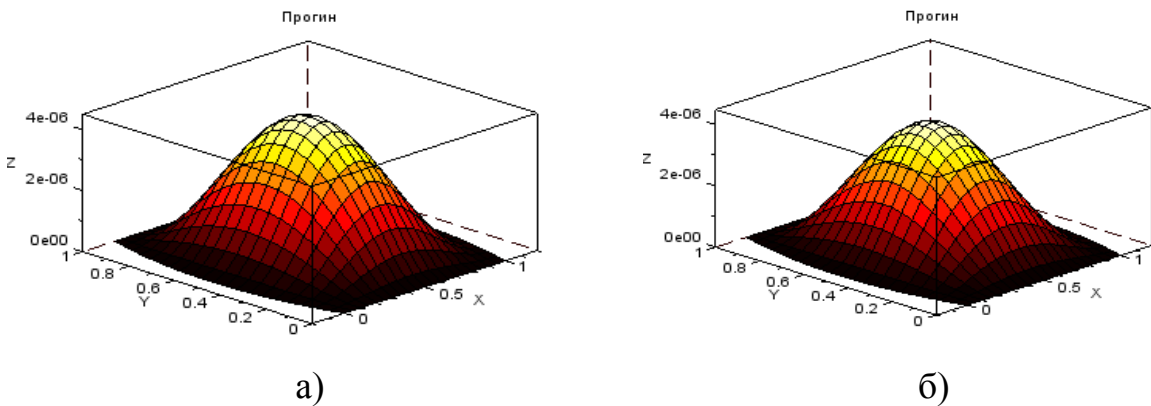


Рис. 4.12. Генерація сітки крайової задачі вигину пластинки: а) без згущення, б) умови для параметрів контрольних функцій (4.12).

В попередньому прикладі пластинка мала вигляд опуклого криволінійного чотирикутника. Розглянемо випадок неопуклого криволінійного чотирикутника та проведемо генерацію сітки (рис. 4.13, а) з подальшою її деформацією (рис. 4.13, б) за допомогою рівняння Пуассона з наступними параметрами контрольних функцій:

$$n = 21, N = 1, a_n = 5, c_n = 1, \eta_n = 0.5. \quad (4.13)$$

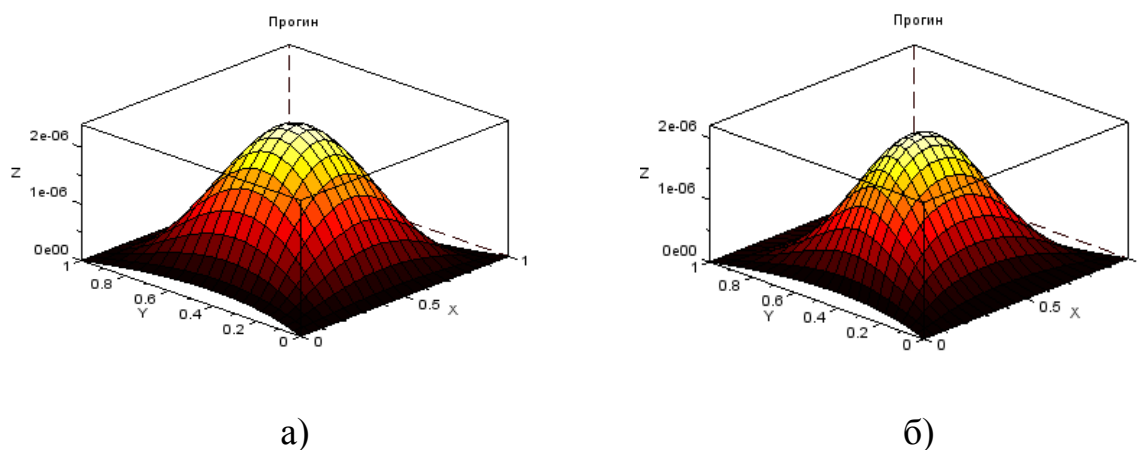


Рис. 4.13. Генерація сітки крайової задачі вигину пластинки: а) без згущення, б) умови для параметрів контрольних функцій (4.13).

В наведених прикладах розв'язку крайової задачі вигину тонкої пластинки показана можливість згущення сітки до певних зон, що можуть вимагати більш детального дослідження значень функції переміщень. Перевага згущення сітки полягає в тому, що кількість вузлів сітки залишається незмінною, а це економить технічні ресурси.

Висновки до розділу 4

В розділі 4 розглянуто генерацію структурованих дискретних моделей для перерізів тривимірних об'єктів. Дослідження проведено на прикладах перерізу кутового та прямого з'єднання двох балок.

В наведеному прикладі моделі кутового з'єднання отримано з'єднання двох прямокутних трапецій по бічній лінії. Для моделі прямого з'єднання

розглянуто два випадки розбиття області генерації блочно-структурованих сіток: на 4 чотирикутники та на 2 п'ятикутники. Згущення сітки було виконано до лінії межі з'єднання, оскільки саме в околі з'єднання двох конструкцій виникає концентрація напружень, тому більш детальне дослідження функцій на геометрії заданої області є актуальним.

Було використано контрольні функції для згущення до координатних ліній розрахункової області. Підтверджено попередні дослідження для плоских областей та поверхонь щодо впливу параметрів контрольних функцій на інтенсивність згущення сітки в заданій області, а саме: збільшення першого параметра приводить до посилення згущення в околі заданої області, а збільшення другого параметра призводить до більш рівномірного розподілення ліній сітки, що наближає її до ортогональності ліній.

У випадку розбиття області генерації сітки на 4 чотирикутники виявлено істотний недолік деформації сітки під час її згущення через фіксацію вузлів на умовній лінії розмежування чотирикутників, що не має відношення до самої структури конструкції. Відсутність деформації по умовній лінії розмежування для випадку розбиття на 4 чотирикутники надає перевагу розбиттю області на 2 п'ятикутники.

Розв'язано крайову задачу вигину тонкої пластинки із застосуванням різницевих схем до рівняння Софі Жермен. За допомогою рівняння Пуассона та контрольних функцій показано можливість згущення сітки розв'язку крайової задачі до певних зон побудови, що дозволяє досліджувати значення функції переміщення більш детально у вказаній зоні без збільшення кількості вузлів сітки. Отримані результати згущень показано для різної форми пластинки: квадрат, опуклий та неопуклий криволінійні чотирикутники.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі отримано результати, що у відповідності до мети дослідження є рішення важливої науково-технічної проблеми розробки математичного апарату для побудови структурованих математичних моделей геометричних об'єктів за допомогою рівняння Пуассона із заданими параметрами згущення та гарантією якості моделі.

Основними результатами, що отримано в дисертаційній роботі, є:

- отримав подальший розвиток еліптичний метод для математичного моделювання складних об'єктів під час розв'язку задач побудови, візуалізації та аналізу структурованих математичних моделей двовимірних та тривимірних геометричних об'єктів для спрощення процесу їх моделювання;
- вперше на базі еліптичного методу побудови структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів розроблено метод оптимального вибору розбиття початкової сітки, що залежить від геометричної форми заданого об'єкту;
- отримав подальший розвиток метод згущення сітки за допомогою контрольних функцій рівняння Пуассона для згущення до координатних ліній розрахункової області, до точки, до області у вигляді кола, що дозволяє більш детально досліджувати залежності в заданій області геометричного об'єкта, не збільшуючи при цьому кількість вузлів сітки, що економить технічні ресурси;
- вперше запропоновано формулу та її різновиди для згущення сітки до діагональної лінії криволінійного чотирикутника.

Розроблені в дисертаційній роботі методи генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів дозволяють якісно підвищити результати математичного моделювання, використовувати їх при аналізі та оптимізації інженерних конструкцій. Під час розв'язання задач дисертаційного дослідження було створено програмний продукт у вільно розповсюджуваному пакеті інженерних програм Scilab, що дозволяє

еліптичним методом автоматизувати генерацію структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів таких, як двовимірні криволінійні чотирикутники, поверхні тіл, перерізи тривимірних об'єктів. За допомогою цього програмного продукту можна керувати формою та інтенсивністю згущення структурованої сітки в заданій області геометричного об'єкта.

Практичні результати представлено візуальними прикладами, що демонструють можливості розробленого програмного продукту. Точність та достовірність результатів підтверджується порівняльним аналізом, відповідністю фізичним властивостям та стійкістю алгоритму згущення сітки до кожної обраної області із можливістю керуванням інтенсивністю згущення.

