

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

СМОЛЯНКОВА ТЕТЯНА МИКОЛАЇВНА

УДК: 004.421:81'276.6:002.1(043.5)

**ДИСЕРТАЦІЯ
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ
ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ ІЗ
РІЗНОМОДУЛЬНИМИ КОМПОНЕНТАМИ**

113 – Прикладна математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Т.М. Смолянкова

Науковий керівник:
Клименко Михайло Іванович,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

АНОТАЦІЯ

Смолянкова Т.М. Математичне моделювання механічних характеристик волокнистих композитів із різномодульними компонентами. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – Прикладна математика. – Запорізький національний університет, Запоріжжя, 2021.

У дисертаційному дослідженні отримано ефективні механічні характеристики різномодульного пружного волокнистого композитного матеріалу для випадків розтягу та стиску. Визначено ефективні технічні сталі вказаного композиту – поздовжній та поперечний модулі пружності та коефіцієнти Пуассона. Для цього використано кінематичні умови узгодження переміщень точок гомогенізованого композиту та його компонентів – матриці та волокна – при спільному деформуванні.

Основна частина дисертації складається з вступу, чотирьох розділів та висновків.

У вступі обґрунтовано вибір теми дослідження, сформульовано мету, завдання, визначено методи дослідження, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів. Розкрито особистий внесок здобувача у дослідженнях, виконаних у співавторстві, подано дані щодо апробації результатів дисертації.

У першому розділі кваліфікаційної наукової праці досліджуються сучасний стан та основні підходи до вирішення проблеми гомогенізації різномодульних композитів. Для визначення сутності даної проблеми розглянуто основні механічні характеристики композитів, що потребують визначення у процесі гомогенізації. Висвітлено сутність експериментального підходу та математичного моделювання для знаходження ефективних механічних характеристик волокнистих композитів. Розглянуто найбільш відомі дослідження у цьому напрямку. Відзначено, що існує кілька

методологічних підходів до вивчення різномодульних матеріалів, наведено короткі характеристики основних публікацій у межах кожного з підходів.

У цьому розділі розглянута також теоретична основа дисертаційного дослідження – визначальні співвідношення між напруженнями та деформаціями. Вони сформульовані для ізотропного матеріалу відповідно до класичної теорії різномодульного пружного середовища, запропонованої С.А. Амбарцумяном, та розповсюджені на випадок різномодульного трансверсально-ізотропного середовища. При цьому було прийнято гіпотезу про сталість модулів зсуву при розтягу та стиску.

У розділі 2 визначено ефективний поздовжній модуль пружності та коефіцієнт Пуассона різномодульного трансверсально-ізотропного композиту в умовах розтягу та стиску. Елементарну комірку композиту подано у вигляді циліндра, складеного з порожнистого циліндра, що моделює матрицю, та суцільного циліндра, що моделює волокно. Для визначення ефективних пружних сталих спочатку розв'язано задачу про сумісне деформування компонентів представницької комірки композиту – матриці та волокна. Радіальні переміщення та напруження на поверхні контакту матриці та волокна при цьому є неперервними. Аналогічна задача визначення компонентів напружено-деформованого стану в умовах поздовжнього розтягу та стиску розв'язана для однорідного композиційного матеріалу. Ефективні пружні сталі – поздовжній модуль пружності та коефіцієнт Пуассона – визначаються з умови рівності осьових деформацій у точках елементарної комірки гомогенізованого композиту, матриці та волокна, а також радіальних переміщень на зовнішній поверхні матриці та елементарної комірки однорідного композиту.

У розділі 3 досліджується гомогенізація різномодульного трансверсально-ізотропного композиту в умовах поперечного розтягу-стиску. Спочатку розв'язано крайову задачу знаходження компонентів напружено-деформованого стану матриці та волокна при заданому радіальному напруженні на зовнішній поверхні матриці. При цьому радіальні

переміщення та напруження на поверхні контакту матриці та волокна вважаються неперервними, осьові деформації матриці та волокна рівні між собою.

На наступному етапі розв'язується задача визначення переміщень, деформацій та напружень для однорідного композиту при тих же крайових умовах. Умовами узгодження є рівність осьових переміщень однорідного композиту, матриці та волокна, а також рівність радіальних переміщень на зовнішній поверхні матриці та комірки однорідного композиту. Використання цих умов узгодження дозволило отримати співвідношення між ефективними пружними сталими у площині ізотропії композиту.

У четвертому розділі визначено ефективний поперечний модуль пружності та коефіцієнт Пуассона для площини ізотропії трансверсально-ізотропного різномодульного композиту. Для цього використано припущення про рівність модулів зсуву при розтязі та стиску різномодульного матеріалу, а також співвідношення між ефективними характеристиками композиту у площині ізотропії, які отримані у розділі 3.

На основі виконаного дослідження сформульовано висновки за дисертаційною роботою.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у такому: вперше запропоновано підхід до гомогенізації різномодульного трансверсально-ізотропного композиту, що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження переміщень представницького елемента композиту та його складових; на основі розв'язання задачі про поздовжній розтяг-стиск представницького елемента композиту та його складових отримано аналітичний вираз для ефективного поздовжнього модуля пружності різномодульного трансверсально-ізотропного волокнистого композиту; на основі розв'язання задачі про поперечний розтяг-стиск представницького елемента композиту та його складових отримано аналітичний вираз для ефективного поперечного модуля пружності різномодульного трансверсально-ізотропного композиту; на основі розв'язання задачі про

поперечний зсув представницького елемента композиту та його складових отримано ефективний модуль зсуву у площині ізотропії композиту та коефіцієнт Пуассона для цієї площини; побудовано залежності знайдених ефективних пружних сталих різномодульного композиту від відносної об'ємної частки волокна у матеріалі композиту.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості застосування отриманих ефективних пружних сталих для різномодульних композитів при розрахунках компонентів напружено-деформованого стану конструкційних елементів, виготовлених з таких матеріалів. Запропонована у дисертаційному дослідженні методика гомогенізації трансверсально-ізотропного композиту у порівнянні з іншими існуючими методиками розв'язання цієї задачі дозволяє враховувати наявність відмінностей у механічних характеристиках композиційного матеріалу при поздовжньому розтягненні та стиску, при розрахунках конструкційних елементів, виготовлених з композитів, на міцність та дослідженні їх реакції на дію різноманітних статичних та динамічних навантажень. Це дозволить вдосконалити процес проектування конструкцій, у яких використовуються трансверсально-ізотропні композитні матеріали.

КОМПОЗИТ, МАТРИЦЯ, ВОЛОКНО, РІЗНОМОДУЛЬНИЙ
МАТЕРІАЛ, ЕФЕКТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ, ГОМОГЕНІЗАЦІЯ,
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ МАТЕРІАЛ, РОЗТЯГ, СТИСК,
МОДУЛЬ ПРУЖНОСТІ, КОЕФІЦІЄНТ ПУАССОНА

ABSTRACT

Smoliankova T.M. Mathematical modeling of the mechanical characteristics of a fibrous composites with multi-modular components. – Qualification scientific work, manuscript.

Ph.D. thesis in specialty 113 – Applied Mathematics. – Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, 2021.

In this thesis, I determined the effective mechanical characteristics of the multi-modular elastic fibrous composite material at stretching and compression. I designated the effective technical characteristics of these composites – longitudinal and transverse modulus of elasticity and Poisson coefficients. So I used the kinematic conditions of displacements for points of the homogenized composite and its components such as matrix and fiber at their common deformation.

The main part of the thesis consists of an introduction, four sections, and conclusions.

In the introduction, I proved my choice of thesis theme, clearly defined the main aim and tasks, determined the methods of researches, scientific novelty, and practical value of outcome measures. I described the personal role in the researches made in the co-authorship includes. Also I submitted the data of approbation the outcome measures.

In the first section of the scientific research paper, I explored the current situation and main approaches in solving the problem of the homogenization of the multi-modular composites. To define the entity of the following problem I considered the basic mechanical characteristics of composites. It requires a definition in the process of homogenization. I expounded the essence of the experimental approach and the mathematical modeling for finding the effective mechanical characteristics of the fibrous composites. I also reviewed the best-known researches in these areas. I noted that there were several methodological approaches in exploring multi-modular materials. So I provided the short characteristics of the main publications within each of the approaches.

In this section, I also defined the theoretical grounds of the thesis as the main formula between tensions and deformations. These formulas are formulated for the isotropic material according to the classic theory of elastic materials. It was suggested by the Ambartsumyan and distributed for the case of the multi-modular transversally-isotropic material. While, it was assumed the hypothesis about the stability of the shear module at stretching and compression.

In the second section, I determined the effective longitudinal modulus of elasticity and the Poisson coefficient of the multi-modular transversally-isotropic composite at stretching and compression. An elementary cell of a composite represents by a cylinder. It consists of a hollow cylinder as a matrix and a solid cylinder as a fiber. Firstly, I solved the problem of joint deformation of the components of a representative composite cell as a matrix and fiber to obtain the effective elastic constants. The radial displacements and tensions on a surface of contact of matrix and fiber thus are continuous. A similar problem of determining the components of the stress-strain state at longitudinal stretching and compression is solved in the case of homogeneous composite material. Effective elastic constants such as a longitudinal modulus of elasticity and the Poisson coefficient are determined from the equality of the axial deformation in the point of the elementary cell of a homogeneous composite, matrix and fiber. And it is also based on the equality of the axial displacements at the outer surface of matrix and elementary cell of homogeneous composite.

In the third section, I explored the homogenization of the multi-modular transversally-isotropic composite at transverse stretching-compression. Firstly I obtained the boundary problem of determining the components of the stress-strain state of matrix and fiber at given radial stress on an outer surface of the matrix. Nevertheless, radial displacements and tensions on an outer surface of matrix and fiber are continuous; the axial deformations of matrix and fiber are equal.

At the next stage, I solved the problem of finding the displacements, tensions and deformations for a homogeneous composite at the same boundary conditions.

The conditions for the alignment of displacements at the points in a homogeneous composite cell are the equality of axial displacements for the arbitrary point and the radial displacements at the outer surface of the matrix and homogeneous composite cell. Using these conditions for the alignment allowed us to obtain a formula between effective elastic constants in the plane of isotropy of a composite.

In the fourth section, I found the effective transverse shift module of elasticity and the Poisson coefficient in the plane of isotropy of a transversally-isotropic multi-modular composite. So I used the assumptions of equality of the shift module at stretching and compression of the multi-modular material; the ratio between effective characteristics of a composite in the plane of isotropy from the third section.

The conclusions were formulated based on the completed thesis.

The novelty of the outcome measures is as follows. Firstly, it was newly suggested the method of the homogenization of the multi-modular transversally-isotropic composite based on using the kinematic conditions of alignment of displacements of a representative composite element and its components. Secondly, I obtained the analytic expressions for the effective longitudinal modulus of elasticity of the multi-modular transversally-isotropic fibrous composite based on solving the problem of a longitudinal stretching-compression of a representative composite element and its components for the first time. Thirdly, it was newly determined the analytic expressions for the effective transverse module of elasticity of the multi-modular transversally-isotropic composite based on solving the problem of transverse stretching-compression of a representative composite element and its components. Fourthly, I was derived the effective transverse shift module in the plane of isotropy of a composite and the Poisson coefficient in this plane based on solving the problem of the transverse shift of a representative composite element and its components for the first time. Fifthly, it was newly plotted the formulas between found effective elastic constants of the multi-modular composite on the volumetric fiber content in a composite.

The practical value of the outcome measures aims at the possibility of applying the outcome effective elastic constants for the multi-modular composites for the math of components of the stress-strain state for the structural element made of these materials. Described methodology of the homogenization of the transversally-isotropic composite compared with other current methodology of the described problem allows taking into account the differences in mechanical characteristics of a composite materials at their longitudinal stretching and compression, while math the structural elements made of composites. The composite materials are put under pressure and analyze their reaction on different statistical and dynamical stresses. It will allow strengthening the process of engineering the structure made of transversally-isotropic composite material.

COMPOSITE, MATRIX, FIBER, MULTI-MODULAR MATERIAL,
EFFECTIVE CHARACTERISTICS, HOMOGENIZATION,
TRANSVERSALLY-ISOTROPIC MATERIAL, STRETCHING,
COMPRESSION, MODULUS OF ELASTICITY, POISSON COEFFICIENT

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**Праці, в яких опубліковано основні наукові результати**

1. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Смолянкова Т.М. (2016). Визначення ефективного модуля зсуву односпрямованого композиту при нормальному розподілі радіуса волокна. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 127-135.
2. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O., Smoliankova T. (2018). Effective Characteristics of the Viscoelastic Fiber-reinforced Composite with Transversally Isotropic Components under Transverse Shear. *Mechanika 2018. Proceedings of the 23th international scientific conference*. Kaunas University of Technology, Lithuania, 31- 35.
3. Grebenyuk S., Klymenko M., Smoliankova T., Koval R. (2019). Effective Characteristics of the Multi-Modular Composites under Transverse Stretching. *Trans Tech Publication Ltd*, 968, 511-518.
4. Grebenyuk S., Smoliankova T., Klymenko M., Kudin O. (2020). The homogenization of multi-modular composites at their longitudinal deformation. *Eastern European Journal of enterprise technologies*, 3/7 (105), 13-19.
5. Grebenyuk S.M., Smoliankova T.M., Klymenko M.I. (2020). Model of homogenization of the multi-modular transtropic fibrous composite. *Вісник Запорізького національного університету. Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя: Видавничий дім «Гельветика», 2, 5-10.

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

6. Смолянкова Т.М. (2018). Определение эффективных технических постоянных при растяжение-сжатии разномодульного композита. *Тези доповідей XIII Міжнародної наукової конференції для молодих вчених «Сучасні проблеми математики» та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях*. Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна, 56-57.
7. Смолянкова Т.М., Клименко М.І. (2018). Визначення модуля пружності при розтягу-стиску різномодульного композиту. *Збірка тез доповідей Дев'ятої Всеукраїнської, шістнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики»*, 132-133.
8. Смолянкова Т.М. (2019). Аналітичне обчислення ефективних характеристик різномодульного композиту. *Збірка тез доповідей «Сучасні проблеми машинобудування» конференція молодих вчених та спеціалістів*. Інститут проблем машинобудування ім. А.Н. Підгорного, Харків, 10-11.
9. Смолянкова Т.М., Клименко М.І. (2020). Гомогенізація різномодульних трансверсально-ізотропних волокнистих композитів. *Збірка тез доповідей Одинадцятої Всеукраїнської, вісімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики»*, 132-133.
10. Смолянкова Т.Н. Гребенюк С.Н. Клименко М.И. Коваль Р.А. (2019). Эффективные характеристики разномодульных композитов при поперечном растяжении. *Тези доповідей VI Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки»*, Одеська державна академія будівництва та архітектури, 263-267.

ЗМІСТ

ВСТУП	14
РОЗДІЛ 1. СУТНІСТЬ ТА ОСНОВНІ АСПЕКТИ ПРОБЛЕМИ ГОМОГЕНІЗАЦІЇ РІЗНОМОДУЛЬНИХ КОМПОЗИТІВ	21
1.1 Основні механічні характеристики композиційних матеріалів	21
1.2 Задача гомогенізації композитів	25
1.3 Основні гіпотези та рівняння різномодульної теорії пружності	41
Висновки за розділом 1	54
РОЗДІЛ 2. ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО РІЗНОМОДУЛЬНОГО КОМПОЗИТУ В УМОВАХ ПОЗДОВЖНЬОГО РОЗТЯГУ ТА СТИСКУ	56
2.1 Постановка задачі	56
2.2 Сумісне деформування компонентів представницької комірки композиту	58
2.3 Визначення ефективного поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона однорідного композиту	69
Висновки за розділом 2	76
РОЗДІЛ 3. ГОМОГЕНІЗАЦІЯ РІЗНОМОДУЛЬНОГО КОМПОЗИТУ В УМОВАХ ПОПЕРЕЧНОГО РОЗТЯГУ ТА СТИСКУ	78
3.1 Постановка задачі	78
3.2 Напружено-деформований стан елементів композиту в умовах поперечного розтягу	79
3.3 Гомогенізація трансверсально-ізотропного композиту	85
Висновки за розділом 3	90
РОЗДІЛ 4. ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ПРУЖНИХ СТАЛИХ РІЗНОМОДУЛЬНОГО КОМПОЗИТУ У ПЛОЩИНІ ІЗОТРОПІЇ	92
4.1 Постановка задачі	92
4.2. Задача про крутіння циліндричної системи «матриця-волокно»	94

	13
4.3 Визначення ефективного поперечного модуля зсуву	97
4.4. Визначення пружних коефіцієнтів E_2 та ν_{23} у площині ізотропії для розтягу та стиску	98
Висновки за розділом 4.....	104
ВИСНОВКИ	105
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	107
ДОДАТКИ	125

ВСТУП

Перспективним напрямом вдосконалення конструкцій у машинобудуванні та будівництві є використання для їх виготовлення композитів, що дає змогу мінімізувати матеріальні витрати, а у багатьох випадках поліпшити експлуатаційні характеристики. Застосування композиційних матеріалів дозволяє проектувати матеріали з заданими властивостями, а саме міцністю, жорсткістю, антикорозійною стійкістю тощо. Наявність таких властивостей пов'язана з структурою композиту та властивостями його складових. Тому задача гомогенізації композитів, тобто задача знаходження їх механічних характеристик за аналогічними характеристиками їх складових елементів є однією з актуальних задач сучасної прикладної математики та механіки.

Дослідженнями властивостей композитних матеріалів, у тому числі визначенням їх механічних характеристик займалися відомі вітчизняні та зарубіжні вчені-механіки – Гузь О.М., Хорошун Л.П., Карпінос Д.М., Победря Б.Є., Шикуча Є.Н., Ванін Г.А., Гайдачук В.Є., Карпов Я.С., Дзюба А.П., Крістенсен Р., Сметанкіна Н.В., Назаренко Л.В., Камінський А.О., Селіванов М.Ф., Киричевський В.В., Гребенюк С.М., Клименко М.І., Васильєв В.В., Класторни М., Кондерла Р., Куїмова О.В., Труфанов М.А., Кучер М.К., Заразовський М.М., Плуме Е.З., Маслов Б.П., Нарусберг В.Л., Тетерс Г.А., Новиков В.У., Дирда В.І., Рікардс Р.Б., Фільштинський Л.А., Tang T., Yu W., Tenek L. T., Argyris J., Zeng T., Wu L., -Ramos R., López-Realpozo J.C., Patel H. P., Kennedy R. H., Kwon Y. W., Allen D. H., Talreja R., Gosz M., Moran B., Achenbach J. D., Mukhopadhyay M., Klusemann B., Svendsen B., Yao Y., Chen S., Chen P, Würkner M., Berger H., Gabbert U., Willoughby N. та інші.

Композиційні матеріали, що застосовуються на практиці, у багатьох випадках являють собою систему шарів, що складаються з розташованих у одному напрямі волокон, поєднаних між собою матеріалом матриці.

Експериментально доведено, що такі композити проявляють трансверсально-ізотропні властивості, причому для значної частини з них відзначається наявність різномодульності. Дослідження їхніх механічних характеристик свідчить про їх залежність від характеру деформування матеріалу. Для багатьох таких матеріалів при розтягу та стиску спостерігаються значні відмінності у значеннях пружних констант, що характеризують зв'язок між напруженнями та деформаціями. Такі матеріали називають різномодульними (бімодульними). Задачі механіки різномодульних матеріалів досліджуються у працях таких вчених, як Амбарцумян С.А., Цвелодуб І.Ю., Ломакін Є.В., Золочевський А.А., Пахомов Б.М., Работнов Ю.М., Єршова А.Ю., Головін М.М., Кувиркін Г.М., Комков К.Ф., Бессонов Д.Є., Зезін Ю.Л., Мясніков В.П., Олейніков О.І., Саркісян М.С., Хачатрян А.А., Шапіро Г.С., Матченко М.М., Толоконников Л.А., Амеліна Є.В., Голушко С.К., Бабич Д.В., Каюмов Р.А., Поймушин В.І., Міщенко А.В., Бабешко М.Є., Шевченко Ю.М., Вержбовський Г.Б., Белубекян М.В., Дудко О.В., Jones R.M., Reddy J.N., Bert C.W., Hsu Y.S., Ramana Murthy P.V., Rao K.P., Nelson D.A.R., Bhushan A., Panda S.K., Nassef A.S.E., Dahim M.A. та інші.

Сутність задачі гомогенізації різномодульного композиту полягає у визначенні його пружних характеристик як однорідного матеріалу за відомими характеристиками його складових – матриці та волокна. Ця задача розв'язується окремо для випадків розтягу та стиску. На сьогодні основним способом визначення ефективних характеристик різномодульних матеріалів є побудова емпіричних формул на основі статистичної обробки експериментальних даних, що потребує значних витрат. Уникнути їх можна шляхом побудови адекватних математичних моделей, що встановлюють зв'язок між пружними сталими гомогенізованого композиту і відповідними характеристиками матриці та волокна. У зв'язку з цим важливою для практики є задача гомогенізації різномодульних трансверсально-ізотропних волокнистих композитів, що обумовлює **актуальність** даного дисертаційного дослідження.

Розв'язання цієї задачі передбачає визначення ефективних механічних характеристик композиту (ефективних пружних сталей), що дозволяє при розрахунках напружено-деформованого стану елементів будівельних конструкцій, окремих деталей машин та механізмів розглядати його як однорідний матеріал.

У даному дисертаційному дослідженні пропонується математична модель гомогенізації, що дозволяє визначити ефективні механічні сталі для різномодульного трансверсально-ізотропного односпрямованого волокнистого композиту при поздовжньому розтязі та стиску. Розглядається композитний матеріал з ізотропними різномодульними матрицею та волокном. Запропонована модель гомогенізації дозволяє визначити ефективні значення поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона при поздовжніх деформаціях композиту. Також побудовані аналогічні моделі для випадку поперечного деформування та поперечного зсуву. Різнномодульність матеріалів враховується шляхом застосування відповідних моделей ізотропного та трансверсально-ізотропного матеріалів.

Дисертація виконана згідно з планом наукових досліджень, що здійснювалися на математичному факультеті Запорізького національного університету за держбюджетною темою «Математичне та програмне забезпечення автоматизованого проектування аерокосмічної техніки» № ДР 0118U00210 (2018-2020 рр.).

Метою даного дисертаційного дослідження є отримання аналітичних залежностей ефективних пружних сталей різномодульного волокнистого композиту від аналогічних показників для його складових – матриці та волокна, а також об'ємної частки волокна у композиті.

Досягнення сформульованої мети дисертації передбачає вирішення наступних **завдань**:

- аналіз існуючих концепцій дослідження механічних характеристик різномодульних композиційних матеріалів;

- розробка методики гомогенізації різномодульного трансверсально-ізотропного волокнистого композиту на основі кінематичних умов узгодження переміщень точок представницького елемента композиту та його окремих складових для різних типів його деформування;
- розв’язання задачі гомогенізації різномодульного композиту в умовах поздовжнього розтягу-стиску;
- розв’язання задачі гомогенізації для випадку поперечного розтягу-стиску;
- розв’язання задачі гомогенізації в умовах крутіння;
- визначення ефективних механічних характеристик різномодульного трансверсально-ізотропного композиту у площині його ізоотропії.