Отримані результати дисертаційного дослідження можуть бути використані конструкторськими організаціями та виробництвами як додатки математичного моделювання геометричних об'єктів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. Москва. ДМК Пресс. 2005. 640 с.
2. Вальгер С.А., Федорова Н.Н. Применение алгоритма к адаптации расчетной сетки к решению уравнений Эйлера. *Вычислительные технологии*. 2012. Т. 17, № 3. С. 24-33.
3. Васильева М.В., Васильев В.И., Красников А.А., Никифоров Д.Я. Численное моделирование течения однофазной жидкости в трещиноватых пористых средах. *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. 2017. Т. 159, кн.1. С. 100-115.
4. Воронянская М.Е., Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. Математическое моделирование процессов теплопроводности для элементов конструкций ядерных энергетических установок методом R-функций. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2009. 52, № 4. С. 166-178.
5. Гоменюк С.И. Расчет конструкций из композитных материалов с использованием инструментальной системы FORTU. *Вісник Запорізького державного університету*. 2002. № 3. С. 33-39.
6. Гоменюк С.И. Принципы визуализации результатов расчета трехмерных задач механики деформируемого твердого тела в инструментальной системе FORTU. *Вісник Херсонського державного технічного університету*. 2003. № 3. С. 102–105.
7. Гоменюк С.И. Объектно-ориентированные модели и методы анализа механических процессов. Никополь: Никопольская коммунальная типография, 2004. 316 с.
8. Гоменюк С.И. Анализ контактного взаимодействия компрессионного кольца и многослойного дискретного основания. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2004. № 1. С. 56-60.

9. Гоменюк С.И. Вычислительный комплекс для автоматизации проектирования сложных инженерных конструкций и сооружений. *Вісник Херсонського державного технічного університету*. 2004. № 1(19). С. 339–342.
10. Гоменюк С.И. Универсальная система автоматизации проектирования инженерных конструкций и сооружений FORTU-FEM. *Технологические системы*. 2004. № 3. С. 92-95.
11. Гоменюк С.И., Лисняк А.А., Чопоров С.В. Геометрическое моделирование объектов сложной формы с использованием R-функций. *Труды Первой международной конференции «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности»* (4-6 февраля 2009, Ижевск, Удмуртская республика, Россия). Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2009. С. 132-136.
12. Гоменюк С.И., Морозов Д.Н., Толлок В.А. Визуальный анализ результатов численного решения задач механики. *Вісник Запорізького державного університету*. 2001. № 1. С. 18-21.
13. Гоменюк С.И., Морозов Д.Н., Толлок В.А. Опыт применения инструментальных систем для численного анализа задач механики. *Вісник Запорізького державного університету*. 2001. № 2. С. 42-46.
14. Гоменюк С.И., Толлок В.А. Алгоритмизация решения упруго-пластических задач в системе FORTU. *Вісник Запорізького державного університету*. 2002. № 2. С. 41-46.
15. Гоменюк С.И., Толлок В.А., Киричевский В.В., Гребенюк С.Н. Компактная схема решения сверхбольших систем линейных алгебраических уравнений в задачах механики. *Складні системи і процеси*. 2003. № 1. С. 15-20.
16. Гоменюк С.И., Чопоров С.В. Использование R-функций для геометрического моделирования зубчатых колес. *Труды Второй международной конференции «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Технологии высокополигонального*

- моделирования»* (24-26 ноября 2010, Ижевск, Россия). Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2010. Т. 2. С. 36–38.
17. Гоменюк С.И., Чопоров С.В. Дискретизация трехмерных областей, заданных R-функциями, на шестигранные конечные элементы. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2011. № 3(42). С. 146-153.
 18. Городецкий А.С., Батрак Л.Г., Городецкий Д.А., Лазнюк М.В., Юсипенко С.В. Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона. К.: Факт, 2004. 106 с.
 19. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. К.: Факт, 2007. 394 с.
 20. Городецкий А.С., Евзеров И.Д., Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис Б.Е., Гензерский Ю.В., Городецкий Д.А. Метод конечных элементов: теория и численная реализация. К.: Факт, 1997. 137 с.
 21. Городецкий А.С., Шмуклер В.С., Бондарев А.В. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций [Учебное пособие]. Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. 889 с.
 22. Дяденчук А.Ф., Халанчук Л.В. Формування професійної компетентності майбутніх інженерів при розв'язанні прикладних задач у пакеті Scilab. *Моделювання компетентнісної професійної освіти в контексті євроінтеграції: монографія* [Електронне видання] / кол. авт; за заг. ред. проф. Н.П. Волкової. Дніпро: Університет імені Альфреда Нобеля, 2021. 356 с.
 23. Зайцев Д.К., Смирнов П.Е., Якубов С.А., Балашов М.Е. Комплекс программ для создания блочно-структурированных сеток. *Программные продукты и системы*. 2012. № 2. С. 32-35.
 24. Каліон В.А. Обчислювальна гідромеханіка. Модельні задачі: навч. посібник. Київ. Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». 2011. 175 с.

25. Комп'ютерна програма «Побудова двовимірної структурованої сітки за допомогою диференціального рівняння Пуассона»: Свідectво про реєстрацію авторського права на твір № 98466 Україна. / Халанчук Л.В., Чопоров С.В.; реєстр. 07.07.2020, опубл. 30.09.2020, Бюл. № 60.
26. Левандовский А.Н., Мельников Б.Е., Шамкин А.А. Моделирование пористого материала методом конечных элементов. *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2017. № 2 (53). С. 61-77.
27. Лисейкин В.Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток. *Ж. вычисл. матем. и математ. физ.*, 1996. Т. 36, № 1. С. 3-41.
28. Литвинова Ю.С., Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. Аналитическая идентификация трехмерных геометрических объектов по информации о форме их сечений. *Проблемы машиностроения*. 2017. Т. 20, № 1. С. 45-51.
29. Лісняк А.О., Чопоров С.В., Гоменюк С.І. Методика візуалізації геометричних об'єктів, описаних за допомогою R-функцій. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2010. № 1. С. 88-97.
30. Максименко-Шейко К.В. Метод R-функций в краевых задачах магнитной гидродинамики с малым параметром при старших производных. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2008. 51, № 4. С. 103-110.
31. Максименко-Шейко К.В. Нормальные и нормализованные уравнения геометрических объектов в методе R-функций. *Вісник Харківського національного університету Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2009. № 847. С. 251-265.
32. Максименко-Шейко К.В., Рвачев В.Л., Толлок А.В., Шейко Т.И. Математические модели физических полей в скругленных цилиндрах произвольного сечения. *Вісник Запорізького державного університету*. 2001. № 1. С. 54-60.

33. Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. Математические модели скалярных полей в змеевиках произвольного сечения. *Вісник Запорізького державного університету*. 2002. № 2. С. 65-74.
34. Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. Математическое и компьютерное моделирование магнитогидродинамических течений при больших значениях числа Гартмана. *Проблемы машиностроения*. 2007. 10, № 3. С. 56-67.
35. Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов, обладающих симметрией. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 6. С.75-83.
36. Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов в 3D по информации в 2D. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки*. 2010. № 1. С. 98-104.
37. Молчанов А. М., Щербаков М. А., Янышев Д. С., Куприков М. Ю., Быков Л. В. Построение сеток в задачах авиационной и космической техники: учеб. пособие. МАИ. Москва, 2013. 260 с.
38. Морозов М.В., Халанчук Л.В. Моделювання стану електрона у циліндричній квантовій точці з оболонкою. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя: ЗНУ, 2019. №2. С. 117-123.
39. Морозов М.В., Халанчук Л.В. Моделювання циліндричної квантової точки з оболонкою. *Оптика і матеріалознавство високих технологій: збірник наукових праць Двадцятої міжнародної конференції молодих вчених*, 26-29 вересня 2019 р. Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2019. С. 89-90.
40. Морозов М., Халанчук Л., Кравець В., Рожкова О. Застосування математичного моделювання у лабораторному практикумі з фізики. *Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Освіта та наука: пам'ятаючи про минуле, творимо майбутнє»*. Київ, 2020. С. 321-327.

41. Нуриев А.Н., Юнусова А.И., Зайцева О.Н. Моделирование перемещения клиновидного виброробота в вязкой жидкости при различных законах движения внутренней массы в пакете OpenFOAM. *Труды ИСПРАН*. 2017. Т. 29, вып. 1. С. 101-118.
42. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наукова думка, 1982. 552 с.
43. Рвачев В.Л., Корсунский А.Л., Шейко Т.И. Метод R-функций в задаче о течении Гартмана. *Магнитная гидродинамика*. 1982. № 2. С. 64-69.
44. Рвачев В.Л., Максименко-Шейко К.В. Математические модели движения несжимаемой вязкой жидкости по скрученным трубам. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2003. 46, № 2. С. 81-88.
45. Рвачев В.Л., Манько Г.П. Автоматизация программирования в краевых задачах. К.: Наукова думка, 1983. 229 с.
46. Рвачев В.Л., Синекон Н.С. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. Киев: Наукова думка, 1990. 212 с.
47. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. К.: Наукова думка, 1976. 287 с.
48. Рвачев В.Л., Толлок А.В., Уваров Р.А., Шейко Т.И. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций. *Вісник Запорізького державного університету*. 2000. № 2. С. 119-130.
49. Рвачев В.Л., Шапиро В., Шейко Т.И. Применение метода R-функций к построению уравнений локусов, обладающих симметрией. *Електромагнітні та електронні системи*. 1999. 4, № 4. С. 4-20.
50. Рвачев В.Л., Шейко Т.И. Метод R-функций в задачах расчета полей для тел, физические характеристики которых имеют разрывы первого рода. *Прикладная математика и механика*. 1984. 48, № 5. С. 91-96.
51. Рвачев В.Л., Шейко Т.И. Введение в теорию R-функций. *Проблемы машиностроения*. 2001. Т. 4, № 1-2. С. 46-58.

52. Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 1998. 41, № 1. С. 146-159.
53. Снежкова Л. С., Чопоров С. В. Методы и подходы к моделированию геометрических объектов в контактных задачах. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки.* 2014. № 1. С. 171–195.
54. Сосницька Н.Л., Кравець В.І., Морозов М.В., Онищенко Г.О., Халанчук Л.В. Моделювання стану електронів у кінчних квантових точках. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки.* Кам'янець-Подільський: КПНУ, 2019. Вип.20. С. 100-107.
55. Сосницька Н.Л., Морозов М.В., Онищенко Г.О., Халанчук Л.В. Генерація моделей квантових структур у лабораторному практикумі. *Сучасні наукові дослідження на шляху до євроінтеграції: матеріали міжнародного науково-практичного форуму, 21-22 червня 2019 р., ТДАТУ імені Дмитра Моторного.* Мелітополь: ФОП Однорог Т.В. 2019. Частина 2. С. 400-402.
56. Сосницька Н.Л., Морозов М.В., Онищенко Г.О., Халанчук Л.В. Моделювання кванторозмірних гетеросистем та методичне забезпечення курсу “Фізичні основи інформаційних технологій”. *Науковий вісник Льотної академії. Серія: Педагогічні науки. Збірник наукових праць.* Кропивницький: ЛА НАУ, 2019. Вип.5 С. 415-421.
57. Сосницька Н.Л., Морозов М.В., Халанчук Л.В. Математичне комп'ютерне моделювання квантово-механічних явищ та процесів. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету.* Мелітополь: ТДАТУ, 2020. Вип. 20. Т. 2. С.262-268.
58. Толлок А.В., Мухин В.В. Модель геометрической поддержки для описания формы поверхности. *Сборник научных трудов, посвященных 10-летию*

- университета. *Математика. Физика.* Запорожье: Запорожский государственный университет, 1995. С. 86-91.
59. Толок А.В., Мухин В.В. Аппарат визуализации форм поверхности результатов расчета методом конечных элементов: *тези доповідей наукових конференцій викладачів і студентів університету.* Запоріжжя: Запорізький державний університет, 1995. С. 74-75.
60. Толок А.В., Мухин В.В. Алгоритм итерационного уточнения области исследования поверхности. *Вісник Запорізького державного університету.* 1998. № 2. С. 90-97.
61. Толок А.В. Метод определения образа частных производных для поверхности, заданной аналитическим способом. *Вісник Запорізького державного університету.* 1999. № 2. С. 148-153.
62. Толок А.В., Мухин В.В. Рекурсивный алгоритм разбиения области с дополнительными параметрами уточнения. *Вестник Херсонского государственного университета.* 2003. № 3 (19). С. 312-314.
63. Толок В.А., Гоменюк С.И. Инструментальная система решения и анализа задач математической физики методами конечных элементов. *Сборник научных трудов, посвященных 10-летию университета. Математика. Физика.* Запорожье: Запорожский государственный университет, 1995. С. 75-81.
64. Толок В.А., Гоменюк С.И. Формульный язык задания схем решения задач математической физики методами конечных элементов. *Тези доповідей наукової конференції викладачів і студентів університету.* Запоріжжя: Запорізький державний університет, 1995. С. 75-81.
65. Толок В.А., Киричевский В.В., Гоменюк С.И., Гребенюк С.Н., Бувайло Д.П. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация. К.: Наукова думка, 2003. 316 с.
66. Трофимов О. В., Петрова Ю. В. Многосеточные итерационные алгоритмы построения сеток для упругих и упругопластических слоистых пакетов. *Системи та технології.* 2015. № 2 (54). С. 69-80.

67. Халанчук Л. В., Чопоров С. В. Огляд методів генерації дискретних моделей геометричних об'єктів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. №1. С. 139-152.
68. Халанчук Л. В., Чопоров С. В. Розробка методу побудови нерівномірних сіток на базі диференціального рівняння Пуассона. *Прикладні питання математичного моделювання*. Херсон: Херсонський національний технічний університет. 2020, т. 3, № 2.2. С. 274-282.
69. Халанчук, Л. В., Чопоров, С. В. Дослідження генерації нерівномірних структурованих дискретних моделей двовимірних геометричних об'єктів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя: ЗНУ, 2020. № 1. С. 106-112.
70. Халанчук Л.В., Чопоров С.В. Побудова дискретної моделі розв'язку рівняння Пуассона. *Диференціальні рівняння та їх застосування: матер. міжнародної конф.*, 19-21 травня 2017 р. Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2017. С. 116-118.
71. Халанчук Л.В. Сучасний стан дослідження методів генерації структурованих дискретних моделей. *Актуальні проблеми математики та інформатики: збірка тез доповідей Дев'ятої Всеукраїнської, шістнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників*, 26-27 квітня 2018 р. Запоріжжя: ЗНУ, 2018. С. 139.
72. Халанчук Л.В., Чопоров С.В. Структурована дискретна модель розв'язку рівняння Шредінгера. *Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, присвяченої 120-річчю з дня народження академіка НАН України А. П. Філіппова*, 15-18 квітня 2019 р. Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 2019. С. 18.
73. Халанчук Л.В. Вибір початкового розбиття для генерації структурованої дискретної моделі. *Актуальні проблеми математики та інформатики: збірка тез доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної*

- наукової конференції молодих дослідників, 25-26 квітня 2019 р. Запоріжжя: ЗНУ, 2019. С. 130-131.
74. Халанчук Л.В., Чопоров С.В. Вплив властивостей геометрії області на генерацію сітки. *Інформаційні системи та технології: матеріали статей 8-ї Міжнародної науково-технічної конференції*, Коблеве - Харків, 09-14 вересня 2019 року / наук. ред. А.Д. Тевяшев, Л.Б. Петришин, В.Г. Кобзєв. Х.: ХНУРЕ, 2019. С. 93-96.
75. Халанчук Л. В. Вплив параметрів комірки сітки на генерацію структурованої дискретної моделі гіперболічним методом. *Актуальні проблеми математики та інформатики: збірка тез доповідей Одинадцятій Всеукраїнській, Вісімнадцятій регіональної наукової конференції молодих дослідників*, 23-24 квітня 2020 р. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2020. С. 129-130.
76. Халанчук Л. В., Чопоров С. В. Використання рівняння Пуассона для побудови нерівномірних структурованих сіток. *XXI Міжнародна конференція з математичного моделювання (МКММ-2020): збірка тез*, 14-18 вересня 2020 р. Херсон: ХНТУ, 2020. С. 66.
77. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Геометрія коноїда і фізична неадекватність стандартних серендипових елементів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*, 2017, 1, 337-342.
78. Чопоров С.В., Гоменюк С.И. Система геометрического моделирования сложных тел. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2010. № 2(38). С. 147-153.
79. Чопоров С.В., Гоменюк С.И. Проблемно-ориентированный язык геометрического моделирования на базе теории R-функций. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Збірник наукови праць. Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. Харків: НТУ «ХПІ», 2011. № 17. С. 181-189.

80. Чопоров С.В., Гоменюк С.І., Алатамнех Х.Х., Оспіщев К.С. Методи побудови дискретних моделей: структуровані та блочно-структуровані сітки. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 272-284.
81. Чопоров С.В., Лисняк А.А., Гоменюк С.И. Дискретизация геометрических областей, заданных R-функциями, на четырехугольные конечные элементы. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2009. № 1. С. 199-207.
82. Чопоров С.В., Лисняк А.А., Гоменюк С.И. Использование функций В.Л. Рвачева для геометрического моделирования областей сложной формы. *Прикладная информатика*. 2010. № 2(26). С. 109-122.
83. Чопоров С. В., Лисняк А. А., Гоменюк С. И. Подход к определению областей сгущения сетки конечных элементов на базе теории R-функций. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ: Ліра. 2012. Вип. 13. С. 413–419.
84. Чопоров С.В., Лісняк А.О., Борисовська Ю.О., Козлова О.С., Снежкова Л.С. Методи побудови дискретних моделей: неструктуровані сітки *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 2. С. 237-250.
85. Шейко Т.И., Максименко-Шейко К.В., Толлок А.В., Морозова А.И. Математическое и компьютерное моделирование аэрокосмических объектов для реализации технологии 3D-печати. *Информационные технологии в проектировании и производстве*. 2019. № 2 (174). С. 16-20.
86. Яцук Ю.В. Построение расчетных сеток для решения уравнений математической физики методом «объемов Безье» *Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология*. 2009. № 1. С. 116-120.

87. Aanjaneya M., Gao M., Liu H., Batty C., Sifakis E. Power Diagrams and Sparse Paged Grids for High Resolution Adaptive Liquids. *ACM transactions on graphics*. 2017. Vol. 36, No 4. DOI: 10,1145/3072959.3073625
88. AbdelMigid T.A., Saqr K.M., Kotb M.A., Aboelfarag A.A. Revisiting the lid-driven cavity flow problem: Review and new steady state benchmarking results using GPU accelerated code. *Alexandria engineering journal*. 2017. Vol. 56, No 1. P. 123-135.
89. Agoston M.K. Computer graphics and geometric modeling: implementation and algorithms. London: Springer-Verlag, 2005. 959 p.
90. Akimov D.V., Gryshchak V.Z., Gomenyuk S.I., Larionov I. F., Klimenko D. V., Sirenko V. N. Finite-Element Analysis and Experimental Investigation on the Strength of a Three-Layer Honeycomb Sandwich Structure of the Spacecraft Adapter Module. *Strength Mater*, 2016, 48, pp. 379–383.
91. Akinlar M. A., Salako S., Liao G. A Method for Orthogonal Grid Generation. *Gen. Math. Notes*, Vol. 3, No. 1, March 2011, pp.55-72.
92. Armstrong C.G., Robinson D.J., McKeag R.M., Li T.S., Bridgett S.J., Donaghy R.J., McGleenan C.A. Medials for Meshing and More. *Proceedings, 4th International Meshing Roundtable*. Sandia National Laboratories, 1995. P. 277-288.
93. Astionenko I.O., Guchek P.I., Khomchenko A.N., Litvinenko O.I., Tuluchenko G.Y. Properties of one method for the spline approximation. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2019, 853, pp. 49–60.
94. Astionenko I.O., Litvinenko O.I., Osipova N.V., Tuluchenko G.Ya., Khomchenko A.N. Cognitive-graphic method for constructing of hierarchical forms of basic functions of biquadratic finite element. *AIP Conference Proceedings*, 2016, 1773, 040002.
95. Badreddine H., Sato Y., Berger M., et al. A Three-Dimensional, Immersed Boundary, Finite Volume Method for the Simulation of Incompressible Heat Transfer Flows around Complex Geometries. *International journal of chemical engineering*. 2017. DOI: 10.1155/2017/1726519

96. Baehmann P.L., Wittchen S.L., Shephard M.S., Grice K.R., Yerry M.A. Robust geometrically-based, automatic two-dimensional mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987. № 24. P. 1043-1078.
97. Benzley S.E., Perry E., Merkley K., Clark B., Sjaardema G. A comparison of all hexagonal and all tetrahedral finite element meshes for elastic and elastic-plastic analysis. *Proc. 4th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, 1995. P. 179-192.
98. Bianchi G., Rane S., Kovacevic A., Cipollone R. Deforming grid generation for numerical simulations of fluid dynamics in sliding vane rotary machines. *Advances in engineering software*. 2017. Vol. 112. P. 180-191.
99. Bianchi G., Rane S., Kovacevic A., Cipollone R., Murgia S., Contaldi G. Grid generation methodology and CFD simulations in sliding vane compressors and expanders. *IOP Conference Series-Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 232. DOI: 10.1088/1757-899X/232/1/012053
100. Blacker T.D., Meyers R.J. Seams and Wedges in Plastering: A 3D Hexahedral Mesh Generation Algorithm. *Engineering with Computers*. 1993. №9(2). P. 83-93.
101. Blacker T.D., Stephenson M.B. Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1991. № 32. P. 811-847.
102. Boer A.D., van der Schoot M.S., Bijl H. Mesh Deformation Based on Radial Basis Function Interpolation. *Journal of Computers and Structures*. 2007. 45: 784-795.
103. Bonazzoli M., Rapetti F., Venturini C. Dispersion analysis of triangle-based Whitney element methods for electromagnetic wave propagation. *Applied mathematics and computation*. 2018. Vol. 319. P. 274-286.
104. Bulat A.F., Dyrda V.I., Grebenyuk S.N., Agal'tsov G.N. Methods for Evaluating the Characteristics of the Stress-Strain State of Seismic Blocks

- Under Operating Conditions. *Strength of Materials*. 2019. Vol. 51. Iss. 5. P. 715–720.
105. Bulat A.F., Dyrda V.I., Grebenyuk S.N., Klimenko M.I. Determination of Effective Characteristics of the Fibrous Viscoelastic Composite with Transversal and Isotropic Components. *Strength of Materials*. 2019 Vol. 51. Iss. 2. P. 183–192.
106. Bulat A.F., Dyrda V.I., Grebenyuk S.M., Klymenko M.I. Determination of Effective Characteristics of a Fibrous Composite with Account of Viscoelastic Deformation of its Components. *Strength of Materials*. 2020. Vol. 52. Iss. 5. P. 691–699.
107. Chen L., Lingen E. J., de Borst R. Adaptive hierarchical refinement of NURBS in cohesive fracture analysis. *Numerical Methods in Engineering*. 2017. Vol. 112, No 13. P. 2151-2173.
108. Chen T., Strain J. Piecewise-polynomial discretization and Krylov-accelerated multigrid for elliptic interface problems. *J Comput Phys*. 2008; 227:7503–7542.
109. Chern I., Shu Y.C. A coupling interface method for elliptic interface problems. *J Comput Phys*. 2007; 225:2138– 2174.
110. Choporov S., Gomenyuk S., Kudin O., Lisnyak A. Design patterns for object-oriented scientific software. *CEUR Workshop Proceedings*. 2018. Vol. 2105. P. 441-444.
111. Dolgov S.V, Kazeev V.A., Khoromskij B.N. Direct tensor-product solution of one-dimensional elliptic equations with parameter-dependent coefficients. *Mathematics and computers in simulation*. 2018. Vol. 145. P. 136-155.
112. Dostart N., Liu Y., Popovic M.A. Acoustic Waveguide Eigenmode Solver Based on a Staggered-Grid Finite-Difference Method. *Scientific reports*. 2017. Vol. 7. DOI: 10.1038/s41598-017-17511-x
113. Dwight R.P. Robust Mesh Deformation using the Linear Elasticity Equations. *Journal of Computational Fluid Dynamics*. 2009. 12: 401-406.

114. Falkenstein T., Kang S., Davidovic M., Bode M., Pitsch H., Kamatsuchi T., Nagao J., Arima T. LES of Internal Combustion Engine Flows Using Cartesian Overset Grids. *Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP Energies nouvelles*. 2017. Vol. 72. No 6. DOI: 10.2516/ogst/2017026
115. Farin G., Hoschek J., Kim M.-S. Handbook of computer-aided geometric design. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2002 848 p.
116. Fort J., Furst J., Halama, J. Numerical simulation of flow through cascade in wind tunnel test section and stand-alone configurations. *Applied mathematics and computation*. 2018. Vol. 319 P. 633-646.
117. Gasii G. M. Structural and Design Specifics of Space Grid Systems *Science & technique*. 2017. Vol. 16, No 6. P. 475-484.
118. Hasanzadeh K., Laurendeau E., Paraschivoiu I. Adaptive curvature control grid generation algorithms for complex glaze ice shapes RANS simulations. *AIAA (SciTech 2015)*, 5-9 January 2015, Kissimmee, FL, USA.
119. Homeniuk S., Grebenyuk S., Klimenko M., Stoliarova A. Determining the effective characteristics of a composite with hollow fiber at longitudinal elongation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2018, 6(7-96), pp. 6–12.
120. Huang C., Liu W., Yang G. Numerical studies of static aeroelastic effects on grid fin aerodynamic performances. *Chinese journal of aeronautics*. 2017. Vol. 30, No 4. P. 1300-1314.
121. Huang W., Ma J.T., Russell R.D. A study of moving mesh PDE methods for numerical simulation of blowup in reaction diffusion equations. *J Comput Phys*. 2008; 227:6532–6552.
122. Ives D. Geometric grid generation: surface modeling, grid generation, and related issues in computational fluid dynamic (CFD) solutions. *Proceedings of NASA Conference*, OH, NASA CP-3291. Cleveland, 1995. P. 535-546.
123. Joe B. Quadrilateral mesh generation in polygonal regions. *Computeraided design*. 1995. № 27. P. 209-222.