Об’єктом дослідження у роботі є процеси деформування різномодульного волокнистого композиційного матеріалу.

Предмет дослідження – ефективні пружні сталі різномодульного композиту.

Методи дослідження – аналітичні методи розв’язування крайових задач механіки деформівного твердого тіла.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у тому, що:

- запропоновано підхід до гомогенізації різномодульного трансверсально-ізотропного композиту, що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження переміщень представницького елемента композиту та його складових;
- на основі розв’язання задачі про поздовжній розтяг-стиск представницького елемента композиту та його складових отримано аналітичний вираз для ефективного поздовжнього модуля пружності різномодульного трансверсально-ізотропного волокнистого композиту;

- на основі розв’язання задачі про поперечний розтяг-стиск представницького елемента композиту та його складових отримано співвідношення між ефективними значеннями поперечного модуля пружності та коефіцієнта Пуассона у площині ізотропії;
- на основі розв’язання задачі про крутіння представницького елемента композиту та його складових отримано ефективний модуль зсуву у площині ізотропії композиту та коефіцієнт Пуассона для цієї площини;
- побудовано залежності знайдених ефективних пружних сталей різномодульного композиту від відносної об’ємної частки волокна у матеріалі композиту.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості застосування отриманих ефективних пружних сталей для різномодульних композитів при розрахунках компонентів напружено-деформованого стану конструкційних елементів, виготовлених з таких матеріалів. Запропонована у дисертаційному дослідженні методика гомогенізації трансверсально-ізотропного композиту у порівнянні з іншими існуючими методиками розв’язання цієї задачі дозволяє враховувати наявність відмінностей у механічних характеристиках композиційного матеріалу при поздовжньому розтягненні та стиску, при розрахунках конструкційних елементів, виготовлених з композитів, на міцність та дослідженні їх реакції на дію різноманітних статичних та динамічних навантажень. Це дозволить вдосконалити процес проектування конструкцій, у яких використовуються трансверсально-ізотропні композитні матеріали.

Результати дисертаційного дослідження використовуються у навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних робіт магістрів освітньо-професійної програми «Математика» та при вивченні студентами освітньо-професійної програми «Математика» дисципліни «Механіка деформівного твердого тіла».

Достовірність наукових результатів, отриманих у дисертаційній роботі, забезпечується несуперечливістю вихідних положень, узгодженістю їх з основними законами механіки деформівного твердого тіла і відомими аналітичними розв'язками для композитних матеріалів, характер деформації яких при розтягу та стиску не відрізняється між собою.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано п'ять статей, три з яких – у вітчизняних та дві – у зарубіжних фахових виданнях, з них дві – у виданнях, індексованих у наукометричній базі Scopus. Крім того, 5 тез доповідей опубліковано у збірниках праць наукових конференцій, що засвідчують апробацію результатів дисертації.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові результати дисертації отримані автором самостійно. У статтях, опублікованих у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у такому:

- у [1, 2] виконано огляд наукових досліджень проблеми гомогенізації композитів;
- у [3] отримано формули для співвідношень між ефективними пружними сталими композиту у площині ізотропії для розтягу та стиску, а також розв'язано чисельний приклад;
- у [4] отримано формули для ефективних характеристик – поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона, за якими виконано розрахунки у чисельному прикладі;
- у [5] отримано формули для ефективних пружних сталих у площині ізотропії композиту при розтязі та стиску.

Апробація результатів дисертації. За основними результатами дисертації було зроблено доповіді на XII Міжнародній науковій конференції для молодих вчених «Сучасні проблеми математики» та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях, Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна; IX Всеукраїнській шістнадцятій регіональній науковій конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики», 26-27 квітня 2018, Запорізький

національний університет; VI Міжнародній науково-практичній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», 20-24 травня 2019, Одеська державна академія будівництва і архітектури; VII Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», 23-26 травня 2019, Запорізький національний університет; VIII Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», 23-26 травня 2020, Запорізький національний університет.

Дисертація у цілому розглядалася на науковому семінарі «Актуальні проблеми прикладної математики та механіки» Запорізького національного університету під керівництвом д.т.н., професора Грищака В.З. та на розширеному засіданні кафедри фундаментальної математики Запорізького національного університету.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (155 джерел), 7 рисунків, 2 таблиці, 3 додатки. Загальний обсяг дисертації становить 133 сторінки.

РОЗДІЛ 1. СУТНІСТЬ ТА ОСНОВНІ АСПЕКТИ ПРОБЛЕМИ ГОМОГЕНІЗАЦІЇ РІЗНОМОДУЛЬНИХ КОМПОЗИТІВ

1. 1 Основні механічні характеристики композиційних матеріалів

Композиційними матеріалами, або композитами, називають матеріали, що характеризуються наявністю наступних ознак: не зустрічаються у природі; складаються з двох та більше компонентів, відмінних за фізико-механічними характеристиками та розділених вираженою межею; мають нові властивості порівняно із властивостями складових компонентів; є неоднорідними в мікромасштабі й однорідними в макромасштабі; склад, форма та розподіл їх компонентів є визначеними заздалегідь; їх властивості визначаються кожним із компонентів, котрі повинні бути у матеріалі в достатньо великих кількостях [6].

Складову композиту, неперервну у всьому об'ємі композиційного матеріалу, називають матрицею, а складову, роз'єднану у об'ємі композиції, – арматурою або армуючим елементом. Волокна використовують як арматуру композитів. Вони повинні мати невелику щільність, високу міцність у всьому інтервалі робочих температур та характеризуватися технологічністю, мінімальною розчинністю в матриці, високою хімічною стійкістю, відсутністю фазових перетворень в зоні робочих температур та бути нетоксичними при виготовленні та експлуатації. Для армування використовують металевий дріт, неорганічні та органічні волокна.

Розрізняють ізотропні та анізотропні композити. Перші мають однакові властивості за всіма напрямками, другі залежать від напрямку. До ізотропних композитів відносять дисперсно-зміцнені сплави, псевдосплави та хаотично армовані матеріали, до анізотропних композитів – матеріали, у яких волокна орієнтовані у певних напрямках. У деяких випадках хаотично армовані композити зміцнюються короткими (дискретними) частинками голчастої форми (відрізками волокон), орієнтованими в просторі випадковим чином.

При цьому отримуємо матеріал, що за своїми властивостями є квазіізотропним, тобто анізотропним в мікрооб'ємах, але ізотропним в об'ємі всього виробу.

Анізотропію композитів, спроектовану заздалегідь з метою застосування для виготовлення певних конструкцій, називають конструкційною. Існує технологічна анізотропія, що виникає при пластичній деформації ізотропних матеріалів, та фізична, притаманна кристалам та пов'язана з особливостями будови їхньої кристалічної решітки. Зазвичай в техніці використовуються анізотропні композиційні матеріали з певною симетрією властивостей.

Ортотропні (ортогонально анізотропні) матеріали характеризуються наявністю у кожному елементарному об'ємі трьох взаємно перпендикулярних площин симетрії для властивостей цих матеріалів. До таких матеріалів відносяться композити, армовані послідовно шарами волокон в двох взаємно перпендикулярних напрямках та тканинами з поздовжньо-поперечним укладанням, а також шаруваті композиційні матеріали, армовані в двох не ортогональних напрямках x'_1 та x'_2 з правильним чергуванням шарів. В останньому випадку площиною симетрії є серединна площина листа та дві площини, що перпендикулярні до неї та проходять через бісектриси кутів, утворених осями x'_1 та x'_2 .

В цілому композит можна представити як матеріал з анізотропними властивостями. Зв'язок між напруженнями та деформаціями для анізотропного матеріалу описується узагальненим законом Гука [7]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.1)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень, ε_{kl} – компоненти тензора деформацій, C_{ijkl} – компоненти тензора пружних сталей.

Таким чином, для описання пружних властивостей композиційного матеріалу необхідно знати 81 компоненту тензора C_{ijkl} . Різних компонент для анізотропного матеріалу залишається всього 21 [7], якщо врахувати, що коефіцієнти тензора пружних сталей мають симетрію відносно індексів i, j, k, l :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{jilk}. \quad (1.2)$$

Волокнистий композиційний матеріал являє собою односпрямований армований шар. Його можна розглядати як ортотропне середовище, що визначається 9 незалежними пружними сталими.

Для ортотропного матеріалу закон Гука запишеться у такому вигляді [7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33}, \\ \varepsilon_{23} &= a_{44}\sigma_{23}, \\ \varepsilon_{13} &= a_{55}\sigma_{13}, \\ \varepsilon_{12} &= a_{66}\sigma_{12}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де a_{ij} – компоненти тензора податливості.

Якщо перейти від компонентів тензора податливості до технічних сталей, то рівняння (1.3) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_{33}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}, \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23}, \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13}, \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}, \\
\frac{\nu_{21}}{E_2} &= \frac{\nu_{12}}{E_1}, \\
\frac{\nu_{31}}{E_3} &= \frac{\nu_{13}}{E_1}, \\
\frac{\nu_{32}}{E_3} &= \frac{\nu_{23}}{E_2},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

де E_1, E_2, E_3 – модулі пружності в напрямі осей x_1, x_2, x_3 ; G_{23}, G_{13}, G_{12} – модулі зсуву в площинах x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2 ; ν_{ij} $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$) – коефіцієнти Пуассона, котрі характеризують поперечне стискання при розтягненні в напрямі осей координат (визначають скорочення в напрямі осі x_j (другий індекс) при розтягненні вздовж осі x_i (перший індекс)).

Модуль пружності першого роду E_1 , що характеризує деформування композиту у напрямі x_1 осі волокна називають поздовжнім модулем пружності, а E_2, E_3 – поперечними модулями пружності, аналогічно модулі G_{13}, G_{12} називають модулями поздовжнього зсуву, G_{23} – модулем поперечного зсуву.

Якщо припустити, що частота армування волокнами достатньо велика, то армований шар можна вважати трансверсально-ізотропним із площиною ізотропії x_2Ox_3 . Тоді співвідношення (1.4) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} (\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\
\varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} (\sigma_{22} - \nu_{23} \sigma_{33}), \\
\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} (-\nu_{23} \sigma_{22} + \sigma_{33}), \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23}, \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13}, \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}, \\
\nu_{21} &= \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}, \\
G_{13} &= G_{12}, \\
\nu_{23} &= \frac{E_2}{2G_{23}} - 1.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Таким чином, для визначення пружних характеристик трансверсально-ізотропного композиту необхідно знайти 5 незалежних пружних констант (технічних сталих) – величин E_1 , E_2 , G_{12} , G_{23} , ν_{12} .

1.2 Задача гомогенізації композитів

Визначення компонентів напружено-деформованого стану композитного матеріалу вимагає побудови математичних моделей, що враховували б механічні та геометричні властивості структурних елементів композиту, їх розташування та взаємодію. Оскільки частота армування з'єднувального матеріалу композиту волокнами є досить великою, це приводить до необхідності розв'язання великих систем диференціальних

рівнянь, що недоцільно для практичного застосування. На практиці зручним є підхід, що полягає у попередньому визначенні механічних характеристик композиту як однорідного матеріалу, тобто у гомогенізації композиту. При цьому він подається у вигляді однорідного анізотропного матеріалу, характеристики якого залежать від характеристик компонентів композита. Після цього для визначення компонентів напружено-деформованого стану композиту можна застосувати добре відомі математичні моделі, розроблені для однорідного анізотропного матеріалу.

На початковому етапі розвитку механіки композитних матеріалів для їх гомогенізації переважно застосовувався експериментальний підхід. Тут ефективні пружні сталі композиту визначалися шляхом експериментального дослідження достатньо великого представницького об'єму композиту. Використання експериментального підходу дозволяло враховувати зміну механічних характеристик складових елементів композиту при його виготовленні, що є суттєвою перевагою цього підходу. Основним недоліком тут є необхідність проведення великої кількості експериментів для досягнення прийнятної точності визначення пружних сталей гомогенізованого композиту, що пов'язано зі значними матеріальними втратами.

Альтернативний підхід до розв'язання задачі гомогенізації композиту полягає у розробці математичних моделей, що дозволяли б отримати ефективні характеристики композиту у вигляді функцій механічних характеристик його складових, а також їх об'ємних часток у матеріалі композиту. Основним недоліком тут є неможливість врахування змін фізико-механічних характеристик складових композиту у процесі його виготовлення.

Основними тенденціями при розв'язанні задачі гомогенізації композиційних матеріалів на сьогодні є врахування у розроблюваних математичних моделях особливих властивостей їх структурних елементів, а саме різних типів анізотропії, наявності в'язкопружних або пластичних

властивостей, врахування наявності температурного розширення, слабкої стисливості компонент композиту тощо. Сучасні математичні моделі гомогенізації передбачають також врахування особливостей сумісного деформування матриці та волокна, а саме умов контакту матриці та волокна стосовно волокнистих композитів, особливостей з'єднання цих структурних елементів, наявності перехідного шару між ними, врахування можливості дифузії матеріалів, наявності пошкоджень тощо.

У більшості випадків при практичному застосуванні таких моделей використовують наближені методи. При цьому використовуються як аналітичні (зокрема, асимптотичні), так і чисельні методи.

Для розв'язання задачі гомогенізації широкого застосування набули асимптотичні методи. Розглянемо найбільш відомі дослідження у цьому напрямку. Асимптотичний варіаційний метод гомогенізації композитних матеріалів розглянуто у дослідженнях [8-11]. Застосування варіаційного асимптотичного методу до моделювання ефективних термопружних характеристик та характеристик теплопровідності бінарного композита, а також композиту зі сферичними та циліндричними включеннями розглянуто у [8].

У [9] висвітлюються основні підходи до дослідження різноманітних властивостей композитів на основі варіаційного асимптотичного методу. При цьому періодичність армування композиту розглядалася як малий параметр, що дало змогу сформулювати варіаційну модель елементарної комірки гомогенізації з використанням асимптотичного розвинення функціоналу енергії. Використання варіаційної моделі надало змогу застосування методу скінченних елементів, що дозволило отримати чисельні результати у вигляді локальних полів невідомих величин у межах елементарної комірки досліджуваного композиту. Ці результати дають змогу спрогнозувати напружено-деформований стан композиту.

У роботі [11] варіаційний асимптотичний метод застосовано для моделювання деформування елементарної комірки композиту, на основі чого

здійснено гомогенізацію волокнистого композиту, а також визначено поля напружень та деформацій на мікрорівні. У публікації [10] аналогічний підхід застосовано для визначення ефективних термопружних характеристик композиту. Використання варіаційної моделі у поєднанні з застосуванням методу скінченних елементів дозволило визначити ефективні термопружні характеристики композитного матеріалу зі сферичними включеннями, а також композиту з волокнами круглого та квадратного перерізу.

Гомогенізація композитів різної структури з метою визначення їх ефективних механічних характеристик розглянута у дослідженнях [12-15]. Зокрема, у [12] визначено ефективні характеристики волокнистого композиту з прямокутною структурою армування. У [13] асимптотичний підхід застосовано для гомогенізації композиту з трансверсально-ізотропними складовими та неідеальним контактом на межі поділу між матрицею та волокнами. При цьому розглянуто елементарну комірку з перерізом у формі паралелограма. Це дало змогу визначити ефективні пружні сталі для вказаного матеріалу.

У [14] здійснюється гомогенізація трифазного (включення, матриця, міжфазний шар) композиту. Для цього застосовано асимптотичний метод та метод скінченних елементів. Отримано чисельні результати для ефективних характеристик композиту з випадково розподіленими сферичними включеннями та матеріалу з випадково розподіленими односпрямованими волокнами. У дослідженні [15] для волокнистого композита з паралелограмовидною структурою армування за допомогою асимптотичного методу гомогенізації отримані формули для ефективних механічних характеристик композита з циліндричними включеннями круглої форми з різними фізико-механічними властивостями.

У публікаціях [16-18] розглянуто особливості застосування методу асимптотичного осереднення до гомогенізації волокнистого та тканинного композитів. У [18] розглянуто сутність методу асимптотичного осереднення (методу Бахвалова-Победрі) для задач теорії пружності, а також застосування

методу скінченних елементів для знаходження ефективних пружних характеристик композитів. Тут наводяться варіаційні формулювання задач теорії пружності на елементарній комірці композитного матеріалу, розглянуто приклади розв'язання задач теорії пружності на елементарній комірці для композитів з різними типами армування.

Подальшого розвитку застосування методу асимптотичного осереднення для гомогенізації композитів отримало у статті [17]. Тут наведено рекурентні послідовності локальних та осереднених задач теорії пружності на комірках періодичності різних структурних рівнів, а також наведено приклади скінченно-елементних розв'язків серії локальних задач для моделі дворівневої структури тканинного композиційного матеріалу. Метод асимптотичного осереднення періодичних структур розглянуто також у дослідженні [16]. Тут пропонується методика розрахунків на міцність тканинного композиту, для чого використано метод скінченних елементів.

Асимптотична гомогенізація композиту досліджується також у [19], де на її основі знайдені ефективні пружні сталі матеріалу, які у подальшому використані для аналізу хвильових процесів у волокнистому композитному матеріалі з волокнами круглого та еліптичного перерізів.

У багатьох випадках математичне моделювання фізико-механічних властивостей волокнистого композиту пов'язане з необхідністю інтегрування та дослідження диференціальних рівнянь з швидко осцилюючими коефіцієнтами [20, 21]. Застосування чисельних методів для розв'язання таких рівнянь пов'язане зі значними ускладненнями обчислювального характеру. Щоб їх уникнути, у цих дослідженнях пропонується використовувати пошук їх розв'язків у вигляді рядів за малим параметром. Подальше використання методу асимптотичного осереднення дозволяє звести дослідження до аналізу спрощених математичних моделей.

У роботі [22] також застосовується асимптотичний підхід до знаходження пружних та в'язкопружних характеристик волокнистого композиту на елементарній комірці. Як малий параметр при цьому

використано відношення максимального лінійного розміру комірки періодичності до лінійного розміру всього зразка. Це дало змогу визначити гомогенізовані коефіцієнти теплопровідності, дифузії, електропровідності для волокнистих та зернистих композитів.

Останнім часом широкого застосування набуло використання методів теорії ймовірності, математичної статистики та теорії випадкових процесів при розв'язанні задач гомогенізації композитів, що пов'язано з дослідженням композитів стохастичної структури. Теоретичні основи та особливості практичного застосування подібних методик викладено у монографії [23].

У дослідженні [24] також висвітлюються різноманітні ймовірнісні та статистичні підходи, що використовуються для розв'язання задач механіки композитів, зокрема, задач гомогенізації.

У роботі [25] визначено ефективний поперечний модуль пружності для трифазного композита з випадково розташованими односпрямованими круглими волокнами з урахуванням взаємодії між волокнами. Також визначено поперечний модуль пружності композита для нестисливої матриці та круглих жорстких волокон.

У дослідженні [26] на основі методу Монте-Карло пропонується стохастичний підхід до дослідження міжфазних явищ у волокнистих композитах. Зокрема, запропоновані методики були використані для моделювання процесу порушення зчеплення волокна та матриці.

Як правило, складність процесів взаємодії матриці та волокна приводить до складних математичних постановок задач, розв'язати які аналітичними методами не видається можливим. Тому використовують чисельні методи, такі як метод скінченних елементів, метод кінцевих різниць та інші.

У дослідженні [27] на основі сумісного застосування методу квазіконстантних операторів та методу скінченних елементів чисельно визначені ефективні термов'язкопружні характеристики (5 операторних величин) для односпрямованих армованих полімерних композитів за

властивостями компонентів. Для опису в'язкопружних властивостей армований композит подавався у вигляді однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу із механічними характеристиками у вигляді різницевих інтегральних операторів. Значення пружних сталих знаходились із розв'язання крайової задачі термов'язкопружності на комірці періодичності. Тут досліджено також вплив об'ємної релаксації зв'язувального матеріалу на властивості односпрямованого композита. Результати розрахунку пружних характеристик порівнювалися з результатами експерименту для композита з ізотропною матрицею та трансверсально-ізотропним волокном.

Для визначення в'язкопружних сталих волокнистого композиційного матеріалу в поперечному щодо волокна напрямі у статті [28] запропонована лінійна в'язкопружна модель поверхні розділу волокна та матриці. За допомогою гомогенізації для елементарної комірки методом скінченних елементів тут досліджені в'язкопружні властивості волокнистого композита.

У роботі [29] знайдено ефективні пружні характеристики волокнистого композиту з використанням моделі стохастичних процесів старіння. За допомогою методу скінченних елементів досліджено процеси старіння композита зі скляними волокнами та епоксидною матрицею.

У дослідженнях [30, 31] за допомогою методів гомогенізації та подальшого застосування методу скінченних елементів отримано низку механічних характеристик для композиційного матеріалу. Так, у публікації [31] з використанням представницького об'ємного елемента та методу гомогенізації були сформульовані крайові задачі для п'єзоелектричних волокнистих композитів із квадратним та гексагональним розташуванням волокон круглого перетину. На основі методу скінченних елементів отримані чисельні результати для ефективних пружних та діелектричних характеристик композиційного матеріалу.

У статті [30] метод гомогенізації на основі представницького об'ємного елемента використовувався для визначення ефективних пружних та

діелектричних характеристик композита. На основі методу скінченних елементів отримані чисельні результати для п'єзоелектричних волокнистих композитів із квадратним та гексагональним розташуванням волокон круглого та квадратного перетину.

У дослідженні [32] на основі експериментальних методів проаналізовано міжфазну взаємодію на межі полімерної матриці й волокна. Різні механічні параметри міжфазної взаємодії матриці та волокна чисельно досліджені за допомогою методу скінченних елементів.

Робота [33] містить розв'язання задач гомогенізації композитів із різною формою й розмірами включень (циліндричні волокна, сферичні та еліптичні частинки, циліндричні волокна з напівсферичними кінцями). Для цього використана методика, що ґрунтується на гомогенізації вихідного композиційного матеріалу. При цьому вплив об'ємної частки, форми та розмірів включень визначався шляхом дослідження тривимірного представницького об'ємного елемента з використанням методу скінченних елементів.

У дослідженні [34] розглянуто дві модифікації класичних методів гомогенізації матричних композитів із включеннями – так званий прямий метод та ефективну самоузгоджувальну схему. Проаналізовано їх ефективність у порівнянні з іншими підходами до гомогенізації таких композитів. У [35] за допомогою модифікації методу скінченних елементів визначено ефективні пружні характеристики просторових плетених композитів, у тому числі при наявності тріщин.

У [36] представлена математична модель композиційного матеріалу з урахуванням міжфазного шару між матрицею та волокном. За допомогою методу скінченних елементів визначаються ефективні пружні сталі матеріалу при наявності міжфазного шару.

У роботі [37] викладено результати дослідження гомогенізації односпрямованого композиту з ромбічним вкладанням волокон. При цьому було здійснено скінченно-елементний аналіз деформування елементарної

комірки. У [38] здійснено гомогенізацію композиту з ромбічним вкладанням волокон, при цьому враховувалися особливості міжфазного контакту між матрицею та волокном. Тут також для вирішення задачі гомогенізації було застосовано метод скінченних елементів.