124. Johnston B.P., Sullivan J.M., Kwasnik Jr. and A. Automatic conversion of triangular finite element meshes to quadrilateral elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1991. № 31. P. 67-84.
125. Knupp P.M., Steinberg S. Fundamentals of Grid Generation. London: CRC Press, 1993. 308 p.
126. Koblitz A.R., Lovett S., Nikiforakis N. Direct numerical simulation of particulate flows with an overset grid method. *Journal of computational physics*. 2017. Vol. 343. P. 414-431.
127. Kolyada R.A., Maksimenko-Sheiko K.V., Sheiko T.I. R-Functions Method in the Mathematical Modeling of Convective Heat Exchange in an Octahedral Fuel Assembly with 37 Fuel Elements. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 238(2). P. 154–164.
128. Lavrik V., Homenyuk S., Mezhujev V. A derivation of the stiffness matrix for a tetrahedral finite element by the method of moment schemes. *CEUR Workshop Proceedings*, 2020, 2711, pp. 214–227.
129. Li H., Liu T., Wang M., Zhao D., Qiao A., Wang X., Gu J., Li Z., Zhu B. Design optimization of stent and its dilatation balloon using kriging surrogate model. *Biomedical engineering online*. 2017. Vol. 16. DOI: 10.1186/s12938-016-0307-6
130. Liseikin V. D. A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation. N.-Y.: Springer, 2007. 293 p.
131. Liu D.W., Xu X., Li Q., Peng X., Chen D.H. Correction of model deformation effects for a supercritical wing in transonic wind tunnel. *Tehnicki Vjesnik-Technical Gazette*. 2017. Vol. 24, No 6. P. 1647-1655.
132. Liu W., Li N., Zhao J., Su Y. Wake structure and hydrodynamic performance of flapping foils mimicking fish fin kinematics. *Saudi journal of biological sciences*. 2017. Vol. 24, No 6. P. 1344-1354.
133. Luke E., Collins E., Blades E. A fast mesh deformation method using explicit interpolation. *Journal of Computational Physics*. 2012. 37: 586-601.

134. Mahariq I., Erciyas A. A spectral element method for the solution of magnetostatic fields. *Turkish journal of electrical engineering and computer sciences*. 2017. Vol. 25, No 4. P. 2922-2932.
135. Mahmood M.S., Laghrouche O., Trevelyan J. Implementation and computational aspects of a 3D elastic wave modelling by PUFEM. *Applied mathematical modelling*. 2017. Vol. 49. P. 568-586.
136. Mastin C.W., Thompson J.F. Discrete quasiconformal mappings. *J. Appl. Math. Phys.* 1978. V. 29. № 1. P. 1-11.
137. Maruyama D, Bailly D, Carrier G. High-Quality Mesh Deformation Using Quaternions for Orthogonality Preservation. *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, USA*. 2012.
138. Meena D.R., Gadre S.R., Balanarayan P. PAREMD: A parallel program for the evaluation of momentum space properties of atoms and molecules. *Computer physics communications*. 2018. Vol. 224. P. 299-310.
139. Meyghani B., Awang M.B., Emamian S.S., Mohd Nor M.K.B., Pedapati S.R. A Comparison of Different Finite Element Methods in the Thermal Analysis of Friction Stir Welding (FSW). *Metals*. 2017. Vol. 7, No 10. DOI: 10.3390/met7100450
140. Michler A.K. Aircraft control surface deflection using RBF-based mesh deformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011. 88: 986-10079.
141. Oevermann M, Klein R. A cartesian grid finite volume method for elliptic equations with variable coefficients and embedded interfaces. *J Comput Phys*. 2006; 219:749–769.
142. Okhotnikov D.I. Direct Numerical Simulation of Laminar-Turbulent Transition on Grids with Local Refinement. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta-seriya fiziko-matematicheskie nauki*. 2017. Vol. 159, No 2. P. 216-230.

143. Oliveira R.A.F., Justi G.H., Lopes G.C. Grid convergence study of a cyclone separator using different mesh structures. *Chemical industry & chemical engineering quarterly*. 2017. Vol. 23, No 3. P. 311-320.
144. Ollivier-Gooch C.F., Boivin Ch. Guaranteed-quality simplicial mesh generation with cell size and grading control. *Engineering with Computers*. 2001. 17(3). P. 269-286.
145. Patel H.V., Das S., Kuipers J.A.M. A coupled Volume of Fluid and Immersed Boundary Method for simulating 3D multiphase flows with contact line dynamics in complex geometries. *Chemical engineering science*. 2017. Vol. 166. P. 28-41.
146. Pi Y., Wang N., Chen J., Miao M., Jin Y., Wang W. Anisotropic equivalent thermal conductivity model for efficient and accurate full-chip-scale numerical simulation of 3D stacked IC. *International journal of heat and mass transfer*. 2018. Vol. 120. P. 361-378.
147. Raeli A., Bergmann M., Iollo A. A finite-difference method for the variable coefficient Poisson equation on hierarchical Cartesian meshes. *Journal of computational physics*. 2018. Vol. 355. P. 59-77.
148. Rane S., Kovaevi A. Application of numerical grid generation for improved CFD analysis of multiphase screw machines. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 232. 012017
149. Ricci A. A constructive geometry for computer graphics. *The computer Journal*. 1973. Vol. 16, № 2. P. 157-163.
150. Schweiger M., Arridge S. Basis mapping methods for forward and inverse problems. *International journal for numerical methods in engineering*. 2017. Vol. 109, No 1. P. 3-28.
151. Selim M.M., Koomullil R.P. Mesh Deformation Approaches – A Survey. *J Phys Math*. 2016. 7: 181. doi:10.4172/2090-0902.1000181
152. Sheyko T., Maksimenko-Sheyko K., Sirenko V., Morozova A., Petrova R. Analytical identification of the unmanned aerial vehicles' surfaces for the

- implementation at a 3D printer. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019 Vol. 1(2-97). P. 48–56.
153. Sheyko T.I., Maksimenko-Sheyko K.V., Uvarov R.A., Khazhmuradov M.A. The thermal-hydraulic calculation in a fuel cartridge when the symmetry of fuel rods packing is broken. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2019. Vol. 121(3). P. 74–79.
154. Shumaev V.V., Kuzenov V.V. Development of the numerical model for evaluating the temperature field and thermal stresses in structural elements of aircrafts. *International conference problems of thermal physics and power engineering (PTPPE-2017) Journal of Physics Conference Series*. 2017. Vol. 891. DOI: 10.1088/1742-6596/891/1/012311
155. Sosnickaya N., Morozov M., Khalanchuk L., Onyshchenko H. Modelling the Electromagnetic Processes and Phenomena in Quantum-Sized Systems in the Course of Physical and Mathematical Support of Master’s Programs for the “Electric Power Engineering, Electrical Engineering and Electromechanics Specialty”. *2019 IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)*, 23-25 September 2019, Kremenchuk, Ukraine, pp. 402-405.
156. Sosnytska N., Morozov M., Khalanchuk L. Modeling of Electron State in Quantum Dot Structures. *2020 IEEE Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP)*, Kremenchuk, Ukraine, 2020, pp. 1-5.
157. Sun S., Lv S., Yuan Y., Yuan M. (2016) Mesh Deformation Method Based on Mean Value Coordinates Interpolation. *Acta Mechanica Solida Sinica* 29: 1-12.
158. Surcel D., Laprise R. A General Filter for Stretched-Grid Models: Application in Cartesian Geometry. *Monthly weather review*. 2011. Vol. 139. P. 1637-1653.
159. Takenaka H., Komatsu M., Toyokuni G., Nakamura T., Okamoto T. Quasi-Cartesian finite-difference computation of seismic wave propagation for a three-dimensional sub-global model. *Earth planets and space*. 2017. Vol. 69. DOI: 10.1186/s40623-017-0651-1

160. Talbert J. A., Parkinson A.R. Development of an automatic, two dimensional finite element mesh generator using quadrilateral elements and Bezier curve boundary definition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1991. № 29. P. 1551-1567.
161. Tang T. Moving mesh methods for computational fluid dynamics. *Contemporary Mathematics*. 2005; 383
162. Thompson J.F., Soni B.K., Weatherill N.P. Handbook of Grid Generation. Boca Raton: CRC Press. 1998. 1096 p.
163. Thompson J.F., Thames F.C., Mastin C.W. TOMCAT-A code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *J. Comput. Phys*. 1977. V. 24. № 2. P. 274-302.
164. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Numerical grid generation: foundations and applications. New York: Elsevier North Holland, Inc., 1985. 483 p.
165. Vollmer J., Mencl R., Müller H. Improved Laplacian Smoothing of Noisy Surface Meshes. *Computer Graphics Forum*. 1999. №18(3). P. 131-138.
166. Wan D.C., Turek S. An efficient multigrid-FEM method for the simulation of solid-liquid two phase flows. *J Computational and Applied Mathematics*. 2007; 203:561–580.
167. Wan D.C., Turek S. Fictitious boundary and moving mesh methods for the numerical simulation of rigid particulate flows. *J Comput Phys*. 2007; 222:28–56.
168. Wang S., Zhang L., Yin G. Numerical Investigation of the FSI Characteristics in a Tubular Pump. *Mathematical problems in engineering*. 2017. DOI: 10.1155/2017/7897614
169. Wang Z.Y., Yu J.C., Zhang A.Q., Wang Y.X., Zhao W.T. Parametric geometric model and hydrodynamic shape optimization of a flying-wing structure underwater glider. *China Ocean Engineering*. 2017. Vol. 31, No 6. P. 709-715.

170. Witteveen J.A.S Explicit and Robust Inverse Distance Weighting Mesh Deformation for CFD. *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, USA. 2010.
171. Wu C.L., Li Z.L., Lai M.C. Adaptive mesh refinement for elliptic interface problems using the nonconforming immersed finite element method. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*. 2011; 8:466–483.
172. Xia K., Zhan M., Wan D., Wei G.W. Adaptively deformed mesh based interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients. *J Comput Phys*. 2012; 231(4): 1440–1461.
173. Xiao C.N., Denner F., van Wachem B.G.M. Fully-coupled pressure-based finite-volume framework for the simulation of fluid flows at all speeds in complex geometries. *Journal of computational physics*. 2017. Vol. 346 P. 91-130.
174. Yates D.N., Sable W.W., Vinson T.J. The DAISY code. *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*. New-York. 1973. P. 175-210.
175. Yeo H., Ki H. A unified momentum equation approach for computing thermal residual stresses during melting and solidification. *Computer physics communications*. 2018. Vol. 224. P. 230-244.
176. Yoshimura S., Wada Y., Yagawa G. Automatic mesh generation of quadrilateral elements using intelligent local approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1999. № 179. P. 125-138.
177. Yu S.N., Geng W.H., Wei G.W. Treatment of geometric singularities in implicit solvent models. *Journal of Chemical Physics*. 2007; 126:244108. [PubMed: 17614538]
178. Yu S.N., Wei G.W. Three-dimensional matched interface and boundary (MIB) method for treating geometric singularities. *J Comput Phys*. 2007; 227:602–632.
179. Yu S.N., Zhou Y.C., Wei G.W. Matched interface and boundary (MIB) method for elliptic problems with sharp-edged interfaces. *J Comput Phys*. 2007; 224(2): 729–756.

180. Zhao P., Chan C.H., Wang G. An Improved Full-Wave Multilevel Green's Function Interpolation Method with RBF-QR Technique for Fast Field Evaluation. *IEEE ACCESS*. 2017. Vol. 5. P. 10241-10249.
181. Zhao S. High order matched interface and boundary methods for the helmholtz equation in media with arbitrarily curved interfaces. *J Comput Phys*. 2010; 229: 3155–3170.
182. Zhao S., Wei G.W., Xiang Y. Dsc analysis of free-edged beams by an iteratively matched boundary method. *Journal of Sound and Vibration*. 2005; 284(1–2): 487–493.
183. Zheng J., Zhang W., Jiang J., Guo R. CFD simulation and experimental study of water-oil displacement flow in an inclined pipe. *International journal of heat and technology*. 2017. Vol. 35, No 3. P. 663-667.
184. Zhou L., Bai L., Shi W.D., Li W., Wang C., Ye D.X. Numerical analysis and performance experiment of electric submersible pump with different diffuser vanes number. *Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering*. 2018. Vol. 40, No 2. DOI: 10.1007/s40430-018-0986-y
185. Zhou X., Li S. A novel three-dimensional mesh deformation method based on sphere relaxation. *Journal of Computational Physics*. 2015. 298: 320-336.
186. Zhou Y.C., Wei G.W. On the fictitious-domain and interpolation formulations of the matched interface and boundary (MIB) method. *J Comput Phys*. 2006; 219(1): 228–246.
187. Zhou Y.C., Zhao S., Feig M., Wei G.W. High order matched interface and boundary method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *J Comput Phys*. 2006; 213(1):1–30.
188. Zhu J.Z., Zienkiewicz O.C., Hinton E., Wu J. A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1991. № 32. P. 849-866.
189. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 631 p.

ДОДАТКИ

Додаток А

Порівняння збіжності ітераційних процесів для ввігнутої області

Додаток А1

Таблиця 1

Порівняння збіжності ітераційних процесів для ввігнутої області 1

Точки межі побудови	Кількість точок розбиття	Фактори	Рівномірне розбиття	Трансфінитна інтерполяція
$x_{ln}=-3$ $y_{ln}=-2$ $x_{ls}=0$ $y_{ls}=0$ $x_{lv}=-4$ $y_{lv}=2$ $x_{pn}=2$ $u_{pn}=-1$ $x_{ps}=-1$ $u_{ps}=0$ $x_{pv}=2$ $u_{pv}=1$	31	Кількість кроків циклу	233	218
		Відхилення по x	0.0009728	0.0009446
		Відхилення по y	0.0001886	0.0003053
	41	Кількість кроків циклу	401	341
		Відхилення по x	0.0009768	0.0009440
		Відхилення по y	0.0001612	0.0003179
	51	Кількість кроків циклу	607	479
		Відхилення по x	0.0009855	0.0009414
		Відхилення по y	0.0001479	0.0003255
	61	Кількість кроків циклу	850	628
		Відхилення по x	0.0009861	0.0009409
		Відхилення по y	0.0001393	0.0003315
	71	Кількість кроків циклу	1127	786
		Відхилення по x	0.0009879	0.0009408
		Відхилення по y	0.0001339	0.0003358

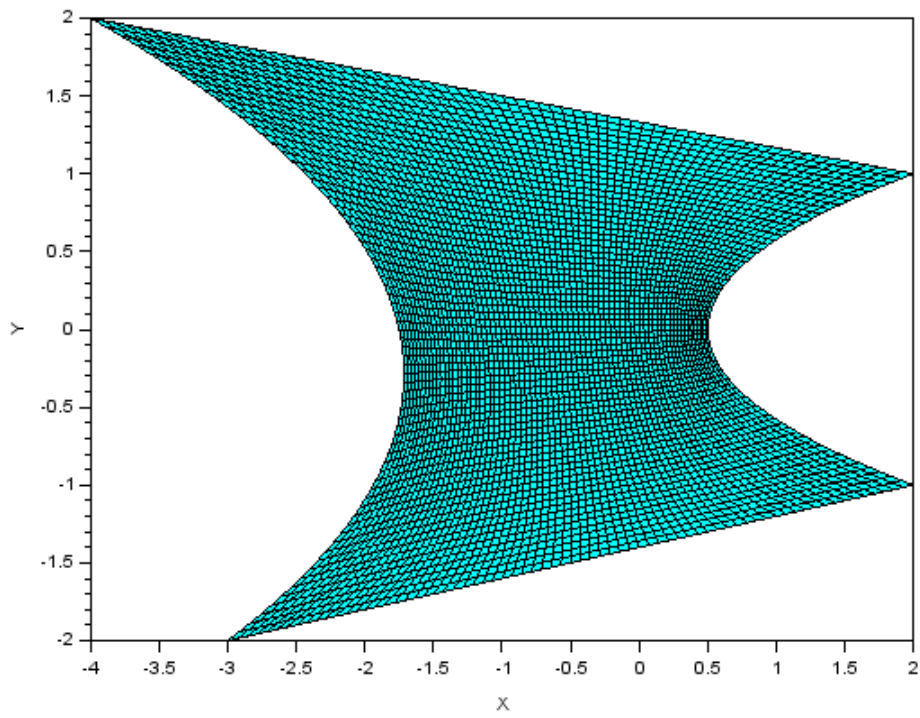


Рис. 1. Побудова сітки для ввігнутої області 1.