У статті [39] армований композитний матеріал із випадково розподіленими волокнами моделюється за допомогою представницького об'ємного елемента з періодичними граничними умовами. Ефективні пружні характеристики матеріалу знаходяться на основі методу асимптотичної гомогенізації за допомогою скінченно-елементних розв'язків.

У [40] на основі теорії еквівалентних включень Ешелбі, самоузгодженої моделі для коротких волокон, моделі Морі-Танака, граничної моделі, а також співвідношень Халпін-Цая досліджено мікромеханічну поведінку композитів, армованих прямими короткими волокнами. На основі зазначених моделей за допомогою методу скінченних елементів отримані ефективні пружні характеристики композита.

В роботі [41] побудовано тривимірну скінченно-елементну модель із використанням методу гомогенізації на комірці періодичності для визначення пружних характеристик волокнистого композита. Композиційний матеріал складається з двох різних волокнистих матеріалів (Т-300 та S-скла), один із яких має трансверсально-ізотропні властивості, та ізотропної полімерної матриці. Композит має гексагональну структуру армування, поперечні перетини волокон мають форму еліпсів різних ексцентриситетів, в тому числі круглу. Чисельні значення пружних сталих композита при різних значеннях об'ємного вмісту волокон отримані за допомогою програмного комплексу ANSYS, для поздовжнього модуля проведено порівняння з аналітичними значеннями, отриманими на основі правила сумішей.

У [42] запропоновано мікромеханічну модель односпрямованих волокнистих полімерних композитів з урахуванням наявності тріщини. За допомогою методу скінченних елементів досліджено процеси руйнування в тривимірній періодичній комірці для в'язкопружної матриці та пружного

волокна. У [43] за допомогою скінченно-елементного аналізу досліджено різноспрямований 4D армований вуглецевий композит. Враховувались порожнини, зміщення волокон та викривлення поперечних перетинів волокон, отримані методами рентгенівської томографії. На основі аналізу елементарної комірки за допомогою асимптотичної гомогенізації були отримані модулі пружності композиційного матеріалу.

Стаття [44] присвячена мікромеханічному аналізу композитів, армованих трансверсально-ізотропними волокнами з використанням тривимірному методу скінченних елементів, реалізованого в програмному комплексі ANSYS. За допомогою методів гомогенізації знайдені ефективні поздовжній та поперечний модулі пружності та коефіцієнт Пуассона.

Визначення макровластивостей односпрямованого волокнистого композита для фізично нелінійного матеріалу розглянуто у [45]. Розглядалась квадратна схема армування для волокон круглого перетину. Для знаходження п'яти механічних характеристик трансверсально-ізотропного композита методом скінченних елементів розв'язано три представницькі задачі при гармонічному навантаженні.

У статті [46] наведено чисельно-аналітичну модель для визначення пружних сталих волокнистого композита з перехідним шаром на межі «матриця»-«волокно». Перехідний шар представлявся у вигляді набору порожнистих циліндрів, кожен із яких має ізотропні властивості. Із розв'язання осесиметричних задач теорії пружності для отриманого складеного циліндра, що складається із суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнистих циліндрів, що моделюють перехідний шар, отримані пружні сталі ортотропного однорідного матеріалу, що моделює волокно та перехідний шар. Для прямокутної комірки композиційного матеріалу – «матриця»-«перехідний шар»-«волокно» – на основі методу кінцевих різниць побудовано систему розв'язувальних рівнянь для різних видів навантажень з урахуванням раніше знайдених пружних сталих системи «перехідний шар»-«волокно». Розв'язання даної системи дає чисельні

значення пружних сталих композиційного матеріалу з врахуванням міжфазного шару. Стаття [47] є розширенням роботи [46] як для односпрямованих волокнистих композитів, так і для дисперсно-наповнених, для котрих із використанням фрактального підходу отримані пружні характеристики перехідного шару в залежності від фрактальної розмірності.

У ході процедури визначення ефективних механічних характеристик також використовують інші, менш поширені методи – метод просторових характеристик, метод регулярних структур, метод орієнтаційного осереднення та інші.

Процес локального руйнування композиційного матеріалу, який обумовлений обривом одного з волокон, досліджено чисельно методом просторових характеристик у [48]. При цьому матеріал моделювався таким чином. Волокно, що обривається, вважалось пружним, об'єм матриці навколо нього вважався пружнов'язкопластичним, а весь масив композиційного матеріалу вважався трансверсально-ізотропним, однорідним.

У [49] на основі методу регулярних структур досліджується елементарна комірка волокнистого композита й знаходяться осереднені електричні та магнітні властивості композитів, армованих суцільними волокнами. Інтегральне рівняння, розв'язок якого дасть механічні характеристики композитного матеріалу із в'язкопружними матрицею та включенням, представлено у роботі [50].

У [51] визначено ефективні характеристики для шаруватих композитів та наведено методику отримання механічних характеристик для шаруватого середовища. У [52] розглянуто точні та наближенні співвідношення для ефективних пружних характеристик композита в залежності від параметрів армування.

У публікації [53] для трифазних (волокно, міжфазний шар, матриця) п'єзоелектричних композитів з двоякоперіодичною мікроструктурою запропоновано новий варіаційний функціонал для елементарної комірки періодичності шляхом включення у функціонал енергії періодичних

граничних умов. Для такого композиційного матеріалу знайдені деякі ефективні електропружні характеристики.

У [54] на основі трифазної моделі (волокно-проміжний шар-матриця) досліджено параметри напружено-деформованого стану композиційного матеріалу, армованого короткими волокнами. Отримано аналітичні розв'язки при лінійному та степеневому законі зміни модуля пружності в проміжному шарі, при цьому коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт теплового розширення в проміжному шарі вважаються сталими. Результати аналітичних розв'язків добре узгоджуються з чисельними результатами, отриманими методом скінченних елементів. В статті [55] побудовано математичну модель, що враховує шорсткість поверхні волокон при зчепленні з полімерною матрицею. Розглянуто вплив шорсткості поверхні волокон на напружено-деформований стан та ефективний модуль пружності волокнистого односпрямованого композита, армованого короткими циліндричними волокнами в шаховому порядку.

У роботі [56] за допомогою комплексних потенціалів та представлення їх рядами розв'язано задачу про макроскопічно однорідний напружено-деформований стан композитного матеріалу з анізотропними властивостями компонентів (площина, перпендикулярна до волокон, є площиною симетрії властивостей як матриці, так і волокна). Отримані співвідношення дозволяють визначати пружні характеристики композита, але при цьому необхідно розв'язувати нескінченну систему алгебраїчних рівнянь, що можливо в результаті обчислювального експерименту.

Основні положення та математичний апарат методу орієнтаційного осереднення на основі розкладання функцій у ряд Фур'є викладені у [57]. За мікромеханічними характеристиками отримано осереднені тензори деформацій та напружень, що характеризують пружні, в'язкопружні та пружнопластичні властивості композита при різних схемах армування волокнами.

У монографії [58] наведено низку постановок одно-, дво та тривимірних задач для отримання ефективних механічних характеристик пружних, в'язкопружних та пружно-пластичних волокнистих композитів. При розв'язках застосовуються як точні, де це можливо, так і наближені методи.

У дослідженнях[59-61] на основі застосування середнього арифметичного та середнього геометричного представлені розрахункові формули для визначення пружних сталих композита з еліптичними волокнами та наповнювачем. Результати розрахунку порівняно з експериментальними даними.

Експериментальні методи дослідження механічних характеристик волокнистих композитів представлені у низці робіт. Механіка текстильних та шаруватих композитів представлена в роботі [62]. Зокрема, наведені теоретичні та експериментальні характеристики пружних властивостей односпрямованих, текстильних та шаруватих композиційних матеріалів. У дослідженнях [63, 64] досліджуються можливості прогнозування механічних характеристик шаруватих композитів на основі механічних характеристик окремого моношару, у тому числі при впливі температурних факторів. Запропоновані підходи перевірено порівнянням із результатами експериментальних досліджень.

В роботі [65] проаналізовано застосування аналітичних (правило сумішей та підхід Халпіна-Цая) та експериментальних методів визначення пружних характеристик класу полімерних композитів, виготовлених із епоксидної матриці, армованої односпрямованими природними сизалевими та банановими волокнами з мікрочастинками кремнезему та малеїнового ангідриду.

У роботі [66] наведені наближені вирази для розрахунку модулів пружності односпрямованого гумокордного моношару через пружні сталі матеріалу корда та гуми та об'ємний вміст корда в композиті, при цьому враховувались особливості деформування складових (нестисливість гуми,

значні відмінності жорсткостей матеріалу корда й гуми та інше). Розглянуто вплив міжшарової зсувної деформації в проміжному гумовому шарі на напружено-деформований стан перехресно-армованої композитної полоси. За допомогою класичної теорії шаруватих пластин оцінюються характеристики жорсткості брекера та боковини шини.

Ефективні пружні характеристики односпрямованого гумокордного матеріалу визначаються за допомогою розв'язку елементарних задач для одиничного куба з одним армуючим кордом у ньому [67]. Для отримання аналітичних розв'язків зроблені такі припущення: матеріал матриці та волокна пружний та ізотропний, при дії поздовжнього навантаження поперечні напруження надзвичайно малі; при дії поперечного навантаження поперечні напруження в матриці та волокні однакові, а поперечні деформації в матриці та волокні – пропорційні їх об'ємній частці в композиті. Отримані характеристики верифіковані методом скінченних елементів для масиву гумокордного матеріалу. Найбільша різниця (до 60 %) спостерігається для поперечних модулів пружності, що пояснюється зробленими припущеннями.

Публікації [68-72] висвітлюють дослідження пружних характеристик гумокордного матеріалу та створення математичних моделей для дослідження напружено-деформованого стану конструкцій із гумокордних матеріалів. Так, експериментальне дослідження пружних характеристик текстильних кордів та визначення ефективних характеристик гумокордного матеріалу за відомими залежностями наведено в роботі [68]. Наведено підходи до визначення жорсткісних характеристик складених анізотропних гумокордних матеріалів, які використовуються у каркасах [69] та брекерах [70] пневматичних шин. Однак при визначенні ефективних пружних характеристик гумокордного матеріалу поздовжній та поперечний модулі пружності корду вважалися рівними, що не для всіх матеріалів справедливо і що, відповідно, обмежує застосування наведених співвідношень. Математичну модель рівноважної конфігурації профілю пневматичної шини у вигляді інтегрального рівняння представлено в роботі [71].

Деякі дотичні питання, пов'язані з механічними характеристиками волокнистих композитів розглядаються у наступних публікаціях. Аналітичні розв'язки задачі оптимізації структури намотки для тороїдальної оболонки при обмеженнях по стійкості представлені у дослідженні [73]. У роботі [74] розглядається алгоритм пошуку пружних сталих односпрямованого композитного шару за відомими пружними характеристиками багатошарового пакету, що складається із симетрично укладених шарів із односпрямованого композита.

У публікації [75] пропонується застосування чисельної методики до гомогенізації односпрямованого армованого композиту.

Задачі визначення механічних в'язкопружних характеристик односпрямованих композитів за відомими характеристиками матриці і волокна розглянуті у низці робіт. Зокрема, у [76-81] розглядаються проблеми прогнозування в'язкопружних властивостей композитів при наявності в'язкопружної матриці або в'язкопружного волокна, досліджено також випадок в'язкопружних властивостей обох фаз композиту.

У дослідженні [78] відзначається, що суттєві в'язкопружні властивості мають органічні волокна, тут виділено також типи волокон, в'язкопружністю яких можна знехтувати. Поздовжня повзучість композитів для в'язкопружного органічного волокна досліджена у [79]. У публікаціях [77, 80] матриця моделюється у вигляді ізотропного в'язкопружного матеріалу, при цьому досліджується її поздовжня деформація. У [81] розглянуто чисельне визначення ефективних термов'язкопружних характеристик односпрямованих полімерних композитів, для чого запропонований варіант метода квазіконстантних операторів з частинними апроксимаціями.

Задача визначення характеристик в'язкопружного деформування композитів з використанням теорії спадкової в'язкопружності Больцмана-Вольтерра розглянута у [82]. Тут запропонована методика визначення ефективних в'язкопружних характеристик композитів, основана на

апроксимації функції деформування ланцюгового дробу і застосуванні метода операторних ланцюгових дробів.

У статті [83] розглянуто оптимізацію моделювання в'язкопружних властивостей композитів з в'язкопружними компонентами. Використання інтегрального перетворення Лапласа-Карсона та методу операторних ланцюгових дробів дозволило запропонувати алгоритм зведення функцій, що описують в'язкопружні властивості окремих фаз композиту, до функцій одного класу. Для моделювання в'язкопружних властивостей застосовувалися функції Міттаг-Лефлера. Як приклад застосування запропонованої методики розглядається зведення функції в'язкопружності до одного класу у односпрямованому армованому композиті.

У публікаціях [84-88] розглядається розв'язання задачі гомогенізації в'язкопружного трансверсально-ізотропного волокнистого односпрямованого композиту.

На сьогодні наявна певна кількість робіт довідкового, а іноді більш навчального характеру, в яких узагальнено на час їх видання технологічні, механічні, фізичні, хімічні, конструкторські та інші аспекти виробництва й експлуатації композиційних матеріалів, у тому числі волокнистих. Ці роботи мають різну міру деталізації тих чи інших аспектів, однак, незважаючи на це, всі вони можуть бути використані в інженерній справі при розрахунку та проектуванні композиційних матеріалів та конструкцій із них. Зокрема, різні групи співвідношень для визначення ефективних механічних характеристик волокнистого композита зведено в довідниках [89-91] та інших.

Розв'язок задачі про гомогенізацію трансропного пружного волокнистого композиту наводиться у серії публікацій [92-96]. При цьому для визначення ефективних пружних сталих використовуються кінематичні умови узгодження переміщень однорідного композиту та його складових, а також енергетичний критерій. Ці дослідження узагальнені у монографії [97], де розглянуто також використання ефективних пружних сталих для гомогенізованого композиту при розв'язанні задач механіки композитів.

Аналогічні підходи до в'язкопружних транслопних волокнистих композитів пропонуються у монографії [98]. Тут використано також операційний метод, що дозволив ефективно розв'язувати інтегральні рівняння типу згортки.

Сучасні методи механіки композитів широко застосовуються при розрахунках складних неоднорідних конструкційних елементів. Прикладами подібних досліджень є роботи [99-103].

1.3 Основні гіпотези та рівняння різномодульної теорії пружності

Різнномодульна теорія пружності об'єднує гіпотези та моделі напружено-деформованого стану тіла, механічні характеристики якого при деформаціях розтягу та стиску відрізняються між собою [104].

Основи класичної різномодульної теорії пружності викладені у монографіях С.А. Амбарцумяна [104, 105]. Тут наведені основні припущення та рівняння для напружено-деформованого стану однорідних матеріалів з механічними характеристиками, що відрізняються між собою при розтягу та стиску. У дослідженні [106] отримані рівняння різномодульної теорії пружності, що ґрунтуються на припущенні про сталість модуля зсуву та залежність об'ємного модуля пружності від першого інваріанта тензора напружень. Тут розглянуто також проблему єдиності розв'язків різномодульної теорії пружності, а також їх стійкості. На основі запропонованого варіанту узагальненого закону Гука для різномодульного ізотропного середовища досліджено задачі теорії пружності для плоского напруженого стану та плоскої деформації. У дослідженнях [104-107] розглядається однорідний ізотропний різномодульний матеріал. У [107] пропонується математична модель різномодульного ізотропного середовища, що містить 3 незалежні пружні константи, причому модуль зсуву є інваріантним відносно виду деформування, а об'ємний модуль залежить від знаку першого інваріанту тензора напружень. Тут розглянуто також питання

стійкості та єдиності розв'язків деяких крайових задач різномодульної теорії пружності.

У [108] та [109] на основі експериментальних даних доводиться наявність властивості різномодульності у зернистих композитів. Зокрема, у дослідженні [109] наведені результати дослідження пружних властивостей зернистого композиту на основі ненасичених полієфірів. Тут отримані експериментальні значення модуля пружності першого роду та коефіцієнту Пуассона при розтязі та стиску. Наведені експериментальні дані підтвердили наявність у зернистих композитів суттєвої залежності пружних констант від виду напруженого стану. Для моделювання властивостей різномодульного матеріалу запропоновано узагальнення класичного пружного потенціалу. Побудовано пружні сталі композиту при розтязі та стиску.

У [110] пропонується математична модель ізотропного різномодульного тіла. Визначальні співвідношення узагальненого закону Гука для різномодульного ізотропного середовища пропонуються по аналогії з різномодульною теорією пружності С.А. Амбарцумяна [104, 105]. При цьому у моделі узагальненого середовища вирізняється жорсткість, з допомогою якої визначається наявність зв'язків між компонентами напружень та деформацій при різних напрямках деформування. Це дозволило усунути невизначеність при виборі коефіцієнтів рівнянь узагальненого закону Гука у випадку складного напруженого стану. Критерієм вибору відповідного типу рівнянь є знаки поздовжніх деформацій. Для уточнення параметрів запропонованої математичної моделі використовувалися експериментальні дані для графітів та зернистих композитів на основі ненасичених полієфірів.

Моделі різномодульного деформування анізотропних матеріалів наведено у дослідженнях [110, 111]. Тут для моделювання деформування різномодульних високонасичених полімерів використано тензорно-нелінійні співвідношення. У публікаціях [107-111] автори вважають, що визначальними характеристиками, що визначають характер напружено-деформованого стану різномодульного середовища є деформації, а не

напруження. Тут тип різномодульності визначається знаком поздовжньої деформації. На цьому ж допущенні ґрунтуються також результати, отримані у дослідженні задач механіки різномодульного суцільного середовища, виконаному у [112, 113].

У дослідженнях Є.В. Ломакіна та його учнів [109, 114-119] запропоновано модифікацію різномодульної теорії пружності, що ґрунтується на узагальненні пружного потенціалу, для ізотропного пружного тіла.

Згідно з теорією, запропонованою С.А. Амбарцумяном та іншими представниками вірменської школи механіки [104, 105, 120-122], компоненти тензора деформацій у головних напрямках подаються через компоненти тензора напружень, а тип деформації матеріалу (розтяг чи стиск) визначається за знаками головних напружень. Такий же підхід при розв'язанні задач механіки різномодульних матеріалів застосовано у дослідженнях [123, 124].

У статті [125] досліджуються механічні властивості різномодульного залізобетону. Зокрема, тут досліджується задача визначення стійкості залізобетонних колон з врахуванням різномодульності цього матеріалу. Для цього запропоновано визначальні диференціальні рівняння.

На сьогодні відомі декілька математичних моделей різномодульних ізотропних матеріалів. Їх можна використати при дослідженні трансропних композитів, оскільки їх можна використати для дослідження переміщень та напружень точок матеріалу у площині ізотропії. Крім [104], така модель запропонована у дослідженні [126]. Тут для математичного моделювання різномодульних матеріалів використовується функція різномодульності, параметри якої визначаються на основі математичної обробки результатів експериментів. У цьому дослідженні побудовані також співвідношення між напруженнями та деформаціями для різномодульного ізотропного середовища.

У відомих на сьогодні варіантах різномодульної теорії пружності ізотропного середовища розглядались моделі, де кількість незалежних пружних сталих змінювалась від 3 до 5. У останньому випадку незалежними вважаються модулі пружності при розтягу та стиску, відповідні коефіцієнти Пуассона, а також модуль зсуву, що є незмінним при розтязі та стиску. У деяких теоріях пружний потенціал модифікується таким чином, що, крім першого та другого інваріантів напружень, туди вводиться третій інваріант. Це призводить до тензорно-нелінійних зв'язків між напруженнями та деформаціями. У публікаціях [119, 127] пропонуються тензорно-лінійні визначальні рівняння, що ґрунтуються на використанні пружних потенціалів з трьома незалежними пружними сталими.

У роботі авторів [128] досліджується вплив різномодульності на характеристики руйнування зразків графіту. Публікація [129] містить огляд задач механіки різномодульних композитів, зокрема, балочних конструкцій, виготовлених з різномодульних композитних матеріалів, у тому числі розглядаються волокнисті композити.

У статті [130] наведено модель різномодульного ізотропного матеріалу. За складності запропонованих тут визначальних рівнянь для знаходження деформацій та напружень у конструктивних елементах, виготовлених з різномодульних матеріалів, використано метод скінченних елементів. Тут розглядаються плоскі задачі різномодульної теорії пружності.

Математичні моделі різномодульної теорії пружності для анізотропних матеріалів розглянуті у працях О.О. Золочевського [131-135]. Тут розглядаються побудови математичних моделей пружності та повзучості різномодульних анізотропних матеріалів. Розглянуто питання наявності єдиного розв'язку крайових задач для однозв'язних тіл, зокрема, оболонок, виготовлених з таких матеріалів, та на основі запропонованих моделей отримано їх розв'язки. Для цього було використано наближені та чисельні методи.

У дослідженнях [136-138] розглянуто різні типи нелінійних залежностей між напруженнями та деформаціями у різномодульних матеріалах, зокрема, проаналізовано такі залежності для різних марок графітів та вуглецево-вуглецевих композитів. У публікації [139] на основі застосування методу скінченних елементів досліджується моделювання багатошарових балок, виготовлених з анізотропних різномодульних матеріалів. У [140] розглянута задача про термічне деформування прямокутних пластин, виготовлених з різномодульних композитних матеріалів.

У дослідженні [141] пропонується комплексний підхід до побудови математичних моделей нелінійно-пружного деформування полімерів та вуглепластиків при згині, що враховує різний опір цих матеріалів при деформації розтягу та стиску. Тут запропоновано математичний апарат для аналізу та обробки великих масивів даних – результатів експериментів. На основі застосування методу найменших квадратів отримано аналітичні вирази для моделювання нелінійно-пружної поведінки різномодульних балок при триточковому згині. У роботі запропонований також чисельний алгоритм розв'язання крайових задач для балок, що були об'єктами дослідження.

У роботі [142] відзначено, що причиною різномодульності багатьох конструкційних матеріалів є наявність у них пошкоджень у вигляді мікротріщин. Тут отримані рівняння стану для таких матеріалів. Для цього було використано енергетичний метод. На основі цих рівнянь отримані формули для ефективних характеристик матеріалів за наявності розташованих випадковим чином мікротріщин.

У статті [143] на основі отриманих експериментальних даних запропоновано методики ідентифікації механічних характеристик волокнистих композитів за результатами їх випробувань на розтяг, стиск, згин. Розглянуто нелінійно-пружний матеріал. Для апроксимації співвідношень при розтягу та стиску використовувалася різномодульна залежність між напруженнями та деформаціями.