Додаток А2

Таблиця 2

Порівняння збіжності ітераційних процесів для ввігнутої області 2

Точки межі побудови	Кількість точок розбиття	Фактори	Рівномірне розбиття	Трансфінитна інтерполяція
xln=-3 yln=-2 xls=-1 yls=0 xlv=-4 ylv=2 xpn=2 upn=-1 xps=0 ups=0 xpv=2 upv=1	31	Кількість кроків циклу	262	198
		Відхилення по x	0.0009644	0.0008396
		Відхилення по y	0.0002305	0.0005275
	41	Кількість кроків циклу	436	308
		Відхилення по x	0.0009753	0.0008426
		Відхилення по y	0.0002125	0.0005290
	51	Кількість кроків циклу	646	434
		Відхилення по x	0.0009772	0.0008527
		Відхилення по y	0.0001997	0.0005180
	61	Кількість кроків циклу	888	575
		Відхилення по x	0.0009816	0.0008635
		Відхилення по y	0.0001908	0.0005016
71	Кількість кроків циклу	1162	730	
	Відхилення по x	0.0009807	0.0008728	
	Відхилення по y	0.0001832	0.0004834	

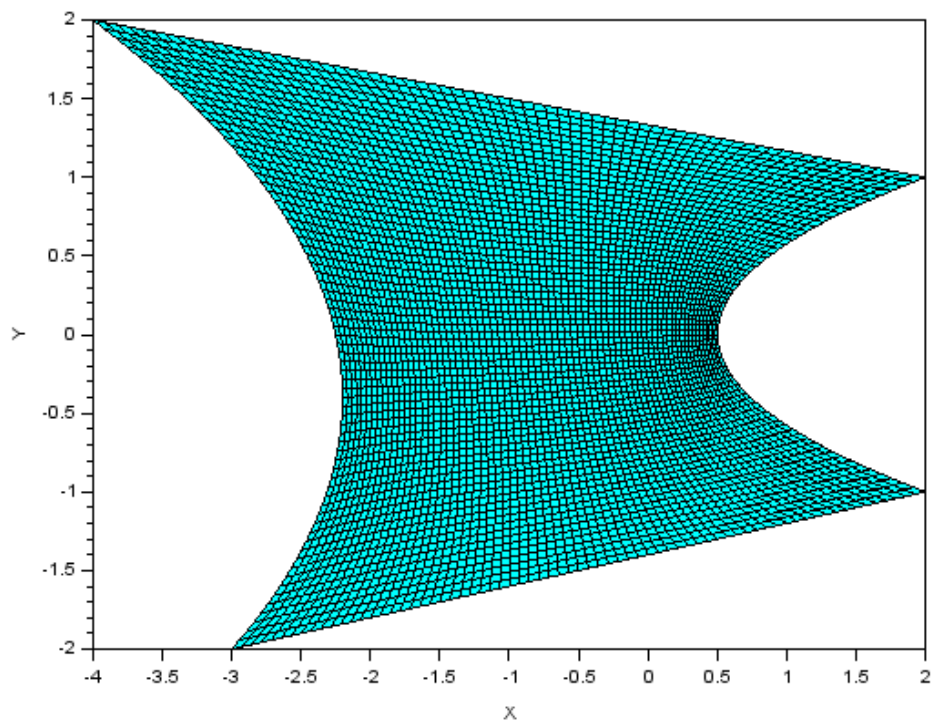


Рис. 2. Побудова сітки для ввігнутої області 2.

Додаток АЗ

Таблиця 3

Порівняння збіжності ітераційних процесів для ввігнутої області 3

Точки межі побудови	Кількість точок розбиття	Фактори	Рівномірне розбиття	Трансфінитна інтерполяція
xln=-3 yln=-2 xls=-1 yls=0 xlv=-4 ylv=2 xpn=2 upn=-1 xps=1 ups=0 xpv=2 upv=1	31	Кількість кроків циклу	563	455
		Відхилення по x	0.0009925	0.0009727
		Відхилення по y	0.0001199	0.0002107
	41	Кількість кроків циклу	917	719
		Відхилення по x	0.0009907	0.0009771
		Відхилення по y	0.0001193	0.0002105
	51	Кількість кроків циклу	1330	1017
		Відхилення по x	0.0009926	0.0009771
		Відхилення по y	0.0001193	0.0002089
	61	Кількість кроків циклу	1797	1340
		Відхилення по x	0.0009921	0.0009778
		Відхилення по y	0.0001191	0.0002072
71	Кількість кроків циклу	2311	1682	
	Відхилення по x	0.0009927	0.0009786	
	Відхилення по y	0.0001189	0.0002054	

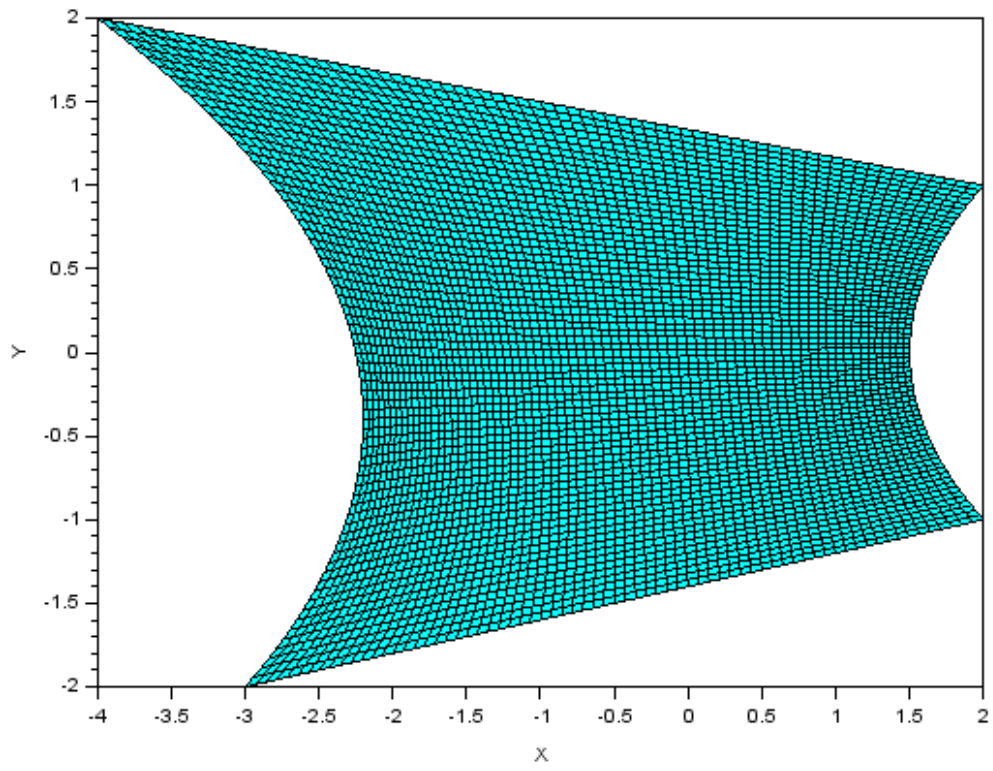


Рис. 3. Побудова сітки для ввігнутої області 3.

Додаток А4

Таблиця 4

Порівняння збіжності ітераційних процесів для ввігнутої області 4

Точки межі побудови	Кількість точок розбиття	Фактори	Рівномірне розбиття	Трансфінитна інтерполяція
xln=-3 yln=-2 xls=-2 yls=0 xlv=-4 ylv=2 xpn=2 upn=-1 xps=1 ups=0 xpv=2 upv=1	31	Кількість кроків циклу	425	295
		Відхилення по x	0.0009602	0.0008180
		Відхилення по y	0.0002656	0.0005600
	41	Кількість кроків циклу	685	466
		Відхилення по x	0.0009636	0.0008587
		Відхилення по y	0.0002525	0.0005087
	51	Кількість кроків циклу	988	661
		Відхилення по x	0.0009676	0.0008812
		Відхилення по y	0.0002417	0.0004692
	61	Кількість кроків циклу	1329	874
		Відхилення по x	0.0009716	0.0008983
		Відхилення по y	0.0002324	0.0004391
71	Кількість кроків циклу	1705	1103	
	Відхилення по x	0.0009738	0.0009083	
	Відхилення по y	0.0002241	0.0004142	

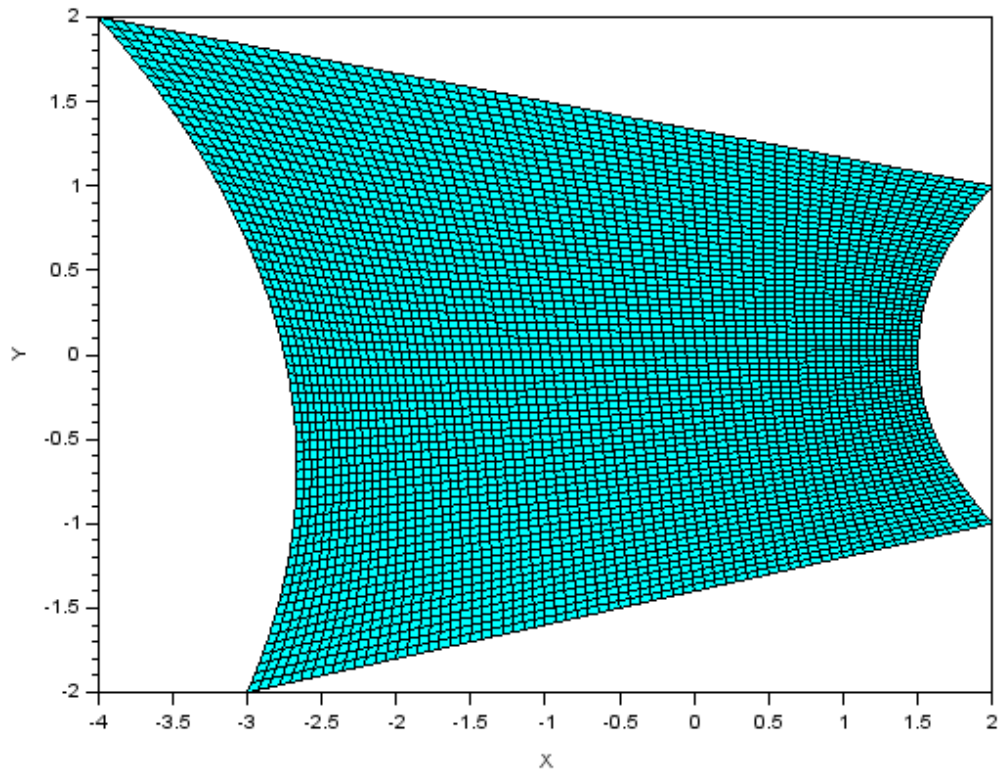


Рис. 4. Побудова сітки для ввігнутої області 4.