Слід відзначити велику кількість публікацій, що висвітлюють задачі визначення компонент напружено-деформованого стану конструкційних елементів у вигляді стрижнів, пластин та оболонок, виготовлених з різномодульних матеріалів. Робота [144] містить дослідження напруженого стану неоднорідних стрижнів змінного перерізу, виготовлених з різномодульних матеріалів. Тут отримані формули для розрахунку нормальних та дотичних напружень у цих конструкційних елементах з врахуванням наявності температурного поля. Досліджений також вплив рівня різномодульності на напруження у перерізі стрижня. У дослідженні [145] отримано інтегральні характеристики жорсткості багат шарових пластин за наявності жорсткого сполучення між шарами, при цьому враховувалась різномодульність окремих шарів пластини. У публікації [146] пропонується методика визначення компонент напружено-деформованого стану багат шарових оболонок, виготовлених з ізотропних та трансверсально-ізотропних різномодульних матеріалів. Тут розглядалося вісесиметричне пружно-пластичне деформування оболонки.

У [147] запропоновано методику оцінки несучої здатності елементів конструкцій, що згинаються. Розглянуто конструкційні елементи, виготовлені з полімерних композитних матеріалів. На основі чисельних експериментів оцінено вплив різномодульної матриці композиту на жорсткість елемента. Дослідження [148] містить аналіз деформування елемента будівельної конструкції – балки-стілки під дією стискаючого навантаження. Балка-стілка опирається на різномодульне середовище. У роботі [149] досліджено вплив різномодульності матеріалу при розтягу та стиску на результати розрахунку балочної конструкції. Тут побудовані нелінійні діаграми розтягу та стиску деревини, наведено аналітичні співвідношення для визначення зусиль та переміщень у конструкції, що була об'єктом дослідження.

У [150] пропонується методика побудови математичних моделей для дослідження розтягу та стиску реологічно складного середовища з

врахуванням його різномодульності. Розглянуто можливості узагальнення цих моделей для просторових задач механіки різномодульних матеріалів, а також проблематику ідентифікації у них механічних сталей.

У статті [151] розроблено математичну модель плити покриття з різномодульного композитного матеріалу, отримано формули для визначення переміщень та напружень у плиті для деформації згину. Наведено чисельний приклад розрахунку плити з різномодульного покриття. У [152] пропонується математична модель вісесиметричного поперечного згину кільцевої пластини, що знаходиться під дією поперечного рівномірно розподіленого навантаження. При цьому досліджувалась ортотропна різномодульна пластина.

Публікація [153] містить дослідження напружено-деформованого стану різномодульної ізотропної пластини, що знаходиться під дією нормального навантаження. Тут запропонована методика редукції просторової задачі теорії різномодульної пружності до плоскої задачі.

У дослідженні [154] розглянуто підхід до моделювання ізотропного різномодульного пружного середовища, що ґрунтується на використанні модифікації функції пружного потенціалу у визначальних рівняннях. Запропоновано варіанти моделей пружних матеріалів з різним типом опору для розтягу та стиску, а також зсуву у різних напрямках. Запропонований підхід застосовано до розв'язання динамічних задач теорії різномодульної пружності. У статті [155] наведено чисельне розв'язання задачі про згин балки, виготовленої з різномодульного матеріалу.

Теоретичним фундаментом даного дисертаційного дослідження є різномодульна теорія пружності, запропонована С.А. Амбарцумяном у класичних працях [104, 105]. Тут вважається, що для багатьох матеріалів механічні властивості матеріалу є різними в залежності від вигляду напруженого стану матеріалу, а саме значення модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона при розтязі та стиску відрізняються між собою, точніше, відрізняються між собою у залежності від знаків головних напружень. Для

ізотропного тіла ці коефіцієнти повністю визначають механічні властивості матеріалу.

Розглянемо чистий розтяг зразка різномодульного матеріалу у будь-якому напрямі. При такому деформуванні його модуль пружності першого роду дорівнює E_+ , а коефіцієнт Пуассона дорівнює ν_+ , відповідні значення технічних констант при чистому стиску позначимо E_- та ν_- . Коефіцієнт Пуассона ν_+ характеризує поперечний стиск зразка при його поздовжньому розтязі на одиницю довжини, ν_- – його поперечний розтяг при аналогічному поздовжньому стиску. При одночасному розтязі та стиску у різних напрямках відповідні модулі пружності та коефіцієнти Пуассона не змінюються [104]. Далі будемо вважати також, що для ізотропного матеріалу при одночасному розтязі по всім трьом головним напрямкам модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона відповідно дорівнюють E_+ та ν_+ , при стиску – E_- та ν_- .

У різномодульній теорії пружності основні співвідношення та рівняння класичної теорії пружності залишаються незмінними, зокрема, інваріантними є рівняння рівноваги, геометричні співвідношення (формули Коші), рівняння нерозривності деформацій [104]. Відмінності тут є лише у фізичних співвідношеннях теорії пружності, що пов'язують напруження та деформації, тобто у формулах прямого та оберненого законів Гука.

Згідно з класичною теорією пружності, у кожній точці тіла при заданому напруженому стані існують три взаємно перпендикулярні площини, на яких діють лише нормальні напруження, всі дотичні напруження дорівнюють нулю. Нормалі до цих площин називають головними осями тензора напружень, вони не залежать від початкового вибору системи координат. Формули перетворення компонент напруженого стану при переході від головної до вихідної системи координат наведені у [104].

У різномодульній теорії пружності С.А. Амбарцумяна визначальним при визначенні типу деформування (розтягу чи стиску) є знак головного напруження. Позначимо головні осі α, β, γ , відповідні головні напруження –

$\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma$. У залежності від комбінації знаків головних напружень отримують співвідношення між напруженнями та деформаціями різних типів. На практиці можна зустріти лише 4 типи комбінацій знаків головних напружень.

1. Всі головні напруження у точці області, що досліджується, є розтягуючими, тобто $\sigma_\alpha > 0, \sigma_\beta > 0, \sigma_\gamma > 0$.
2. Всі головні напруження у точці області є стискуючими, тобто тут маємо $\sigma_\alpha < 0, \sigma_\beta < 0, \sigma_\gamma < 0$.
3. Одне з головних напружень є стискуючим, інші – розтягуючі, наприклад, $\sigma_\alpha > 0, \sigma_\beta < 0, \sigma_\gamma > 0$.
4. Одне з головних напружень є розтягуючим, інші – стискуючі, приклад – трійка головних напружень – $\sigma_\alpha < 0, \sigma_\beta > 0, \sigma_\gamma < 0$.

Множину точок тіла, де всі головні напруження мають однакові знаки, називають областю першого типу [104]. Якщо один із знаків головних напружень є відмінним від двох інших, то мають область другого типу. У задачах різномодульної теорії пружності для ізотропного середовища тіло, що є об'єктом дослідження, у залежності від знаків головних напружень, можна поділити на області першого та другого типів. Важливим питанням при визначенні компонентів напружено-деформованого стану різномодульного тіла є визначення меж областей першого та другого типів.

Для отримання співвідношень між напруженнями та деформаціями з врахуванням різномодульності у тілі виділяють нескінченно малий паралелепіпед з трьома парами граней, паралельним координатним площинам $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}, \gamma = \text{const}$. Нехай він розтягується за всіма трьома головними напрямками. Формули закону Гука у цьому випадку набувають вигляду:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E_+} \sigma_\alpha - \frac{\nu_+}{E_+} (\sigma_\beta + \sigma_\gamma),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\beta} &= \frac{1}{E_{+}}\sigma_{\beta} - \frac{\nu_{+}}{E_{+}}(\sigma_{\alpha} + \sigma_{\gamma}), \\ \varepsilon_{\gamma} &= \frac{1}{E_{+}}\sigma_{\gamma} - \frac{\nu_{+}}{E_{+}}(\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}).\end{aligned}\quad (1.6)$$

З формул (1.6) отримують вираз об'ємної деформації через об'ємне напруження у вигляді:

$$\varepsilon_{+} = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} + \varepsilon_{\gamma} = \frac{1 - 2\nu_{+}}{E_{+}}\sigma, \quad (1.7)$$

де $\sigma = \sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} + \sigma_{\gamma}$.

Якщо ж виділений елементарний паралелепіпед стиснутий з усіх боків за трьома головними напрямками, тобто всі головні напруження є від'ємними, то у цьому випадку закон Гука набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha} &= \frac{1}{E_{-}}\sigma_{\alpha} - \frac{\nu_{-}}{E_{-}}(\sigma_{\beta} + \sigma_{\gamma}), \\ \varepsilon_{\beta} &= \frac{1}{E_{-}}\sigma_{\beta} - \frac{\nu_{-}}{E_{-}}(\sigma_{\alpha} + \sigma_{\gamma}), \\ \varepsilon_{\gamma} &= \frac{1}{E_{-}}\sigma_{\gamma} - \frac{\nu_{-}}{E_{-}}(\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}).\end{aligned}\quad (1.8)$$

Зв'язок між об'ємною деформацією та об'ємним напруженням виражається рівністю:

$$\varepsilon_{-} = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} + \varepsilon_{\gamma} = \frac{1 - 2\nu_{-}}{E_{-}}\sigma \quad (1.9)$$

У областях першого типу, де всі головні напруження є одночасно або розтягуючими, або стискуючими, закон Гука співпадає зі своїм формулюванням у класичній теорії пружності для однорідного ізотропного тіла з врахуванням того, що при цьому пружні сталі вибираються або для стиску, або для розтягу.

У більш складному випадку напружений стан виділеного елементарного паралелепіпеда є таким, що два головних напруження є розтягуючими, а одне – стискуючим, або ж навпаки – два головні напруження є стискуючими, а одне – розтягуючим. Тоді, у залежності від типу напруженого стану, формули закону Гука набувають одного з таких виглядів.

$$1) \sigma_\alpha > 0, \sigma_\beta < 0, \sigma_\gamma > 0.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E_+} \sigma_\alpha - \frac{\nu_+}{E_+} (\sigma_\beta + \sigma_\gamma), \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{E_-} \sigma_\beta - \frac{\nu_-}{E_-} (\sigma_\alpha + \sigma_\gamma), \\ \varepsilon_\gamma &= \frac{1}{E_+} \sigma_\gamma - \frac{\nu_+}{E_+} (\sigma_\alpha + \sigma_\beta). \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$2) \sigma_\alpha > 0, \sigma_\beta < 0, \sigma_\gamma < 0.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E_+} \sigma_\alpha - \frac{\nu_+}{E_+} (\sigma_\beta + \sigma_\gamma), \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{E_-} \sigma_\beta - \frac{\nu_-}{E_-} (\sigma_\alpha + \sigma_\gamma), \\ \varepsilon_\gamma &= \frac{1}{E_-} \sigma_\gamma - \frac{\nu_-}{E_-} (\sigma_\alpha + \sigma_\beta). \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$3) \sigma_\alpha < 0, \sigma_\beta > 0, \sigma_\gamma < 0.$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E_-} \sigma_\alpha - \frac{\nu_-}{E_-} (\sigma_\beta + \sigma_\gamma), \\
\varepsilon_\beta &= \frac{1}{E_+} \sigma_\beta - \frac{\nu_+}{E_+} (\sigma_\alpha + \sigma_\gamma), \\
\varepsilon_\gamma &= \frac{1}{E_-} \sigma_\gamma - \frac{\nu_-}{E_-} (\sigma_\alpha + \sigma_\beta).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

У [104] пропонується гіпотеза, згідно з якою у співвідношеннях (1.10)-(1.12) виконується рівність:

$$\frac{\nu_+}{E_+} = \frac{\nu_-}{E_-}. \tag{1.13}$$

У дослідженнях [106, 107] пропонується альтернативна гіпотеза про незмінність модуля зсуву при розтягу та стиску. Саме ця гіпотеза використовується у даному дисертаційному дослідженні.

Кутові деформації для всіх розглянутих випадків напруженого стану дорівнюють нулю.

У залежності від типу напруженого стану механічні властивості різномодульного матеріалу відповідають ізотропному або трансверсально-ізотропному середовищу. У [104] розглянуто випадок ізотропного середовища.

Перейшовши до циліндричної системи координат (r, θ, z) , де r – радіальна, θ – кутова, z – осьова координата, можна отримати формули прямого та оберненого закону Гука для випадку, коли на ізотропне тіло діє стале рівномірно розподілене вздовж осі γ розтягуюче навантаження. Тут спостерігається випадок осесиметричної деформації чистого розтягу, всі дотичні напруження у тілі дорівнюють нулю. Координатні осі циліндричної системи координат є головними. Цей випадок відповідає формулам (1.11).

Тут координаті α відповідає координата z , координатам β, γ – відповідно координати r та θ . Для випадку осьового розтягу формули (1.11) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E_-} \sigma_r - \frac{\nu_-}{E_-} (\sigma_\theta + \sigma_z), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_-} \sigma_\theta - \frac{\nu_-}{E_-} (\sigma_r + \sigma_z), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_+} \sigma_z - \frac{\nu_+}{E_+} (\sigma_r + \sigma_\theta).\end{aligned}\tag{1.14}$$

У випадку рівномірного осьового стиску знаки у верхніх індексах технічних констант формул (1.14) змінюються на протилежні.

У дисертаційному дослідженні пропонується узагальнення моделі різномодульного ізотропного тіла для трансверсально-ізотропного середовища на основі підходу, запропонованого у розглянутих вище дослідженнях для ізотропних матеріалів. Механічні характеристики трансверсально-ізотропного тіла визначаються поздовжнім та поперечним модулями пружності E_1 та E_2 , коефіцієнтами Пуассона ν_{12} , ν_{23} та поздовжнім модулем зсуву G_{12} . Перші чотири технічні константи залежить від типу деформування матеріалу (розтягу чи стиску). При розтязі та стиску для відповідних значень технічних констант виконується рівність

$$\frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}}\tag{1.15}$$

Поздовжній модуль зсуву G_{12} та поперечний модуль зсуву

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}\tag{1.16}$$

є інваріантними відносно деформування розтягу та стиску.

При цих припущеннях задача гомогенізації трансропного волокнистого різномодульного композиту зведеться до визначення ефективних пружних сталих $E_1^+, E_2^+, \nu_{12}^+, \nu_{23}^+$ для розтягу, $E_1^-, E_2^-, \nu_{12}^-, \nu_{23}^-$ для стиску, а також поздовжнього модуля зсуву G_{12} . Розв'язок задачі визначення останньої ефективної сталої, яка не залежить від типу деформування матеріалу, наведено у роботі [97]. У дисертаційному дослідженні розв'язується задача знаходження решти пружних сталих, що визначають механічні характеристики трансропного композитного матеріалу, для випадків розтягу та стиску.

З викладеного огляду сучасного стану досліджуваної проблеми впливає, що питання врахування різномодульності при визначенні ефективних механічних характеристик композитів та створення відповідних математичних моделей є актуальними.

Висновки за розділом 1

1. Для математичного моделювання напружено-деформованого стану конструкційних елементів, виготовлених з композитних матеріалів, потрібно попередньо вирішити задачу гомогенізації композиту, тобто його подання у вигляді однорідного матеріалу.
2. На сьогодні недостатньо розробленими є математичні моделі задач механіки різномодульних композитів.
3. Дослідження сучасного стану проблеми гомогенізації композитних матеріалів свідчить про відсутність ефективних методик та алгоритмів математичного моделювання механічних властивостей різномодульних волокнистих трансверсально-ізотропних композитів.

4. Існуючі моделі взаємозв'язку між напруженнями та деформаціями різномодульного ізотропного середовища можна узагальнити для моделювання трансверсально-ізотропних матеріалів.
5. Доцільно розробити модель гомогенізації різномодульного волокнистого композиту та сформулювати математичні постановки відповідних задач.

РОЗДІЛ 2. ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО РІЗНОМОДУЛЬНОГО КОМПОЗИТУ В УМОВАХ ПОЗДОВЖНЬОГО РОЗТЯГУ ТА СТИСКУ

2.1 Постановка задачі

Розглянемо односпрямований волокнистий композитний матеріал, компонентами якого є ізотропні матриця та волокно. Їх механічні властивості визначаються значеннями технічних сталих – модуля пружності E та коефіцієнта Пуассона ν . Надалі величини, що відносяться до матриці, будемо позначати, використовуючи верхній індекс $*$, для волокна будемо використовувати позначення $^{\circ}$.

Представницький елемент композиту подамо у вигляді комбінації двох циліндрів – порожнистого, що моделює матрицю, та суцільного, що відповідає волокну.

Будемо вважати, що розташування волокон у композитному матеріалі є гексагональним [97]. Апроксимуємо об'єм гексагональної представницької комірки композиту (рис. 2.1) об'ємом циліндра таким чином, щоб об'ємні частки волокна у гексагональній та циліндричній комірках співпадали. У моделі представницького елемента композиту волокно розглядається як суцільний циліндр з радіусом a , елементарну гексагональну комірку для матриці апроксимує порожнистий циліндр, радіус якого дорівнює b (рис.2.1).

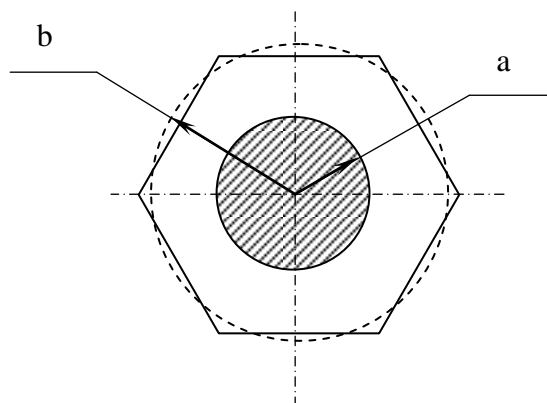


Рис. 2.1 – Гексагональна комірка

Нехай об'ємний вміст волокон в композиті дорівнює f . Тоді, враховуючи, що циліндри, які апроксимують матрицю та волокно в елементарній комірці композиту, мають однакову висоту, отримуємо співвідношення

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (2.1)$$

Співвідношення (2.1) визначає структуру представницької комірки композиту.

Для подальшого дослідження перейдемо до циліндричної системи координат (r, θ, z) , де r – радіальна, θ – кутова, z – осьова координата.

Розглянемо задачу визначення ефективного поздовжнього модуля пружності композиту з різномодульними механічними характеристиками. Для цього нам потрібно дослідити модель напружено-деформованого стану представницької комірки композитного матеріалу, що відповідає її однорідному розтягу та стиску. Спочатку для цього виду деформування визначимо переміщення, напруження та деформації у ізотропних циліндрах, що моделюють матрицю та волокно, а потім знайдемо аналогічні функції для трансверсально-ізотропного циліндра, виготовленого з однорідного композитного матеріалу.

Ефективний поздовжній модуль пружності композиту знайдемо у вигляді функції механічних характеристик матриці та волокна, а також об'ємного вмісту f волокна у композиті. Для цього використаємо кінематичні умови узгодження переміщень вибраних точок матриці та волокна, визначених з задачі про їх сумісне деформування як ізотропних циліндрів, та переміщень аналогічних точок комірки однорідного композиту. Для задачі про однорідний розтяг-стиск представницької комірки композиту

виберемо як умови узгодження рівність осьових переміщень для довільного перерізу циліндра $z = h$ та радіальних переміщень на зовнішній поверхні комірки $r = b$.

2.2 Сумісне деформування компонентів представницької комірки композиту

Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення комірки композитного матеріалу, що моделюється у вигляді комбінації двох ізотропних циліндрів – суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що відтворює волокно, та порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що подає матрицю.

Нехай матеріали матриці та волокна є різномодульними. Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона при розтягу позначимо E_+ та ν_+ , при стиску – відповідно E_- та ν_- .

При однорідному розтягу у точках волокна діє стале рівномірно розподілене по ньому напруження $\sigma^\circ > 0$ у напрямі осі z . Ця вісь співпадає з віссю циліндра, що апроксимує комірку композита. Аналогічне напруження $\sigma^* > 0$, що діє у матриці, підберемо таким чином, щоб осьові переміщення матриці та волокна співпадали для довільного перерізу $z = h = \text{const}$.

При подальшому математичному моделюванні напружено-деформованого стану комірки композиту використано основні передумови, припущення та рівняння різномодульної теорії пружності, викладені та обґрунтовані у монографії [104]. При поздовжньому осесиметричному деформуванні розтягу або стиску у осьовому напрямку нормальні напруження у напрямку координатних осей циліндричної системи координат для комірки композита є головними напруженнями, оскільки для такого виду деформування дотичні напруження дорівнюють нулю. При цьому координатні осі циліндричної системи координат є головними осями. При розтягу радіальне та тангенціальне напруження є від'ємними, а осьове

напруження – додатне. При стиску знаки головних напружень змінюються на протилежні. Тому закон Гука для ізотропних компонент композиту застосовується у вигляді, аналогічному [104].

Для поздовжнього розтягу комірки композита у напрямку координати z формули закону Гука у прямій формі для ізотропного тіла мають вигляд:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_-} (\sigma_r - \nu_- (\sigma_\theta + \sigma_z)), \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_-} (\sigma_\theta - \nu_- (\sigma_r + \sigma_z)), \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_+} (\sigma_z - \nu_+ (\sigma_r + \sigma_\theta)). \quad (2.4)$$

У формулах (2.2)–(2.4), σ_r , σ_θ , σ_z – нормальні напруження у напрямку координатних осей r , θ , z циліндричної системи координат, ε_r , ε_θ , ε_z – лінійні деформації у напрямі цих осей.

З рівностей (2.2)–(2.4) знайдемо вирази напружень через деформації, тобто отримаємо для поздовжнього розтягу різномодульного матеріалу зворотну форму закону Гука. Для цього подамо ці рівності у матричній формі:

$$[N] \cdot \{\bar{\sigma}\} = \{\bar{\varepsilon}\}. \quad (2.5)$$

У матричному рівнянні (2.5)

$$[N] = \begin{pmatrix} 1 & -\nu_- & -\nu_- \\ -\nu_- & 1 & -\nu_- \\ -\nu_+ & -\nu_+ & 1 \end{pmatrix}, \quad \{\bar{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \{\bar{\varepsilon}\} = \begin{pmatrix} E_- \varepsilon_r \\ E_- \varepsilon_\theta \\ E_+ \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно напружень (2.5) використаємо метод Крамера. Визначник матриці $[N]$ має вигляд:

$$\Delta = (1 + \nu_-)(1 - \nu_- - 2\nu_+\nu_-).$$

$$\text{Тоді } \sigma_r = \Delta_r / \Delta, \sigma_\theta = \Delta_\theta / \Delta, \sigma_z = \Delta_z / \Delta.$$

В останніх рівностях

$$\Delta_r = E_- (1 - \nu_+\nu_-) \varepsilon_r + E_- \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_\theta + E_+ \nu_- (1 + \nu_-) \varepsilon_z,$$

$$\Delta_\theta = E_- \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_r + E_- (1 - \nu_+\nu_-) \varepsilon_\theta + E_+ \nu_- (1 + \nu_-) \varepsilon_z,$$

$$\Delta_z = E_- \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_r + E_- \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_\theta + E_+ (1 - (\nu_-)^2) \varepsilon_z.$$

Отже, формули закону Гука у зворотній формі для ізотропного матеріалу мають вигляд:

$$\sigma_r = \frac{1}{\Delta} (E_- (1 - \nu_+\nu_-) \varepsilon_r + E_- \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_\theta + E_+ \nu_- (1 + \nu_-) \varepsilon_z), \quad (2.6)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\Delta} (E_- \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_r + E_- (1 - \nu_+\nu_-) \varepsilon_\theta + E_+ \nu_- (1 + \nu_-) \varepsilon_z), \quad (2.7)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\Delta} (E_- \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_r + E_- \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_\theta + E_+ (1 - (\nu_-)^2) \varepsilon_z). \quad (2.8)$$

Зазначимо, що у випадку, коли $E_+ = E_-$, $\nu_+ = \nu_-$, формули (2.6)-(2.8) співпадають з класичними формулами закону Гука у оберненій формі.