Додаток Б

Порівняння збіжності ітераційних процесів для опуклої області

Таблиця 1

Порівняння збіжності ітераційних процесів для опуклої області 1

Точки межі побудови	Кількість точок розбиття	Фактори	Рівномірне розбиття	Трансфінитна інтерполяція
xln=-3 yln=-2 xls=-6 yls=0 xlv=-4 ylv=2 xpn=2 upn=-1 xps=4 ups=0 xpv=2 upv=1	31	Кількість кроків циклу	479	547
		Відхилення по x	0.0009563	0.0009777
		Відхилення по y	0.0002867	0.0002049
	41	Кількість кроків циклу	785	905
		Відхилення по x	0.0009618	0.0009814
		Відхилення по y	0.0002634	0.0001900
	51	Кількість кроків циклу	1144	1332
		Відхилення по x	0.0009673	0.0009812
		Відхилення по y	0.0002474	0.0001793
	61	Кількість кроків циклу	1550	1819
		Відхилення по x	0.0009711	0.0009849
		Відхилення по y	0.0002351	0.0001716
	71	Кількість кроків циклу	1998	2364
		Відхилення по x	0.0009738	0.0009851
		Відхилення по y	0.0002251	0.0001650

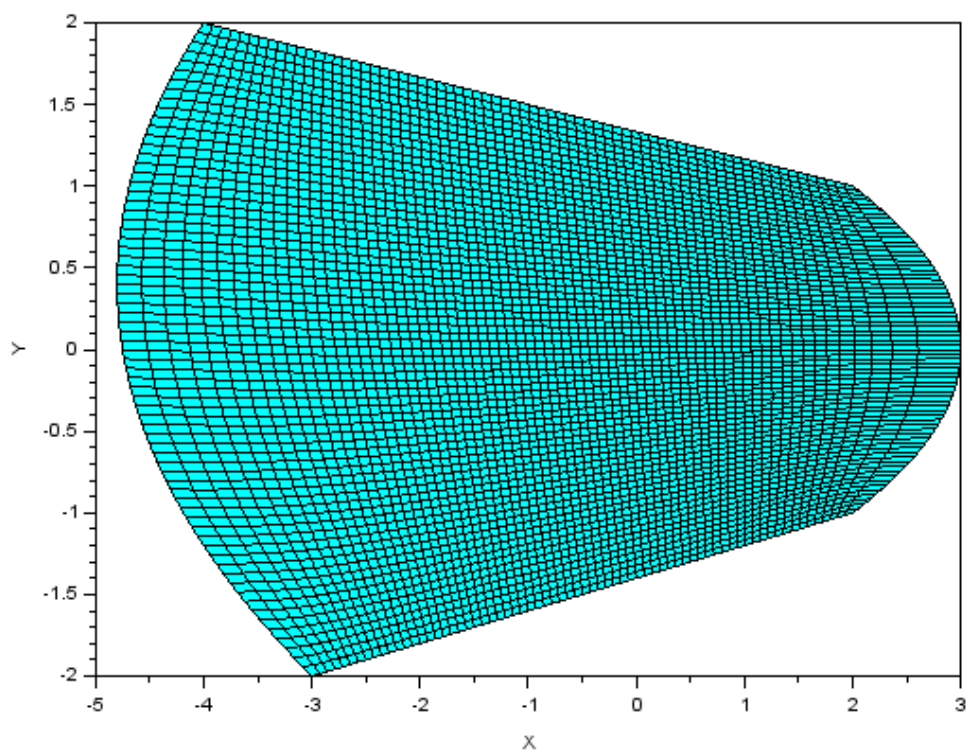


Рис. 1. Побудова сітки для опуклої області.

Додаток В

Порівняння збіжності ітераційних процесів для області з опуклою та
ввігнутою сторонами

Таблиця 1

Порівняння збіжності ітераційних процесів

Точки межі побудови	Кількість точок розбиття	Фактори	Рівномірне розбиття	Трансфінитна інтерполяція
$x_{ln}=-3$ $y_{ln}=-2$ $x_{ls}=-6$ $y_{ls}=0$ $x_{lv}=-4$ $y_{lv}=2$ $x_{pn}=2$ $y_{pn}=-1$ $x_{ps}=1$ $y_{ps}=0$ $x_{pv}=2$ $y_{pv}=1$	31	Кількість кроків циклу	541	804
		Відхилення по x	0.0009774	0.0009945
		Відхилення по y	0.0002057	0.0000775
	41	Кількість кроків циклу	872	1336
		Відхилення по x	0.0009784	0.0009942
		Відхилення по y	0.0002031	0.0000776
	51	Кількість кроків циклу	1254	1973
		Відхилення по x	0.0009787	0.0009958
		Відхилення по y	0.0002008	0.0000777
	61	Кількість кроків циклу	1679	2707
		Відхилення по x	0.0009787	0.0009959
		Відхилення по y	0.0001986	0.0000777
	71	Кількість кроків циклу	2140	3530
		Відхилення по x	0.0009795	0.0009962
		Відхилення по y	0.0001966	0.0000777

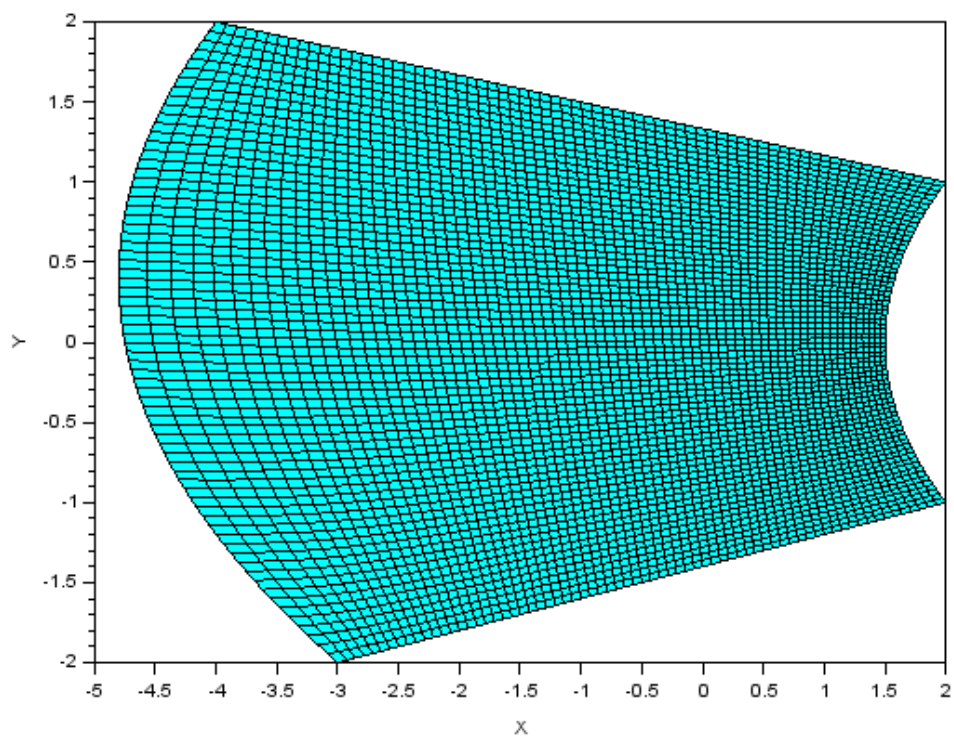


Рис. 1. Побудова сітки для області з опуклою та ввігнутою сторонами.

Додаток Г

Апробація програмного інструменту генерації дискретної структурованої моделі геометричного об'єкта