Розбіжності між класичною та різномодульною теоріями пружності містяться лише у співвідношеннях між напруженнями та деформаціями, інші основні рівняння теорії пружності (рівняння рівноваги, рівняння Ламе,

співвідношення Коші, рівняння Бельтрамі-Мітчела) у різномодульному випадку мають такий же вигляд, як і для різномодульної теорії пружності [104].

Розглянемо вісесиметричний напружено-деформований стан циліндричного тіла під дією розтягуючого напруження σ , що діє у напрямку осі z . Тоді у його точках $\sigma_z = \sigma$, $\sigma_r = \sigma_r(r)$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$, $\tau_{zr} = \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0$. Формули Коші набувають вигляду:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{du_z}{dz} = \text{const}. \quad (2.9)$$

Тут u_r та u_z – відповідно радіальне та осьове переміщення.

З рівнянь рівноваги у цьому випадку напруженого стану залишається лише одне рівняння:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.10)$$

Використовуючи формули закону Гука в зворотній формі і формули Коші, запишемо це рівняння у переміщеннях. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} &= \frac{1}{\Delta} \left[E_- (1 - \nu_+ \nu_-) \frac{d^2 u_r}{dr^2} + E_- \nu_- (1 + \nu_+) \left(\frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} \right) \right], \\ \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \frac{1}{r\Delta} \left[E_- (1 - \nu_- - 2\nu_+ \nu_-) \frac{du_r}{dr} + E_- (\nu_- + 2\nu_+ \nu_- - 1) \frac{u_r}{r} \right]. \end{aligned}$$

Після підстановки цих співвідношень у (2.10) та скорочення, отримуємо диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами відносно радіального переміщення u_r . Воно має вигляд:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (2.11)$$

Радіальне переміщення $u_r(r)$, що є розв'язком рівняння (9), має вигляд:

$$u_r(r) = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}, \quad (2.12)$$

де C_1 та C_2 – сталі, що визначаються з крайових умов.

Розглянемо сумісне деформування матриці та волокна при поздовжньому розтягу. На комірку діє розтягуюча сила, що створює у її точках сталі напруження $\sigma^\circ > 0$ для волокна, $\sigma^* > 0$ для матриці.

Оскільки $\varepsilon_z = \text{const}$ для матриці та для волокна, тобто $\varepsilon_z^* = \varepsilon_z^\circ$, то $u_z^* = u_z^\circ$. Знайдемо вираз для осьової деформації $\varepsilon_z^* = \varepsilon_z^\circ = \varepsilon_z$. З (2.8) отримуємо:

$$\sigma_z = \sigma = \frac{1}{\Delta} \left(E_- \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_r + E_- \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_\theta + E_+ (1 - (\nu_-)^2) \varepsilon_z \right).$$

Звідси знаходимо вираз для ε_z у вигляді:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_+ (1 - \nu_- - 2\nu_- \nu_+)}{E_+ (1 - \nu_-)} - \frac{2E_- \nu_+ B_1}{E_+ (1 - \nu_-)}.$$

Запишемо переміщення, деформації та напруження для матриці та волокна, використовуючи формули Коші та закон Гука. Для матриці отримуємо рівності:

$$u_r^* = B_1 \cdot r + \frac{B_2}{r}, \quad \varepsilon_r^* = B_1 - \frac{B_2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta^* = B_1 + \frac{B_2}{r^2}, \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_z^* = \frac{\sigma_+^* (1 - \nu_-^* - 2\nu_-^* \nu_+^*)}{E_+^* (1 - \nu_-^*)} - \frac{2E_-^* \nu_+^* B_1}{E_+^* (1 - \nu_-^*)}, \quad (2.14)$$

$$\sigma_r^* = \frac{E_-^*}{(1 - \nu_-^*)} \cdot B_1 - \frac{E_-^*}{(1 + \nu_-^*)} \cdot \frac{B_2}{r^2} + \frac{\nu_-^*}{(1 - \nu_-^*)} \cdot \sigma^*. \quad (2.15)$$

Оскільки розв'язок (2.12) для волокна повинен бути обмеженим при $r=0$, то коефіцієнт при $\frac{1}{r}$ повинен дорівнювати нулю. Отже, радіальне переміщення та напруження у точках волокна, а також лінійні деформації у цих точках, мають вигляд:

$$u_r^\circ = A_1 \cdot r, \quad \varepsilon_r^\circ = A_1, \quad \varepsilon_\theta^\circ = A_1, \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_z^\circ = \frac{\sigma^\circ (1 - \nu_-^\circ - 2\nu_-^\circ \nu_+^\circ)}{E_+^\circ (1 - \nu_-^\circ)} - \frac{2E_-^\circ \nu_+^\circ A_1}{E_+^\circ (1 - \nu_-^\circ)}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_r^\circ = \frac{E_-^\circ}{(1 - \nu_-^\circ)} \cdot A_1 + \frac{\nu_-^\circ}{(1 - \nu_-^\circ)} \cdot \sigma^\circ. \quad (2.18)$$

За наявності ідеального контакту на межі поділу матриці та волокна виконуються умови неперервності нормальних переміщень та напружень. Оскільки зовнішня поверхня комірки композиту вільна від напружень, то крайова умова при $r=a$ виражається у рівності нулю нормального напруження.

Отже, крайові умови для задачі про сумісне деформування матриці та волокна мають вигляд:

$$\sigma_r^*(a) = \sigma_r^\circ(a), \quad u_r^*(a) = u_r^\circ(a), \quad u_z^*(h) = u_z^\circ(h), \quad \sigma_r^*(b) = 0. \quad (2.19)$$

Використовуючи умови (2.19), отримаємо систему для визначення невідомих A_1, B_1, B_2 та співвідношення між σ° та σ^* :

$$\begin{aligned} \frac{E_-^*}{1-(v_-^*)^2} \left[(1+v_-^*)B_1 + \frac{B_2}{a^2}(v_-^* - 1) \right] + \frac{v_-^* \sigma^*}{1-v_-^*} &= \frac{E_-^\circ}{1-(v_-^\circ)^2} \left[(1+v_-^\circ)A_1 \right] + \frac{v_-^\circ \sigma^\circ}{1-v_-^\circ}; \\ A_1 a &= B_1 a + \frac{B_2}{a}; \\ \frac{1}{E_+^\circ} \left[\sigma^\circ - \frac{2A_1 v_+^\circ E_-^\circ (1+v_-^\circ)}{1-(v_-^\circ)^2} - \frac{2v_-^\circ v_+^\circ \sigma^\circ}{1-v_-^\circ} \right] &= \frac{1}{E_+^*} \left[\sigma^* - \frac{2B_1 v_+^* E_-^* (1+v_-^*)}{1-(v_-^*)^2} - \frac{2v_-^* v_+^* \sigma^*}{1-v_-^*} \right]; \\ \frac{E_-^*}{1-(v_-^*)^2} \left[(1+v_-^*)B_1 + \frac{B_2}{b^2}(v_-^* - 1) \right] + \frac{v_-^* \sigma^*}{1-v_-^*} &= 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Систему (2.20) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{E_-^*}{1-(v_-^*)^2} \cdot (1+v_-^*)B_1 + \frac{E_-^*}{1-(v_-^*)^2} \cdot \frac{B_2}{a^2}(v_-^* - 1) + \frac{v_-^* \sigma^*}{1-v_-^*} &= \frac{E_-^\circ}{1-(v_-^\circ)^2} \left[(1+v_-^\circ)A_1 \right] + \frac{v_-^\circ \sigma^\circ}{1-v_-^\circ}; \\ A_1 a &= B_1 a + \frac{B_2}{a}; \\ \frac{1}{E_+^\circ} \left[\sigma^\circ \left(1 - \frac{2v_-^\circ v_+^\circ}{1-v_-^\circ} \right) - \frac{2A_1 v_+^\circ E_-^\circ (1+v_-^\circ)}{1-(v_-^\circ)^2} \right] &= \frac{1}{E_+^*} \left[\sigma^* \left(1 - \frac{2v_-^* v_+^*}{1-v_-^*} \right) - \frac{2B_1 v_+^* E_-^* (1+v_-^*)}{1-(v_-^*)^2} \right]; \\ \frac{E_-^*}{1-(v_-^*)^2} \cdot (1+v_-^*)B_1 + \frac{E_-^*}{1-(v_-^*)^2} \cdot \frac{B_2}{b^2}(v_-^* - 1) &= -\frac{v_-^* \sigma^*}{1-v_-^*}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Враховуючи, що задачі про осесиметричний розтяг та стиск комірки однорідного композиту та системи циліндрів «матриця-волокно» повинні бути еквівалентними, необхідним є виконання умови:

$$\pi b^2 \sigma = \pi a^2 \sigma^\circ + \pi (b^2 - a^2) \sigma^* \quad (2.22)$$

Оскільки, згідно з (2.1) $f = \frac{a^2}{b^2}$ – відносна об'ємна частка волокна у композиті, то рівність (2.22) можна подати у вигляді:

$$\sigma = f \sigma^\circ + (1-f) \sigma^* \quad (2.23)$$

Отже, з врахуванням рівності (2.23) систему (2.21) можна подати у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_-^*}{1-v_-^*} \cdot B_1 - \frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot \frac{B_2}{a^2} + \frac{v_-^*}{1-v_-^*} \cdot \sigma^* = \frac{E_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot A_1 + \frac{v_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot \sigma^\circ \\ A_1 a = B_1 a + \frac{B_2}{a} \\ \frac{\sigma^\circ (1-v_-^\circ - 2v_-^\circ v_+^\circ)}{E_+^\circ (1-v_-^\circ)} - \frac{2A_1 v_+^\circ E_-^\circ}{E_+^\circ (1-v_-^\circ)} = \frac{\sigma^* \cdot (1-v_-^* - 2v_-^* v_+^* \sigma^*)}{E_+^* (1-v_-^*)} - \frac{2B_1 v_+^* E_-^*}{E_+^* (1-v_-^*)} \\ \frac{E_-^*}{1-v_-^*} \cdot B_1 + \frac{E_-^*}{1-v_-^*} \cdot \frac{B_2}{b^2} + \frac{v_-^*}{1-v_-^*} \cdot \sigma^* = 0 \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Із другого рівняння системи матимемо:

$$A_1 = B_1 + \frac{B_2}{a^2}. \quad (2.25)$$

Останнє рівняння системи (2.24) помножимо на коефіцієнт $1-v_-^*$:

$$\frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot (1+v_-^*) B_1 + \frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot \frac{B_2}{b^2} (v_-^* - 1) = -v_-^* \sigma^*,$$

$$\begin{aligned} \frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot (1+v_-^*) B_1 &= -\frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot \frac{B_2}{b^2} (v_-^* - 1) - v_-^* \sigma^*, \\ E_-^* \cdot B_1 &= \frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot \frac{B_2}{b^2} (1-v_-^*) - v_-^* \sigma^* \end{aligned} \quad (2.26)$$

З останнього з рівнянь системи (2.26) отримуємо вираз для B_1 :

$$B_1 = \frac{B_2}{b^2} \cdot \frac{(1-v_-^*)}{1+v_-^*} - \frac{v_-^*}{E_-^*} \sigma^*. \quad (2.27)$$

З врахуванням (2.27) умова (2.25) набуває вигляду:

$$A_1 = \frac{B_2}{b^2} \cdot \frac{(1-v_-^*)}{1+v_-^*} - \frac{v_-^*}{E_-^*} \sigma^* + \frac{B_2}{a^2}.$$

Цю рівність запишемо у вигляді:

$$A_1 = B_2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{(1-v_-^*)}{1+v_-^*} + \frac{1}{a^2} \right) - \frac{v_-^*}{E_-^*} \sigma^* \quad (2.28)$$

Згідно з (2.1) рівність (2.28) прийме вигляд:

$$A_1 = B_2 \cdot \left(\frac{f(1-v_-^*) + (1+v_-^*)}{a^2(1+v_-^*)} \right) - \frac{v_-^*}{E_-^*} \cdot \sigma^*. \quad (2.29)$$

Використовуючи (2.27), із першої рівності (2.24) маємо:

$$\begin{aligned}
& \frac{E_-^*}{1-v_-^*} \cdot \left[\frac{B_2}{b^2} \cdot \frac{(1-v_-^*)}{1+v_-^*} - \frac{v_-^*}{E_-^*} \sigma^* \right] - \frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot \frac{B_2}{a^2} + \frac{v_-^*}{1-v_-^*} \cdot \sigma^* = \\
& = \frac{E_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot \left[B_2 \cdot \frac{f(1-v_-^*)+1+v_-^*}{a^2(1+v_-^*)} - \frac{v_-^*}{E_-^*} \sigma^* \right] + \frac{v_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot \sigma^\circ . \tag{2.30}
\end{aligned}$$

З (2.30) отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \frac{E_-^*}{1-v_-^*} \cdot \frac{B_2}{b^2} \cdot \frac{(1-v_-^*)}{1+v_-^*} - \frac{E_-^*}{1-v_-^*} \cdot \frac{v_-^*}{E_-^*} \sigma^* - \frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot \frac{B_2}{a^2} + \frac{v_-^*}{1-v_-^*} \cdot \sigma^* = \\
& = \frac{E_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot B_2 \cdot \frac{f(1-v_-^*)+1+v_-^*}{a^2(1+v_-^*)} - \frac{E_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot \frac{v_-^*}{E_-^*} \sigma^* + \frac{v_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot \sigma^\circ \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Перепишемо співвідношення (2.31) у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot \frac{B_2}{b^2} - \frac{v_-^*}{1-v_-^*} \cdot \sigma^* - \frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot \frac{B_2}{a^2} + \frac{v_-^*}{1-v_-^*} \cdot \sigma^* = \\
& = \frac{E_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot B_2 \cdot \frac{f(1-v_-^*)+1+v_-^*}{a^2(1+v_-^*)} - \frac{E_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot \frac{v_-^*}{E_-^*} \sigma^* + \frac{v_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot \sigma^\circ . \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Звідси отримуємо рівність

$$\begin{aligned}
& \frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot \frac{B_2}{b^2} - \frac{E_-^*}{1+v_-^*} \cdot \frac{B_2}{a^2} + \frac{v_-^*}{1-v_-^*} \cdot \sigma^* - \frac{E_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot B_2 \cdot \frac{f(1-v_-^*)+1+v_-^*}{a^2(1+v_-^*)} = \\
& = \frac{v_-^*}{1-v_-^\circ} \cdot \sigma^* - \frac{E_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot \frac{v_-^*}{E_-^*} \sigma^* + \frac{v_-^\circ}{1-v_-^\circ} \cdot \sigma^\circ . \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Її можна записати у вигляді:

$$\frac{E_-^\circ}{(1-v_-^\circ)} \cdot \left(\frac{v_-^\circ \sigma^\circ}{E_-^\circ} - \frac{v_-^* \sigma^*}{E_-^*} \right) = \frac{B_2}{a^2} \cdot \left(\frac{E_-^*(f-1)}{(1+v_-^*)} - \frac{E_-^\circ(f(1-v_-^*) + (1+v_-^*))}{(1-v_-^\circ)(1+v_-^*)} \right). \quad (2.34)$$

Розв'яжемо це рівняння відносно B_2 :

$$B_2 = \left(\frac{v_-^\circ \sigma^\circ}{E_-^\circ} - \frac{v_-^* \sigma^*}{E_-^*} \right) \frac{a^2 E_-^\circ (1+v_-^*)}{E_-^*(f-1)(1-v_-^\circ) - E_-^\circ(f(1-v_-^*) + (1+v_-^*))}. \quad (2.35)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} d_1 &= E_-^*(f-1)(1-v_-^\circ), \\ d_2 &= E_-^\circ(f(1-v_-^*) + (1+v_-^*)) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Тоді

$$B_2 = \frac{v_-^\circ a^2 (1+v_-^*)}{d_1 - d_2} \cdot \sigma^\circ - \frac{a^2 E_-^\circ (1+v_-^*)}{d_1 - d_2} \cdot \frac{v_-^*}{E_-^*} \cdot \sigma^*, \quad (2.37)$$

$$A_1 = \frac{d_2}{d_1 - d_2} \cdot \frac{v_-^\circ}{E_-^\circ} \sigma^\circ - \frac{v_-^*}{E_-^*} \cdot \frac{d_1}{d_1 - d_2} \cdot \sigma^*, \quad (2.38)$$

$$B_1 = \frac{fv_-^\circ(1-v_-^*)}{d_1 - d_2} \cdot \sigma^\circ - \frac{v_-^*}{E_-^*} \cdot \frac{(fE_-^\circ(1-v_-^*) + d_1 - d_2)}{d_1 - d_2} \cdot \sigma^*. \quad (2.39)$$

З третьої рівності для крайових умов (2.19) знаходимо співвідношення між σ^* та σ° :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(1 - 2\nu_-^\circ \nu_+^\circ - \nu_+^\circ)(d_1 - d_2)}{E_+^\circ(1 - \nu_+^\circ)} - \frac{2\nu_-^\circ \nu_+^\circ d_2}{E_+^\circ(1 - \nu_+^\circ)} + \frac{2f\nu_+^\circ \nu_+^*}{1} \right) \sigma^\circ = \\
& = \left(\frac{(1 - 2\nu_-^* \nu_+^* - \nu_+^*)(d_1 - d_2)}{E_+^*(1 - \nu_+^*)} + \frac{2\nu_-^* \nu_+^* (fE_+^\circ(1 - \nu_+^*) + d_1 - d_2)}{E_+^*(1 - \nu_+^*)} - \right. \\
& \left. - \frac{2\nu_-^* \nu_+^\circ d_1}{E_+^*(1 - \nu_+^\circ)} \right) \sigma^*. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Позначивши

$$d_+^\circ = \frac{E_+^*(f - 1)(1 - \nu_+^\circ - 2\nu_-^\circ \nu_+^\circ) - E_+^\circ(f(1 - \nu_+^* - 2\nu_-^\circ \nu_+^*) + (1 + \nu_+^*))}{E_+^\circ}, \tag{2.41}$$

$$d_+^* = \frac{E_+^*(f - 1)(1 - \nu_+^\circ - 2\nu_-^* \nu_+^\circ) - E_+^\circ(f(1 - \nu_+^* - 2\nu_-^* \nu_+^*) + (1 + \nu_+^*))}{E_+^*}, \tag{2.42}$$

отримуємо співвідношення між осьовими напруженнями σ_0° та σ_0^* у вигляді:

$$d_+^\circ \sigma^\circ = d_+^* \sigma^*. \tag{2.43}$$

Таким чином, отримано необхідні для подальшого дослідження компоненти переміщень, напружень та деформацій матриці та волокна, а також співвідношення між осьовими напруженнями у цих компонентах елементарної комірки композиту.

2.3 Визначення ефективного поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона однорідного композиту

Розв'яжемо тепер задачу про визначення компонент напружено-деформованого стану однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит. Поле напружень визначається співвідношеннями:

$$\sigma_z = \sigma, \sigma_r = 0, \sigma_\theta = 0, \tau_{zr} = \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.44)$$

З залежності (2.43) знаходимо:

$$\sigma^\circ = \frac{d_+^* \sigma^*}{d_+^\circ}. \quad (2.45)$$

Тоді з рівності (2.23) випливає, що

$$\left[d_+^* f + d_+^\circ (1 - f) \right] \sigma^* = \sigma. \quad (2.46)$$

З останніх двох рівностей знаходимо:

$$\sigma^* = \frac{\sigma d_+^\circ}{d_+^\circ + f(d_+^* - d_+^\circ)}, \quad \sigma^\circ = \frac{\sigma \cdot d_+^*}{d_+^\circ + f(d_+^* - d_+^\circ)}. \quad (2.47)$$

Для трансверсально-ізотропного матеріалу закон Гука у прямій формі для випадку осьового розтягу (знаки головних напружень $\sigma_z > 0, \sigma_r < 0, \sigma_\theta < 0$) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_2^-} \sigma_r - \frac{\nu_{23}^-}{E_2^-} \sigma_\theta - \frac{\nu_{21}^-}{E_2^-} \sigma_z, \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{\nu_{23}^-}{E_2^-} \sigma_r + \frac{1}{E_2^-} \sigma_\theta - \frac{\nu_{21}^-}{E_2^-} \sigma_z, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{12}^+}{E_1^+} \sigma_r - \frac{\nu_{12}^+}{E_1^+} \sigma_\theta + \frac{1}{E_1^+} \sigma_z. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Зазначимо, що для трансверсально-ізотропного матеріалу повинна виконуватися рівність [134]: $\frac{E_1^+}{\nu_{12}^+} = \frac{E_1^-}{\nu_{12}^-}$. Тоді для відношення $\frac{\nu_{21}^-}{E_2^-}$ у рівняннях

(2.48) маємо:

$$\frac{\nu_{21}^-}{E_2^-} = \frac{\nu_{12}^-}{E_1^-} = \frac{\nu_{12}^+}{E_1^+}.$$

Для отримання оберненої форми закону Гука виразимо з цих рівностей головні напруження $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ через лінійні деформації $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$, тобто розв'яжемо відносно деформацій систему (2.50). Для цього використаємо метод Крамера, згідно з яким отримуємо:

$$\sigma_r = \delta_r / \delta, \quad \sigma_\theta = \delta_\theta / \delta, \quad \sigma_z = \delta_z / \delta,$$

Тут використано позначення:

$$\delta_r = \frac{\varepsilon_r}{E_2^- E_1^+} (1 - \nu_{21}^- \nu_{12}^+) + \frac{\varepsilon_\theta}{E_2^- E_1^+} (\nu_{23}^- + \nu_{21}^- \nu_{12}^+) + \frac{\nu_{21}^- \varepsilon_z}{(E_2^-)^2} (\nu_{23}^- + 1),$$

$$\delta_\theta = \frac{\varepsilon_r}{E_2^- E_1^+} (\nu_{23}^- + \nu_{21}^- \nu_{12}^+) + \frac{\varepsilon_\theta}{E_2^- E_1^+} (1 - \nu_{21}^- \nu_{12}^+) + \frac{\nu_{21}^- \varepsilon_z}{(E_2^-)^2} (\nu_{23}^- + 1),$$

$$\delta_z = \frac{\nu_{12}^+ \varepsilon_r}{E_2^- E_1^+} (1 + \nu_{23}^-) + \frac{\nu_{12}^+ \varepsilon_\theta}{E_2^- E_1^+} (1 + \nu_{23}^-) + \frac{\varepsilon_z}{(E_2^-)^2} (1 - (\nu_{23}^-)^2)$$

$$\delta = 1 - 2\nu_{23}^- \nu_{21}^- \nu_{12}^+ - 2\nu_{12}^+ \nu_{21}^- - (\nu_{23}^-)^2.$$

У результаті отримуємо співвідношення між напруженнями та деформаціями різномодульного трансропного композиту при розтягненні у вигляді:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{\delta} \left[E_2^- (1 - \nu_{21}^- \nu_{12}^+) \varepsilon_r + E_2^- (\nu_{23}^- + \nu_{21}^- \nu_{12}^+) \varepsilon_\theta + E_1^+ \nu_{21}^- (\nu_{23}^- + 1) \varepsilon_z \right], \\
\sigma_\theta &= \frac{1}{\delta} \left[E_2^- (\nu_{21}^- \nu_{12}^+ + \nu_{23}^-) \varepsilon_r + E_2^- (1 - \nu_{21}^- \nu_{12}^+) \varepsilon_\theta + E_1^+ \nu_{21}^- (\nu_{23}^- + 1) \varepsilon_z \right], \\
\sigma_z &= \frac{1}{\delta} \left[E_2^- \nu_{12}^+ (1 + \nu_{23}^-) \varepsilon_r + E_2^- \nu_{12}^+ (1 + \nu_{23}^-) \varepsilon_\theta + E_1^+ \nu_{21}^- (1 - (\nu_{23}^-)^2) \varepsilon_z \right]. \quad (2.49)
\end{aligned}$$

Для випадку стиску вздовж осі комірки знаки у індексах формул (2.48) та (2.49) змінюються на протилежні.

Враховуючи вигляд поля напружень (2.44) у однорідному трансверсально-ізотропному композиті, відмінні від нуля компоненти поля деформацій набувають вигляду:

$$\varepsilon_r = -\frac{\nu_{12}^+}{E_1^+} \sigma, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E_1^+} \sigma. \quad (2.50)$$

Інтегруючи співвідношення Коші, отримуємо вирази для радіального та осевого переміщень точок однорідного композиту:

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{12}^+}{E_1^+} \sigma r, \quad u_z(z) = \frac{1}{E_1^+} \sigma z. \quad (2.51)$$

з урахуванням того, що для цієї задачі мають виконуватися умови $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$.

Умовами узгодження переміщень для задачі про сумісне деформування матриці та волокна у комірці композита при її поздовжньому розтягу та задачі про поздовжній розтяг однорідної трансверсально-ізотропної комірки є рівність осевих переміщень для довільного $z = h$ та радіальних переміщень на зовнішній поверхні комірки $r = b$:

$$u_r(b) = u_r^*(b), \quad u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (2.52)$$

Друге із співвідношень (2.52) з урахуванням (2.13) та (2.51) запишеться у вигляді:

$$\frac{\sigma}{E_1^+} = \frac{\sigma^* (1 - \nu_-^* - 2\nu_-^* \nu_+^*)}{E_+^* (1 - \nu_-^*)} - \frac{2E_-^* \nu_+^* B_1}{E_+^* (1 - \nu_-^*)}. \quad (2.53)$$

Враховуючи (2.37)-(2.39) та (2.53), отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1^+} = & \frac{1}{d_+^\circ + f(d_+^* - d_+^\circ)} \left(-\frac{2E_-^* \nu_+^* f \nu_-^\circ}{E_+^* (d_1 - d_2)} d_+^* + \right. \\ & \left. + \left(\frac{(1 - \nu_-^* - 2\nu_-^* \nu_+^*)}{E_-^* (1 - \nu_-^*)} + \frac{2\nu_-^* \nu_+^* f E_-^\circ (1 - \nu_-^*) + d_1 - d_2}{(1 - \nu_-^*) E_+^* (d_1 - d_2)} \right) d_+^\circ \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними матрицею і волокном:

$$E_1^+ = \frac{E_-^* E_+^* (1 - \nu_-^*) (d_1 - d_2) (d_+^\circ + f(d_+^* - d_+^\circ))}{2(E_-^*)^2 \nu_+^* \nu_-^\circ f d_+^* (1 - \nu_-^*) - d_+^\circ E_+^* (1 - \nu_-^* - 2\nu_-^* \nu_+^*) (d_1 - d_2) - k_1}, \quad (2.55)$$

$$\text{де } k_1 = 2d_+^\circ E_-^* \nu_+^* \nu_-^\circ (f E_-^\circ (1 - \nu_-^*) + d_1 - d_2).$$

Тоді, з урахуванням виразів (2.13), (2.27), (2.37) та (2.39), з першої з умов (2.52) отримуємо співвідношення для коефіцієнта Пуассона ν_{12}^+ :

$$\nu_{12}^+ = \frac{E_+^*(1-\nu_-^*)(2f\nu_-^\circ E_+^* d_+^* - \nu_-^* d_+^\circ (d_1 - d_2 + 2fE_-^\circ))}{2(E_+^*)^2 \nu_+^* \nu_-^\circ f d_+^* (1-\nu_-^*) - d_+^\circ E_+^* (1-\nu_-^* - 2\nu_-^* \nu_+^*) (d_1 - d_2) - k_1}. \quad (2.56)$$

Аналогічним чином, при повздовжньому стиску визначаємо:

$$E_1^- = \frac{E_-^* E_+^* (1-\nu_+^*) (d_3 - d_4) (d_-^\circ + f(d_-^* - d_-^\circ))}{2(E_-^*)^2 \nu_-^* \nu_+^\circ f d_-^* (1-\nu_+^*) - d_-^\circ E_-^* (1-\nu_+^* - 2\nu_-^* \nu_+^*) (d_3 - d_4) - k_2}, \quad (2.57)$$

де $k_2 = 2d_-^\circ E_+^* \nu_-^* \nu_+^* (fE_+^\circ (1-\nu_+^*) + d_3 - d_4)$.

Формула для коефіцієнта Пуассона у цьому випадку набуває вигляду:

$$\nu_{12}^- = \frac{E_-^* (1-\nu_+^*) (2f\nu_+^\circ E_-^* d_-^* - \nu_+^* d_-^\circ (d_3 - d_4 + 2fE_+^\circ))}{2(E_-^*)^2 \nu_-^* \nu_+^\circ f d_-^* (1-\nu_+^*) - d_-^\circ E_-^* (1-\nu_+^* - 2\nu_-^* \nu_+^*) (d_3 - d_4) - k_2} \quad (2.58)$$

$$d_3 = E_+^* (f-1)(1-\nu_+^\circ), \quad d_4 = E_+^\circ (f(1-\nu_+^*) + (1+\nu_+^*)), \quad (2.59)$$

$$d_-^\circ = \frac{E_-^* (f-1)(1-\nu_-^\circ - 2\nu_-^\circ \nu_+^\circ) - E_-^\circ (f(1-\nu_-^* - 2\nu_+^\circ \nu_-^*) + (1+\nu_-^*))}{E_-^\circ}, \quad (2.60)$$

$$d_-^* = \frac{E_-^* (f-1)(1-\nu_-^\circ - 2\nu_+^* \nu_-^\circ) - E_-^\circ (f(1-\nu_-^* - 2\nu_-^* \nu_+^*) + (1+\nu_-^*))}{E_-^*}. \quad (2.61)$$

За отриманими формулами (2.55), (2.56) здійснено розрахунок значень поздовжнього модуля пружності E_1^+ та коефіцієнта Пуассона ν_{12}^+ . Досліджувався композит, складовими елементами якого є ізотропні матриця та волокно з такими пружними характеристиками [105]: $E_+^\circ = 60,41$ ГПа,

$\nu_+^{\circ} = 0,38$, $E_-^{\circ} = 48,32$ ГПа, $\nu_-^{\circ} = 0,34$, $E_+^* = 5,55$ ГПа, $\nu_+^* = 0,37$, $E_-^* = 4,45$ ГПа, $\nu_-^* = 0,33$.

На рис. 2.2 суцільною лінією показано залежність поздовжнього модуля пружності E_1^+ від об'ємного вмісту волокна у діапазоні $f = 0,1 \dots 0,6$.

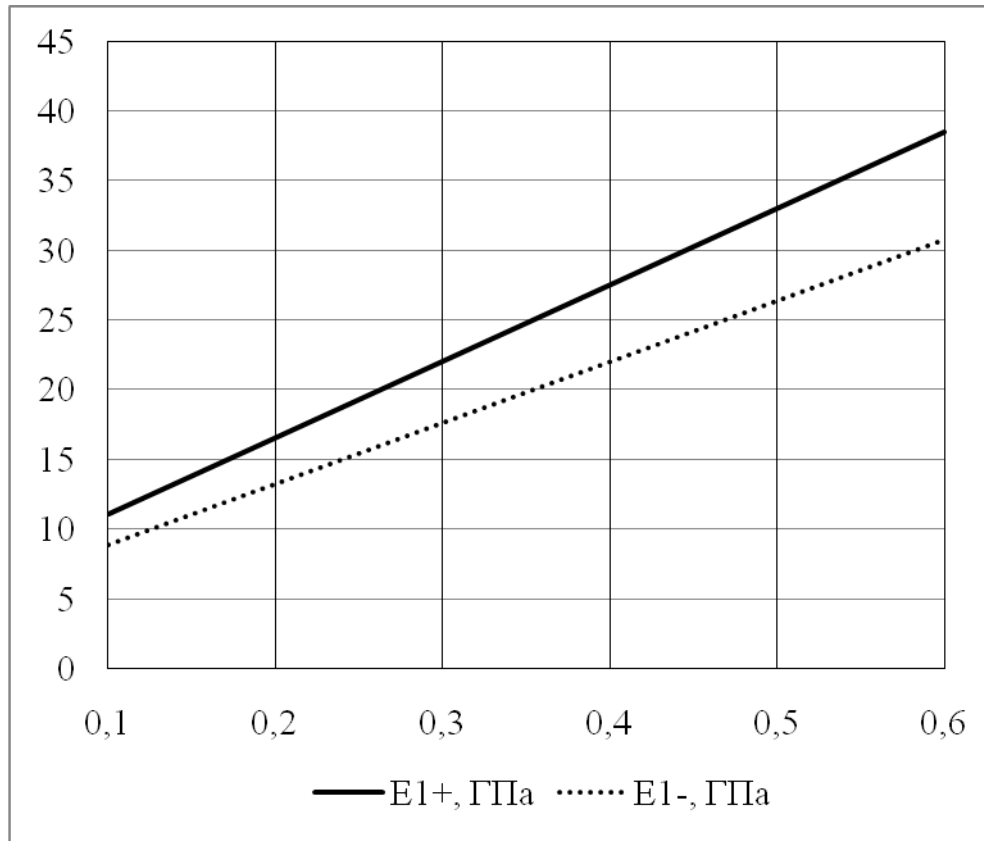


Рис. 2.2 – Залежність поздовжніх модулів пружності E_1^+ та E_1^- від об'ємного вмісту f волокна у композиті

Значення коефіцієнта Пуассона ν_{12}^+ у цьому діапазоні залишаються практично сталими, незначно змінюючись у межах від 0,418 до 0,426.

Обчислимо значення поздовжнього модуля пружності E_1^- та коефіцієнта Пуассона ν_{12}^- за формулами (2.57), (2.58) для композита з вказаними пружними характеристиками при об'ємному вмісті волокна $f \in [0,1; 0,6]$.

Пунктиром на рис. 2.2 зображено залежність поздовжнього модуля пружності при стиску E_1^- від об'ємного вмісту волокна. Значення коефіцієнта Пуассона ν_{12}^- у цьому інтервалі зміни f знаходяться у межах від 0,297 до 0,303.

Отримані результати свідчать про те, що у випадках розтягу та стиску комірки композиту зі зростанням об'ємного вмісту волокна у трансверсально-ізотропному композитному матеріалі ефективний поздовжній модуль пружності E_1 зростає за законом, близьким до лінійного. Ефективний коефіцієнт Пуассона ν_{12} у обох випадках є близьким до сталого. При цьому максимальне відхилення величини E_1 при розтягу від її значення при стиску складає близько 25 %. Максимальне відхилення ефективного коефіцієнта Пуассона ν_{12} для розтягу від його значення для стиску складає близько 40%.

Зазначимо, що для випадку $E_-^* = E_+^*$, $\nu_-^* = \nu_+^*$, $E_-^\circ = E_+^\circ$, $\nu_-^\circ = \nu_+^\circ$, тобто за відсутності різномодульності у компонентах композиту, з формул (2.55)-(2.61) отримуємо формули для поздовжнього модуля пружності E_1 та коефіцієнта Пуассона ν_{12} , наведені у монографії [97].

Висновки за розділом 2

1. Запропоновано методику визначення ефективного поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона для трансверсально-ізотропного волокнистого різномодульного композиту. Вона дозволяє отримати значення його ефективних механічних характеристик з врахуванням їх відмінностей при розтягу та стиску.

2. Для розв'язання задачі гомогенізації різномодульного волокнистого композиту розв'язано дві допоміжні задачі: визначення переміщень, напружень та деформацій матриці та волокна при їх сумісному поздовжньому розтягу та стиску та визначення аналогічних компонент

напружено-деформованого стану однорідного трансверсально-ізотропного композиту при його поздовжньому розтязі.

3. В умовах поздовжнього розтягу та стиску для трансверсально-ізотропного різномодульного композиту отримано формули (2.58)-(2.61) для ефективних значень поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона, що враховують різномодульність складових елементів матеріалу композиту. Ці формули визначають ефективні сталі у вигляді функцій механічних характеристик матриці та волокна, а також частки волокна у матеріалі композиту.

4. Досліджено залежності поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона трансверсально-ізотропного композитного матеріалу від частки волокна у матеріалі композиту.

РОЗДІЛ 3. ГОМОГЕНІЗАЦІЯ РІЗНОМОДУЛЬНОГО КОМПОЗИТУ В УМОВАХ ПОПЕРЕЧНОГО РОЗТЯГУ ТА СТИСКУ

3.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу гомогенізації різномодульного трансверсально-ізотропного композиту в умовах поперечного розтягу та стиску з метою визначення аналітичних співвідношень для його ефективних пружних величин за умов різномодульності матриці та волокна. Матеріал цих компонентів композиту вважається ізотропним.

Розглянемо задачу про поперечний розтяг і стиск елементарної комірки цього композиту. Як і у задачі, розглянутій у розділі 2, волокно моделюється суцільним циліндром ($0 \leq r \leq a$), а матриця – порожнистим циліндром ($a \leq r \leq b$).

Для отримання ефективних пружних сталих композита як однорідного матеріалу для випадків розтягу та стиску необхідно розв'язати дві задачі. Спочатку розв'язується крайова задача про сумісний поперечний розтяг (стиск) ізотропних матриці і волокна. В результаті отримуємо переміщення і напруження для них як функції пружних сталих постійних матриці і волокна, а також їх об'ємної частки в композиті.

Аналогічна задача розв'язується для комірки композиту із однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу з невідомими пружними сталими. Умовою узгодження для розв'язання цих двох задач є рівність осьових переміщень для довільного значення осьової координати z і рівність радіальних переміщень на поверхні комірки композиту $r = b$. З цих умов можна визначити співвідношення для невідомих ефективних пружних сталих однорідного композиту у вигляді функцій пружних сталих його компонент і їх об'ємної частки в матеріалі композиту.

При одновісному вісесиметричному розтягу чи стиску в радіальному напрямі нормальні навантаження в точках комірки композиту є головними

напруженнями, а координати осі – головними осями. При розтягу радіальне і тангенціальне напруження σ_r і σ_θ додатні, осьове напруження σ_z від’ємне, при стиску знаки головних напружень змінюються на протилежні. Тому в подальшому закон Гука в прямій і зворотній формах для ізотропних матриці і волокна застосовуються згідно [114], коли розтяг чи стиск і, відповідно форма зв’язку між напруженнями та деформаціями визначаються за знаками головних напружень. Аналогічні співвідношення використаємо для трансверсально-ізотропного однорідного матеріалу, що моделює композит.

3.2 Напружено-деформований стан елементів композиту в умовах поперечного розтягу

Розглянемо сумісний осесиметричний поперечний розтяг односпрямованого волокнистого композиту, що складається з ізотропних різномодульних матриці та волокна. Волокно моделюється суцільним циліндром ($0 \leq r \leq a$), а матриця – порожнистим циліндром ($a \leq r \leq b$). Схема навантажування представницької комірки композиту при рівномірному поперечному розтягу наведена на рис. 3.1.

Сформулюємо крайові умови для задачі про сумісне деформування матриці та волокна. На поверхні контакту цих компонентів радіальні переміщення і напруження співпадають, для будь-якого $z = h = \text{const}$ співпадають також осьові переміщення точок компонент комірки:

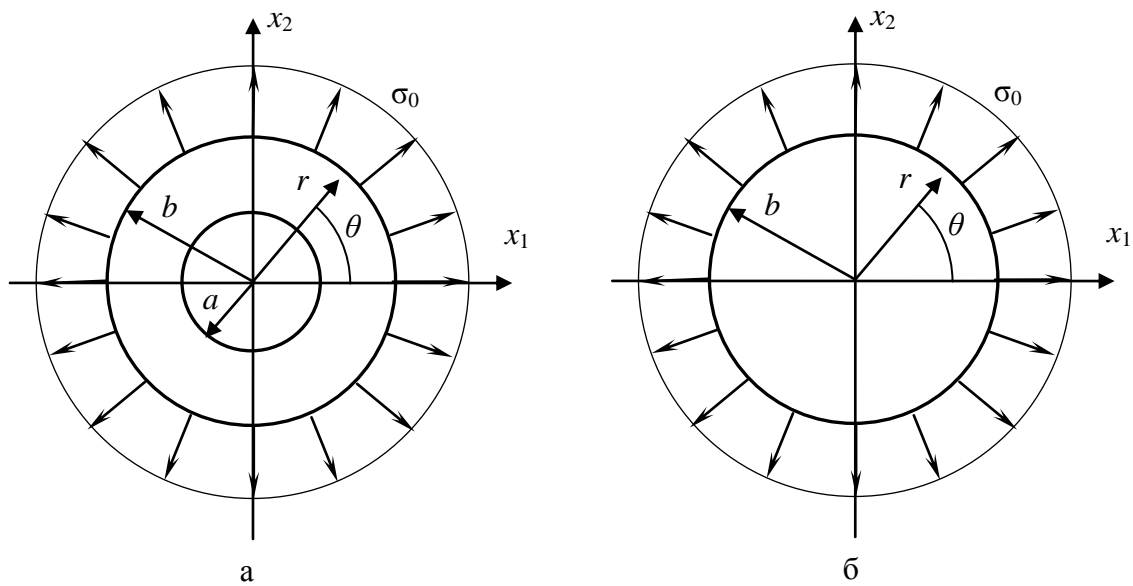
$$\sigma_r^*(a) = \sigma_r^o(a), u_r^*(a) = u_r^o(a), u_z^*(h) = u_z^o(h). \quad (3.1)$$

При поперечному рівномірному осесиметричному розтязі під дією радіального навантаження маємо таку крайову умову на зовнішній поверхні циліндричної представницької комірки композиту:

$$\sigma_r^*(b) = \sigma_0 \quad (3.2)$$

Для визначення переміщень у даній осесиметричній задачі використаємо формули Коші, що набувають вигляду:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{du_z}{dz} = \text{const}, \quad (3.3)$$



- а – сумісне деформування матриці та волокна;
б – деформування композита;

Рис. 3.1 – Схема навантаження комірки композиту при поперечному розтягу

а також рівняння рівноваги, які у цій осесиметричній задачі зводяться до одного рівняння

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (3.4)$$

Використовуючи співвідношення закону Гука у зворотній формі, а також формули Коші, отримуємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку відносно радіального переміщення. Воно має вигляд:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad (3.5)$$

Розв'язок цього рівняння – функція:

$$u_r(r) = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} \quad (3.6)$$

де C_1 і C_2 – сталі, що визначаються з граничних умов.

Для задачі про поперечний розтяг співвідношення між напруженнями та деформаціями мають вигляд, аналогічний (2.2)-(2.8), при цьому у випадку розтягу індекси у пружних сталих у виразах для радіальних та кутових лінійних деформацій змінюються з мінуса на плюс, для осьових деформацій – з плюса на мінус. Для стиску маємо протилежну зміну знаків. Отже, у випадку рівномірного поперечного розтягу маємо рівняння:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_+} (\sigma_r - \nu_+ (\sigma_\theta + \sigma_z)), \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_+} (\sigma_\theta - \nu_+ (\sigma_r + \sigma_z)), \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_-} (\sigma_z - \nu_- (\sigma_r + \sigma_\theta)). \quad (3.9)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\Delta_1} (E_+ (1 - \nu_- \nu_+) \varepsilon_r + E_+ \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_\theta + E_- \nu_+ (1 + \nu_+) \varepsilon_z), \quad (3.10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\Delta_1} (E_+ \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_r + E_+ (1 - \nu_+ \nu_-) \varepsilon_\theta + E_- \nu_+ (1 + \nu_+) \varepsilon_z), \quad (3.11)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\Delta_1} \left(E_+ \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_r + E_+ \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_\theta + E_- (1 - (\nu_+)^2) \varepsilon_z \right). \quad (3.12)$$

У рівностях (3.7)-(3.12)

$$\Delta_1 = (1 + \nu_+) (1 - \nu_+ - 2\nu_+ \nu_-).$$

Нехай σ° та σ^* – сталі осьові напруження, що виникають при поперечному розтягу у матриці та волокні. Переміщення, деформації та напруження для матриці, враховуючи співвідношення Коші та формули закону Гука, матимуть вигляд:

$$u_r^* = B_1 \cdot r + \frac{B_2}{r}, \varepsilon_r^* = B_1 - \frac{B_2}{r^2}, \varepsilon_\theta^* = B_1 + \frac{B_2}{r^2} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_z^* = \frac{\sigma^* (1 - \nu_+^* - 2\nu_-^* \nu_+^*)}{E_-^* (1 - \nu_+^*)} - \frac{2E_+^* \nu_-^* B_1}{E_-^* (1 - \nu_+^*)} \quad (3.14)$$

$$\sigma_r^* = \frac{E_+^*}{(1 - \nu_+^*)} \cdot B_1 - \frac{E_+^*}{(1 + \nu_+^*)} \cdot \frac{B_2}{r^2} + \frac{\nu_+^*}{(1 - \nu_+^*)} \cdot \sigma^* \quad (3.15)$$

Запишемо переміщення для волокна, враховуючи їх обмеженість при $r = 0$, а також радіальні та кутові деформації $\left(\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \right)$:

$$u_r^\circ = A_1 \cdot r, \varepsilon_r^\circ = A_1, \varepsilon_\theta^\circ = A_1. \quad (3.16)$$

Осьова деформація волокна має вигляд:

$$\varepsilon_z^\circ = \frac{\sigma^\circ (1 - \nu_+^\circ - 2\nu_-^\circ \nu_+^\circ)}{E_-^\circ (1 - \nu_+^\circ)} - \frac{2E_+^\circ \nu_-^\circ A_1}{E_-^\circ (1 - \nu_+^\circ)} \quad (3.17)$$

Радіальні напруження у волокні є сталими:

$$\sigma_r^\circ = \frac{E_+^\circ}{1 - \nu_+^\circ} \cdot A_1 + \frac{\nu_+^\circ}{1 - \nu_+^\circ} \cdot \sigma^\circ \quad (3.18)$$

Далі розв'язуємо задачу про сумісне деформування матриці і волокна. У випадку рівномірного поперечного осесиметричного розтягнення маємо крайову умову (3.2):

$$\sigma_r^*(b) = \sigma_0. \quad (3.19)$$

Використовуючи крайові умови (3.1) та (3.2), знайдемо сталі A_1, B_1, B_2 та залежність між σ° та σ^* . У результаті підстановки у крайові умови відповідних переміщень та напружень отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 + \frac{B_2}{a^2}, \\ \left(\frac{E_+^\circ}{1 - \nu_+^\circ} - \frac{E_+^*}{1 - \nu_+^*} \right) B_1 + \frac{E_+^*}{1 + \nu_+^*} \cdot \frac{B_2}{a^2} &= \frac{\nu_+^*}{1 - \nu_+^*} \sigma^* - \frac{\nu_+^\circ}{1 - \nu_+^\circ} \sigma^\circ, \\ \left(\frac{2E_+^* \nu_-^*}{E_-^* (1 - \nu_+^*)} - \frac{2E_+^\circ \nu_-^\circ}{E_-^\circ (1 - \nu_+^\circ)} \right) B_1 - \frac{2E_+^\circ \nu_-^\circ}{E_-^\circ (1 - \nu_+^\circ)} \cdot \frac{B_2}{a} &= \frac{1 - \nu_+^* - 2\nu_+^* \nu_-^*}{E_-^* (1 - \nu_+^*)} \sigma^* - \frac{1 - \nu_+^\circ - 2\nu_+^\circ \nu_-^\circ}{E_-^\circ (1 - \nu_+^\circ)} \sigma^\circ, \\ \frac{E_+^*}{1 - \nu_+^*} B_1 - \frac{E_+^*}{1 + \nu_+^*} \cdot \frac{B_2}{b^2} &= \sigma_0 - \frac{\nu_+^*}{1 - \nu_+^*} \sigma^*. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо значення невідомих величин:

$$\begin{aligned}
B_2 = \sigma_0 \cdot & \frac{a^2(1+v_+^*)(E_+^*(1-v_+^\circ) - E_+^\circ(1-v_+^*))}{E_+^*(d_2 - d_1)} + \\
& + \sigma^* \cdot \frac{a^2 E_+^\circ v_+^*(1+v_+^*)}{E_+^*(d_2 - d_1)} - \sigma^\circ \cdot \frac{a^2 v_+^\circ(1+v_+^*)}{(d_2 - d_1)} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = \sigma^\circ \cdot & \frac{(1-v_+^*)(E_+^\circ(1+v_+^*) + E_+^*(1-v_+^\circ))}{E_+^*(d_2 - d_1)} - \\
& - \sigma^\circ \cdot \frac{f v_+^\circ(1-v_+^*)}{d_2 - d_1} + \sigma^* \cdot \frac{v_+^*(d_1 - E_+^\circ(1+v_+^*))}{E_+^*(d_2 - d_1)} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

$$A_1 = \sigma_0 \cdot \frac{2(1-v_+^\circ)}{d_2 - d_1} - \sigma_0^\circ \cdot \frac{v_+^\circ(f(1-v_+^*) + (1+v_+^*))}{d_2 - d_1} + \sigma^* \cdot \frac{v_+^* d_1}{E_+^*(d_2 - d_1)}. \quad (3.22)$$

де $d_1 = E_+^*(f-1)(1-v_+^\circ)$, $d_2 = E_+^\circ(f(1-v_+^*) + (1+v_+^*))$

Використовуюючи останню з крайових умов (3.1), знаходимо співвідношення між σ^* та σ° :

$$\begin{aligned}
& \sigma^\circ \left(\frac{(1-v_+^\circ - 2v_+^\circ v_+^\circ)(d_1 - d_2)}{E_-^\circ(1-v_+^\circ)} - \frac{2v_+^\circ E_+^\circ (v_+^\circ(f(1-v_+^*) + (1+v_+^*)) - f v_+^*(1-v_+^\circ))}{E_-^\circ(1-v_+^\circ)} \right) + \\
& + \sigma^* \left(\frac{2v_+^* v_+^\circ (d_1 - E_+^\circ(1+v_+^*))}{E_+^*(1-v_+^*)} - \frac{2d_1 v_+^\circ v_+^*}{E_+^*(1-v_+^\circ)} - \frac{(1-v_+^* - 2v_+^* v_+^\circ)(d_2 - d_1)}{E_+^*(1-v_+^*)} \right) = \\
& = \left(\frac{4v_+^\circ E_+^* - 2v_+^* (E_+^\circ(1+v_+^*) + E_+^*(1-v_+^\circ))}{E_+^*} \right) \sigma_0 \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Позначивши

$$d_0 = \frac{4\nu_+^\circ E_+^* - 2\nu_+^* (E_+^\circ (1 + \nu_+^*) + E_+^* (1 - \nu_+^\circ))}{E_+^*} \quad (3.24)$$

$$d_1^\circ = -d^\circ = \frac{(E_+^\circ (f(1 - \nu_+^* - 2\nu_-^* \nu_+^*) + (1 + \nu_+^*))) + E_+^* (1 - f)(1 - \nu_+^\circ - 2\nu_+^\circ \nu_-^\circ)}{E_-^\circ} \quad (3.25)$$

$$d_1^* = d^* = \frac{(E_+^* (f - 1)(1 - \nu_+^\circ - 2\nu_-^* \nu_+^*) - E_+^\circ (f(1 - \nu_+^* - 2\nu_+^* \nu_-^*) + (1 + \nu_+^*)))}{E_-^*} \quad (3.26)$$

отримуємо співвідношення такого вигляду

$$d^* \sigma^* - d^\circ \sigma^\circ = d_0 \sigma_0. \quad (3.27)$$

3.3 Гомогенізація трансверсально-ізотропного композиту

Визначимо компоненти переміщень, напружень та деформацій у представницькій комірці, виготовленій з однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, при поперечному розтягненні.

Поле напружень у матеріалі композиту визначається співвідношеннями:

$$\sigma_z = 0, \tau_{zr} = \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0. \quad (3.28)$$

Для того, щоб у задачі про сумісний поперечний розтяг матриці та волокна та задачі про аналогічне деформування однорідного композиту умови рівноваги збігалися, необхідно, щоб виконувалося співвідношення

$$\pi a^2 \sigma^\circ + \pi (b^2 - a^2) \sigma^* = 0 \Rightarrow \sigma^\circ f + \sigma^* (1 - f) = 0$$

З урахуванням останньої рівності та (3.27) отримаємо:

$$\sigma^* = \sigma_0 \cdot \frac{d^\circ f}{d^* f + d^\circ(1-f)}, \quad (3.29)$$

$$\sigma^\circ = \sigma_0 \cdot \frac{d^\circ(f-1)}{d^* f + d^\circ(1-f)}. \quad (3.30)$$

Для випадку рівномірного поперечного розтягнення зв'язок між напруженнями та деформаціями для трансверсально-ізотропного різномодульного середовища визначатиметься рівностями:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_2^+} \sigma_r - \frac{\nu_{23}^+}{E_2^+} \sigma_\theta - \frac{\nu_{21}^+}{E_2^+} \sigma_z, \quad (3.31)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\nu_{23}^+}{E_2^+} \sigma_r + \frac{1}{E_2^+} \sigma_\theta - \frac{\nu_{21}^+}{E_2^+} \sigma_z, \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{12}^-}{E_1^-} \sigma_r - \frac{\nu_{12}^-}{E_1^-} \sigma_\theta + \frac{1}{E_1^-} \sigma_z. \quad (3.33)$$

Виразивши з цих рівностей напруження через деформації, знаходимо:

$$\sigma_r = \frac{1}{\delta_1} \left[E_2^+ (1 - \nu_{21}^+ \nu_{12}^-) \varepsilon_r + E_2^+ (\nu_{23}^+ + \nu_{21}^+ \nu_{12}^-) \varepsilon_\theta + E_1^- \nu_{21}^+ (\nu_{23}^+ + 1) \varepsilon_z \right], \quad (3.34)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\delta_1} \left[E_2^+ (\nu_{21}^+ \nu_{12}^- + \nu_{23}^+) \varepsilon_r + E_2^+ (1 - \nu_{21}^+ \nu_{12}^-) \varepsilon_\theta + E_1^- \nu_{21}^+ (\nu_{23}^+ + 1) \varepsilon_z \right], \quad (3.35)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\delta_1} \left[E_2^+ \nu_{12}^- (1 + \nu_{23}^+) \varepsilon_r + E_2^+ \nu_{12}^- (1 + \nu_{23}^+) \varepsilon_\theta + E_1^- \nu_{21}^+ (1 - (\nu_{23}^+)^2) \varepsilon_z \right]. \quad (3.36)$$

У рівностях (3.33)-(3.36)

$$\delta_1 = 1 - 2\nu_{23}^+ \nu_{21}^+ \nu_{12}^- - 2\nu_{12}^- \nu_{21}^+ - (\nu_{23}^+)^2.$$

Використовуючи (3.28) та (3.31)-(3.33), знаходимо, що радіальні та кутові лінійні деформації у трансверсально-ізотропному композитному матеріалі при рівномірному поперечному розтягненні визначатимуться рівностями:

$$\varepsilon_r = \frac{1 - \nu_{23}^+}{E_2^+} \cdot \sigma_0; \quad \varepsilon_z = -\frac{2\sigma_0 \nu_{12}^-}{E_1^-}. \quad (3.37)$$

Інтегруючи праві частини рівностей (3.37) відповідно за змінними r та z , і враховуючи, що для радіальних та осьових переміщень мають виконуватися умови $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$, сталі інтегрування $C_1 = C_2 = 0$, отримуємо вирази для переміщень у вигляді:

$$u_r(r) = \frac{1 - \nu_{23}^+}{E_2^+} \cdot \sigma_0 r; \quad u_z(z) = -\frac{2\sigma_0 \nu_{12}^-}{E_1^-} z, \quad (3.38)$$

Як умову узгодження для задачі про поперечне розтягнення однорідного трансверсально-ізотропного композита і задачі про сумісне поперечне розтягнення матриці та волокна візьмемо рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні елементарної комірки:

$$u_r(b) = u_r^*(b) \quad (3.39)$$

З умови (3.39), використовуючи отримані раніше співвідношення для радіальних переміщень, отримуємо такий вираз:

$$\frac{1 - \nu_{23}^+}{E_2^+} = \frac{(1 - \nu_+^\circ)(f(1 + \nu_+^*) + (1 - \nu_+^*))}{d_2 - d_1} + \frac{E_+^\circ(1 + \nu_+^*)(1 - \nu_+^*)(1 - f)}{E_+^*(d_2 - d_1)} +$$

$$+ \frac{d^{\circ} f (f - 1) \left(v_{+}^{*} E_{+}^{\circ} (1 + v_{+}^{*}) + E_{+}^{*} (v_{+}^{*} (1 - v_{+}^{\circ}) - 2v_{+}^{\circ}) \right)}{E_{+}^{*} (d_2 - d_1) (d^{*} f + d^{\circ} (1 - f))} \quad (3.40)$$

Вираз (3.40) у розділі 4 буде використаний для отримання невідомих ефективних пружних сталих композиту E_2 та ν_{23} , що характеризують механічні властивості транстропного композиту у площині його ізотропії.

Згідно рівності [7]: $\frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}}$ значення пружних сталих E_1, E_2, ν_{12} для транстропного композиту у випадках розтягу та стиску визначають значення коефіцієнту Пуассона ν_{21} .

Обчислимо значення коефіцієнта $\frac{1 - \nu_{23}^{+}}{E_2^{+}}$, отриманого за формулою (3.40) для різномодульного транстропного композиту.

Розглянемо композит з ізотропними матрицею та волокном з пружними характеристиками: $E_{+}^{\circ} = 60,41$ ГПа, $\nu_{+}^{\circ} = 0,38$, $E_{-}^{\circ} = 58,64$ ГПа, $\nu_{-}^{\circ} = 0,34$, $E_{+}^{*} = 5,55$ ГПа, $\nu_{+}^{*} = 0,37$, $E_{-}^{*} = 5,37$ ГПа, $\nu_{-}^{*} = 0,33$.

Таблиця 3.1. Значення коефіцієнта $\frac{1 - \nu_{23}^{+}}{E_2^{+}}$

Об'ємний вміст волокна f	Коефіцієнт $\frac{1 - \nu_{23}^{+}}{E_2^{+}}$
0,1	8,389119715· ⁻
0,2	6,918809554· ⁻
0,3	5,849647309· ⁻
0,4	4,959609412· ⁻
0,5	4,173056596· ⁻
0,6	3,456474982· ⁻

В таблиці 3.1 наведені значення коефіцієнта $\frac{1-\nu_{23}^+}{E_2^+}$ при об'ємному вмісті волокна $f \in [0,1;0,6]$ з кроком $h=0,1$.

Формулу для аналогічного співвідношення для випадку стиску отримуємо, замінивши у (3.40) знаки у індексах на протилежні. Отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu_{23}^-}{E_2^-} = & \frac{(1-\nu_-^\circ)(f(1+\nu_-^*)+(1-\nu_-^*))}{d_2-d_1} + \frac{E_-^\circ(1+\nu_-^*)(1-\nu_-^*)(1-f)}{E_-^*(d_2-d_1)} + \\ & + \frac{d^\circ f(f-1)(\nu_-^*E_-^\circ(1+\nu_-^*)+E_-^*(\nu_-^*(1-\nu_-^\circ)-2\nu_-^\circ))}{E_-^*(d_2-d_1)(d^*f+d^\circ(1-f))} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Тут використано позначення:

$$d_0 = \frac{4\nu_-^\circ E_-^* - 2\nu_-^*(E_-^\circ(1+\nu_-^*)+E_-^*(1-\nu_-^\circ))}{E_-^*} \quad (3.42)$$

$$d_1^\circ = -d^\circ = \frac{(E_-^\circ(f(1-\nu_-^*-2\nu_-^*\nu_+^*)+(1+\nu_-^*))+E_-^*(1-f)(1-\nu_-^\circ-2\nu_+^\circ\nu_-^\circ))}{E_+^\circ} \quad (3.43)$$

$$d_1^* = d^* = \frac{(E_-^*(f-1)(1-\nu_-^\circ-2\nu_-^*\nu_+^*)-E_-^\circ(f(1-\nu_-^*-2\nu_+^*\nu_-^*)+(1+\nu_-^*)))}{E_+^*} \quad (3.44)$$

Обчислимо значення коефіцієнта $\frac{1-\nu_{23}^-}{E_2^-}$, отриманого за формулою

(3.41) для композиту з вказаними вище пружними характеристиками.

Ці значення наведені у таблиці 3.2 при об'ємному вмісті волокна $f \in [0,1;0,6]$.

Ці дані свідчать, що відношення $\frac{1-\nu_{23}^-}{E_2^-}$ та $\frac{1-\nu_{23}^+}{E_2^+}$ є монотонно спадними функціями об'ємного вмісту волокна у композиті.

Таблиця 3.2. Значення коефіцієнта $\frac{1 - \nu_{23}^-}{E_2^-}$

Об'ємний вміст волокна f	Коефіцієнт $\frac{1 - \nu_{23}^-}{E_2^-}$
0,1	11,120551755· ⁻
0,2	9,264466076· ⁻
0,3	7,834920309· ⁻
0,4	6,638316215· ⁻
0,5	5,579169194· ⁻
0,6	4,614756774· ⁻

Висновки за розділом 3

1. Запропоновано методику гомогенізації трансверсально-ізотропного волокнистого різномодульного композиту, що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження осьових та радіальних переміщень композита та його складових. Вона дозволяє отримати значення ефективних механічних характеристик композита з врахуванням їх відмінностей при розтягу та стиску.

2. Для розв'язання задачі гомогенізації різномодульного волокнистого композиту розв'язано дві допоміжні задачі: визначення переміщень матриці та волокна при їх сумісному поперечному розтягу та стиску та визначення переміщень точок однорідного трансверсально-ізотропного композиту при його поперечному деформуванні.

3. При поперечному розтягу та стиску для трансверсально-ізотропного різномодульного композиту отримано аналітичні вирази, що визначають

співвідношення $\frac{1 - \nu_{23}^+}{E_2^+}$ та $\frac{1 - \nu_{23}^-}{E_2^-}$. Отримані формули визначають залежності

цих величин від частки волокна у матеріалі композита та механічних характеристик його складових з врахуванням їх відмінностей при розтягу та стиску.

РОЗДІЛ 4. ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ПРУЖНИХ СТАЛИХ РІЗНОМОДУЛЬНОГО КОМПОЗИТУ У ПЛОЩИНІ ІЗОТРОПІЇ

4.1 Постановка задачі

Розглянемо транстропний волокнистий композит, компонентами якого є ізотропна матриця та ізотропне волокно. Визначимо для нього ефективні сталі – модуль пружності E_2 для площини ізотропії та коефіцієнт Пуассона ν_{23} у цій площині.

У розділі 3 було визначено співвідношення для цих величин $\frac{1-\nu_{23}}{E_2}$ для різномодульного композиту у випадках поперечного розтягу та стиску. Для знаходження E_2 для площини ізотропії та коефіцієнт Пуассона ν_{23} потрібно знайти ще одне співвідношення, що пов'язує ці величини. Як було відзначено у розділі 1, механічні властивості транстропного різномодульного матеріалу можна визначити за допомогою таких сталих величин: поздовжнього та поперечного модулів пружності $E_1^+, E_2^+, E_1^-, E_2^-$ та коефіцієнтів Пуассона $\nu_{12}^+, \nu_{12}^-, \nu_{23}^+, \nu_{23}^-$, величини яких залежать від виду деформування – розтягу чи стиску, а також модулів зсуву G_{12} та $G_{23} = \frac{E_2^+}{2(1+\nu_{23}^+)} = \frac{E_2^-}{2(1+\nu_{23}^-)}$, що залишаються інваріантними при розтягу та стиску. Визначивши величину G_{23} , з допомогою співвідношення $\frac{1-\nu_{23}}{E_2}$, знайденого для випадку розтягу та стиску, можна визначити для обох цих випадків деформування значення поперечного модуля пружності E_2 та коефіцієнта Пуассона ν_{23} .

Одним з шляхів для визначення співвідношення

$G_{23} = \frac{E_2^+}{2(1+\nu_{23}^+)} = \frac{E_2^-}{2(1+\nu_{23}^-)}$ є розв'язання задачі про поперечний (у площині

ізотропії) зсув комірки композиту. Моделювання цього випадку деформування представницького елемента здійснюється на основі розв'язання задачі Кірша [97]. Для розв'язання цієї задачі можна застосувати підхід, викладений у роботі [97]. Розглянемо сутність цього підходу.

Для моделювання чистого зсуву до зовнішньої поверхні ($r = b$) елементарної комірки необхідно прикласти навантаження

$$\sigma_r(b, \theta) = \sigma_0 \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}(b, \theta) = -\sigma_0 \sin 2\theta.$$

У цих рівностях величина σ_0 є сталою. Для чистого зсуву приймаємо, що осьові деформації для матриці та волокна $\varepsilon_z = 0$.

Для розв'язання задачі про сумісне деформування матриці та волокна необхідно використати рівняння закону Гука. Проте при розв'язуванні задачі про поперечний зсув циліндричної системи «матриця-волокно» для різномодульного матеріалу отримуємо суттєві ускладнення принципового характеру у порівнянні з подібними задачами, розглянутими у розділах 2 та 3. Крайові умови містять тут ненульове дотичне напруження, поле напружень для матриці та волокна також міститиме ненульові дотичні напруження. На відміну від задач, розглянутих у попередніх розділах, введені осі циліндричної системи координат не є головними осями, а співвідношення між деформаціями та напруженнями у межах різномодульної теорії пружності формулюються відносно головних осей. Перехід до них пов'язаний з поворотом координатної системи. Після цього отримуємо задачу визначення напружень, переміщень та деформацій для задачі про складний напружений стан, де головні напруження, що ліють у напрямі координатних осей, можуть мати будь-які знаки. Області розтягу чи стиску циліндрів, що моделюють матрицю та волокно, визначатимуться комбінаціями знаків головних напружень у областях матриці та волокна, де зберігається сталість цих знаків. Визначення меж цих областей пов'язане зі значними технічними

труднощами. Тому пропонується альтернативний підхід до визначення ефективних сталих у площині ізотропії трансропного композиту, що ґрунтується на знаходженні поперечного модуля зсуву на основі розв'язання задачі про крутіння циліндрів, що моделюють матрицю, волокно та однорідний композит.

Отже, потрібно визначити ефективний модуль зсуву у площині ізотропії:

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}. \quad (4.1)$$

Згідно з прийнятими допущеннями, він залишається незмінним при розтязі та стиску, тобто виконується рівність

$$G_{23}^+ = \frac{E_2^+}{2(1 + \nu_{23}^+)} = G_{23}^- = \frac{E_2^-}{2(1 + \nu_{23}^-)} \quad (4.2)$$

Для визначення ефективного модуля зсуву розв'яжемо дві задачі про крутіння – задачу про крутіння складеного циліндра, що моделює систему «матриця-волокно», та задачу про крутіння однорідного циліндра, що моделює композит.

4.2. Задача про крутіння циліндричної системи «матриця-волокно»

Нехай до зовнішньої поверхні елементарної циліндричної комірки, що складається з матриці та волокна, прикладено крутильний момент M , під дією якого відбувається кручення цієї комірки. Розглянемо її переріз площиною, перпендикулярною до осі циліндричної комірки. Крутильний момент створює у кожній його точці поле дотичних напружень. При цьому дотичне напруження розподіляється лінійно за товщиною циліндра, тобто є

лінійною функцією радіальної координати. У точках волокна дотичне напруження має вигляд:

$$\tau^\circ = \tau_a \cdot \frac{r}{a}, \quad (4.3)$$

де τ_a – дотичне напруження, що діє при $r = a$.

Відносний кут закручування $\frac{d\varphi}{dz}$ пов'язаний з дотичним напруженням співвідношенням:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tau}{G \cdot r}. \quad (4.4)$$

У (4.4) $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву. Для відносних кутів закручування

у точках волокна та матриці виконуються рівності:

$$\frac{d\varphi^\circ}{dz} = \frac{\tau^\circ}{G^\circ \cdot r}, \quad \frac{d\varphi^*}{dz} = \frac{\tau^*}{G^* \cdot r}. \quad (4.5)$$

На поверхні контакту матриці та волокна $r = a$ відносний кут закручування є неперервною функцією, тому виконується рівність:

$$\left. \frac{d\varphi^\circ}{dz} \right|_{r=a} = \left. \frac{d\varphi^*}{dz} \right|_{r=a}. \quad (4.6)$$

З рівностей (4.5) та (4.6) випливає, що при $r = a$ для дотичних напружень матриці та волокна виконується рівність:

$$\tau^*(a) = \frac{G^*}{G^\circ} \tau^\circ(a) = \frac{G^*}{G^\circ} \tau_a. \quad (4.7)$$

У матриці дотичне напруження також розподілене за лінійним законом.

Тут маємо: $\tau^* = k \cdot r$. Константу k визначаємо з умови:

$$\tau^*(a) = ka = \frac{G^*}{G^\circ} \cdot \tau_a \quad (4.8)$$

Звідси коефіцієнт k знаходимо у вигляді:

$$k = \frac{G^* \tau_a}{G^\circ \cdot a}. \quad (4.9)$$

Дотичне напруження у точках матриці набуває вигляду:

$$\tau^* = \frac{G^*}{G^\circ} \cdot \frac{r}{a} \cdot \tau_a. \quad (4.10)$$

Крутильний момент M , прикладений до зовнішньої поверхні циліндричної комірки $r = b$, створює тут дотичне напруження τ_b . При цьому виконується рівність:

$$\tau^* = \tau_b \cdot \frac{r}{b}. \quad (4.11)$$

Виразимо дотичне напруження τ_b через напруження τ_a :

$$\tau^*(a) = \tau_b \cdot \frac{a}{b} = \frac{G^*}{G^\circ} \tau_a \Rightarrow \tau_b = \frac{G^*}{G^\circ} \cdot \frac{b}{a} \cdot \tau_a. \quad (4.12)$$

Тоді вираз (4.11) для дотичного напруження у матриці набуває вигляду:

$$\tau^* = \frac{G^*}{G^\circ} \cdot \frac{r}{a} \cdot \tau_a. \quad (4.13)$$

Запишемо вираз для крутильного моменту M при $r = b$:

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_0^a \tau^\circ r^2 dr + 2\pi \int_a^b \tau^* r^2 dr = 2\pi \int_0^a \tau_a \cdot \frac{r^3}{a} dr + \\ &+ 2\pi \int_a^b \tau_a \cdot \frac{G^*}{G^\circ} \cdot \frac{r^3}{a} dr = \frac{\pi \cdot \tau_a}{2a} \left[a^4 + \frac{G^*}{G^\circ} (b^4 - a^4) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Отриманий вираз далі буде використано у умові узгодження для визначення ефективного поперечного модуля зсуву.

4.3 Визначення ефективного поперечного модуля зсуву

Розглянемо крутіння однорідного трансропного циліндра при прикладанні до нього при $r = b$ крутильного моменту M . Відносний кут закручування має вигляд:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{G_{23} \cdot J_r} = \frac{2M}{\pi \cdot G_{23} \cdot b^4}. \quad (4.15)$$

При $r = b$ відносний кут закручування матриці дорівнює відносному куту закручування зовнішньої поверхні однорідного циліндра. Враховуючи рівність (4.15), останній кут дорівнює:

$$\left. \frac{d\varphi}{dz} \right|_{r=b} = \frac{2M}{\pi \cdot G_{23} \cdot b^4} = \frac{\tau_a}{a \cdot G_{23}} \left[f^2 + \frac{G^*}{G^\circ} (1 - f^2) \right]. \quad (4.16)$$

Кут закручування матриці при $r = b$ має вигляд:

$$\left. \frac{d\varphi^*}{dz} \right|_{r=b} = \frac{\tau^*}{G^* b} = \frac{\tau_a}{a \cdot G^\circ}. \quad (4.17)$$

Прирівнявши (4.16) та (4.17), з отриманої рівності знаходимо ефективний поперечний модуль зсуву у вигляді:

$$G_{23} = G^\circ f^2 + G^* (1 - f^2). \quad (4.18)$$

Отже, отримано співвідношення

$$\frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} = G^\circ f^2 + G^* (1 - f^2), \quad (4.19)$$

де E_2 и ν_{23} – ефективні значення поперечного модуля пружності та коефіцієнту Пуассона у площині ізотропії транстропного композиту.

4.4. Визначення пружних коефіцієнтів E_2 та ν_{23} у площині ізотропії для розтягу та стиску

Враховуючи незмінність модуля зсуву у площині ізотропії при розтягу та стиску, для різномодульного матеріалу маємо:

$$\frac{E_2^+}{2(1 + \nu_{23}^+)} = \frac{E_2^-}{2(1 + \nu_{23}^-)} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}. \quad (4.20)$$

У розділі 3 отримані співвідношення, що пов'язують поперечний модуль пружності та коефіцієнт Пуассона при розтягу та стиску. Для випадку розтягу маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1-v_{23}^+}{E_2^+} &= \frac{(1-v_+^\circ)(f(1+v_+^*)+(1-v_+^*))}{d_2-d_1} + \frac{E_+^\circ(1+v_+^*)(1-v_+^*)(1-f)}{E_+^*(d_2-d_1)} + \\ &+ \frac{d^\circ f(f-1)(v_+^*E_+^\circ(1+v_+^*)+E_+^*(v_+^*(1-v_+^\circ)-2v_+^\circ))}{E_+^*(d_2-d_1)(d^*f+d^\circ(1-f))} \end{aligned} \quad (4.21)$$

У рівності (4.21) використано наступні позначення:

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{4v_-^\circ E_-^* - 2v_-^*(E_-^\circ(1+v_-^*)+E_-^*(1-v_-^\circ))}{E_-^*}, \\ d_1^\circ = -d^\circ &= \frac{(E_-^\circ(f(1-v_-^*-2v_-^*v_+^*)+(1+v_-^*))+E_-^*(1-f)(1-v_-^\circ-2v_+^\circ v_-^\circ))}{E_+^\circ}, \\ d_1^* = d^* &= \frac{(E_-^*(f-1)(1-v_-^\circ-2v_-^*v_+^*)-E_-^\circ(f(1-v_-^*-2v_+^\circ v_-^\circ)+(1+v_-^*)))}{E_+^*}, \\ d_1 &= E_+^*(f-1)(1-v_+^\circ), \quad d_2 = E_+^\circ(f(1-v_+^*)+(1+v_+^*)). \end{aligned}$$

Позначимо праву частину рівності (4.19) для випадку розтягу через A_1^+ , а праву частину рівності (4.21) через A_2^+ :

$$\begin{aligned} A_1^+ &= \frac{E_+^\circ}{2(1+v_+^\circ)} \cdot f^2 + \frac{E_+^*}{2(1+v_+^*)} (1-f^2). \quad (4.22) \\ A_2^+ &= \frac{(1-v_+^\circ)(f(1+v_+^*)+(1-v_+^*))}{d_2-d_1} + \frac{E_+^\circ(1+v_+^*)(1-v_+^*)(1-f)}{E_+^*(d_2-d_1)} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{d^o f (f - 1) \left(v_+^* E_+^o (1 + v_+^*) + E_+^* (v_+^* (1 - v_+^o) - 2v_+^o) \right)}{E_+^* (d_2 - d_1) (d^* f + d^o (1 - f))}.$$

(4.23)

Отримуємо систему:

$$\frac{E_2^+}{2(1 + v_{23}^+)} = A_1^+,$$

$$\frac{1 - v_{23}^+}{E_2^+} = A_2^+.$$
(4.24)

З цієї системи знаходимо:

$$E_2^+ = \frac{4A_1^+}{1 + A_1^+ A_2^+},$$
(4.25)

$$v_{23}^+ = \frac{1 - 2A_1^+ A_2^+}{1 + 2A_1^+ A_2^+}.$$
(4.26)

Щоб отримати значення цих пружних констант при стиску, потрібно у виразах (4.25)-(4.26) знаки у індексах замінити на протилежні. Отримуємо наступні формули:

$$E_2^- = \frac{4A_1^-}{1 + A_1^- A_2^-},$$
(4.27)

$$v_{23}^- = \frac{1 - 2A_1^- A_2^-}{1 + 2A_1^- A_2^-}.$$
(4.28)

У останніх формулах

$$A_1^- = \frac{E_-^\circ}{2(1+v_-^\circ)} \cdot f^2 + \frac{E_-^*}{2(1+v_-^*)} (1-f^2). \quad (4.29)$$

$$A_2^- = \frac{(1-v_-^\circ)(f(1+v_-^*) + (1-v_-^*))}{c_2 - c_1} + \frac{E_-^\circ(1+v_-^*)(1-v_-^*)(1-f)}{E_-^*(c_2 - c_1)} +$$

$$+ \frac{c^\circ f(f-1)(v_-^* E_-^\circ(1+v_-^*) + E_-^*(v_-^*(1-v_-^\circ) - 2v_-^\circ))}{E_-^*(c_2 - c_1)(c^* f + c^\circ(1-f))}. \quad (4.30)$$

$$c_0 = \frac{4v_+^\circ E_+^* - 2v_+^*(E_+^\circ(1+v_+^*) + E_+^*(1-v_+^\circ))}{E_+^*},$$

$$c_1^\circ = -c^\circ = \frac{(E_+^\circ(f(1-v_+^* - 2v_-^* v_+^*) + (1+v_+^*))) + E_+^*(1-f)(1-v_+^\circ - 2v_+^\circ v_-^\circ)}{E_-^\circ},$$

$$c_1^* = c^* = \frac{(E_+^*(f-1)(1-v_+^\circ - 2v_-^* v_+^*) - E_+^\circ(f(1-v_+^* - 2v_-^* v_+^*) + (1+v_+^*)))}{E_-^*},$$

$$c_1 = E_-^*(f-1)(1-v_-^\circ), \quad c_2 = E_-^\circ(f(1-v_-^*) + (1+v_-^*)).$$

Таким чином, отримані вирази для ефективних сталих для трансропного волокнистого композиту, а саме поперечного модуля пружності та коефіцієнта Пуассона у площині ізотропії цього матеріалу.

За отриманими співвідношеннями (4.25), (4.26) виконано розрахунок технічних сталих E_2^+ та v_{23}^+ . Залежності цих величин від відносної частки волокна у композиті з розглянутими у попередньому розділі параметрами наведено на рисунках 4.1 та 4.2. На рисунках 4.3 та 4.4 наведено аналогічні криві для ефективних констант E_2^+ та v_{23}^+ . Тут розрахунок виконувався за формулами (4.27)-(4.28).

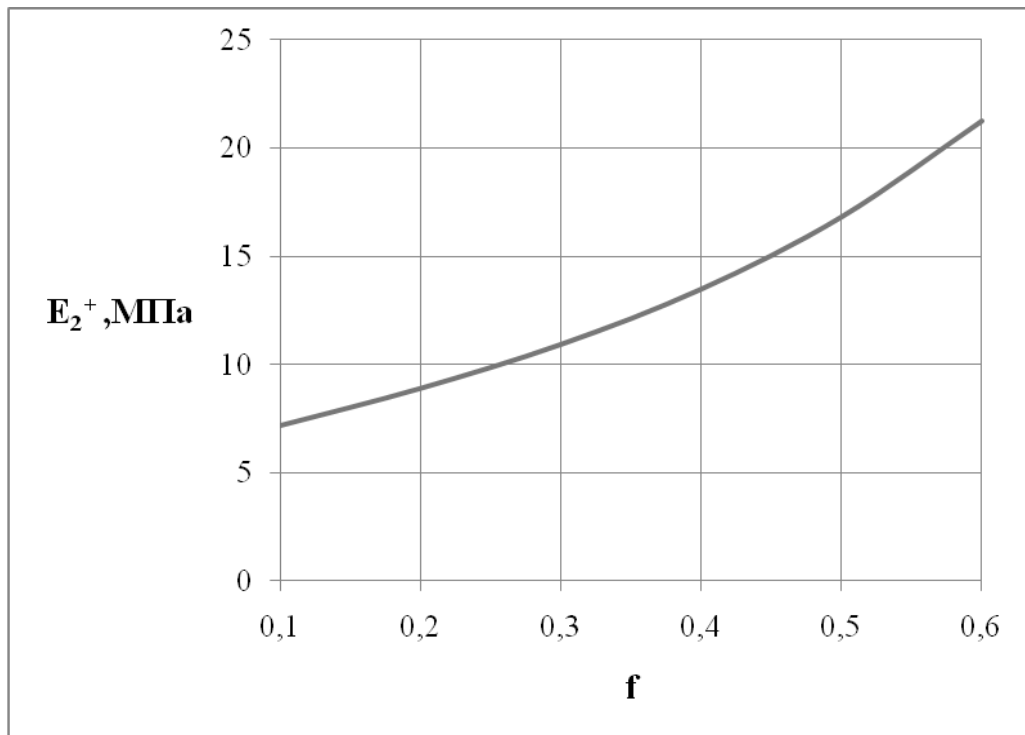


Рис. 4.1 Залежність E_2^+ від відносної частки волокна у композиті

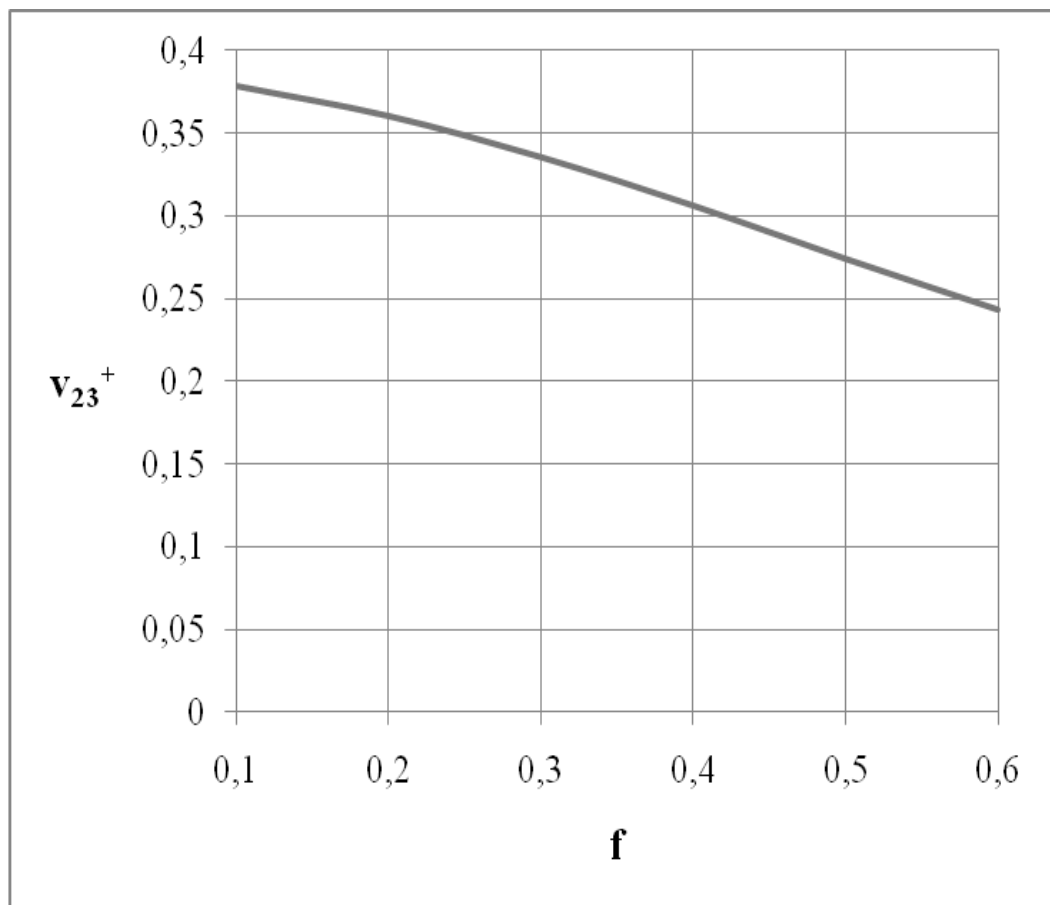


Рис. 4.2 Залежність ν_{23}^+ від відносної частки волокна у композиті

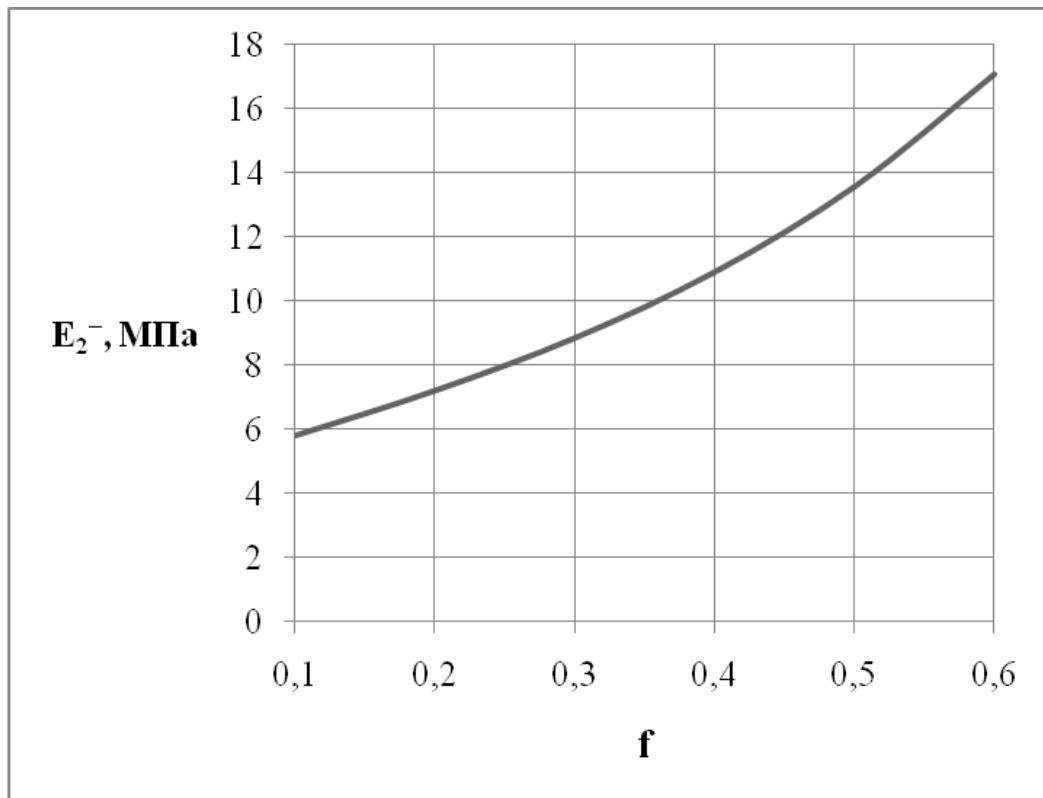


Рис. 4.3 Залежність E_2^- від відносної частки волокна у композиті

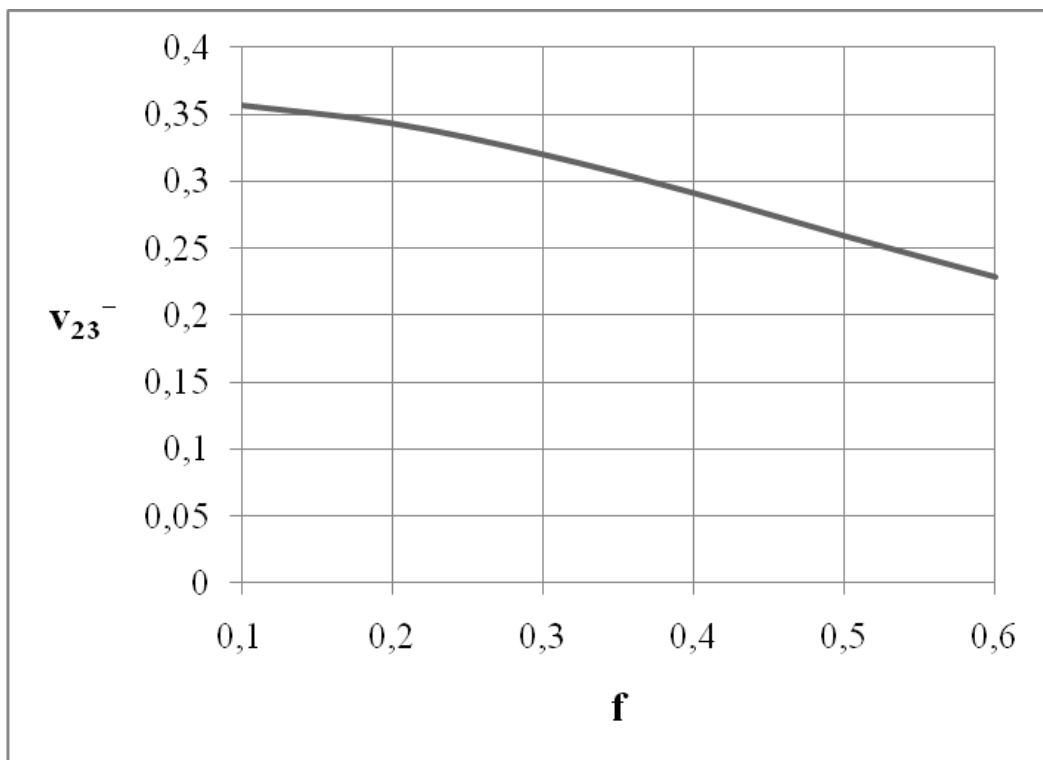


Рис. 4.4 Залежність ν_{23}^- від відносної частки волокна у композиті

Зазначимо, що максимальне перевищення значення ефективного поперечного модуля пружності E_2^+ над E_2^- складає близько 28%. Аналогічне перевищення для коефіцієнту Пуассона ν_{23} складає близько 6%.

Висновки за розділом 4

1. На основі розв'язання задачі про крутіння складеного циліндра, що моделює систему «матриця-волокно», та задачі про крутіння однорідного циліндра, що моделює композит, з використанням результатів розв'язання задачі про поперечний розтяг елементарної комірки композиту вперше отримано формулу для визначення ефективного поперечного модуля пружності трансверсально-ізотропного композитного матеріалу у площині ізотропії.
2. Вперше отримано формулу для визначення ефективного коефіцієнту Пуассона різномодульного трансропного композиту у площині його ізотропії.
3. Отримані ефективні сталі дозволяють дослідити механічні властивості трансропного волокнистого різномодульного композиту у площині його ізотропії в залежності від характеристик його складових – матриці та волокна, а також структури композиту.
4. Ефективні пружні сталі у площині ізотропії композиту визначені на основі використання кінематичних умов узгодження – рівності радіальних переміщень на зовнішній поверхні матриці та однорідної комірки композиту.

ВИСНОВКИ

Здійснений у роботі аналіз існуючих концепцій дослідження механічних характеристик різномодульних композиційних матеріалів засвідчив актуальність розв'язання важливої науково-технічної задачі – розробки математичної моделі гомогенізації різномодульного трансверсально-ізотропного волокнистого композиційного матеріалу. Розв'язання цієї задачі пропонується у даному дисертаційному дослідженні. Гомогенізація трансверсально-ізотропного різномодульного волокнистого композиту здійснена на основі застосування кінематичних умов узгодження переміщень точок однорідного композиту, матриці та волокна. При цьому отримано наступні нові результати:

1. Запропоновано узагальнення співвідношень між напруженнями та деформаціями ізотропного різномодульного матеріалу на випадки поздовжнього та поперечного розтягу та стиску різномодульного трансверсально-ізотропного композиту.
2. Отримано формулу для визначення ефективних поздовжніх та поперечних модулів пружності при розтягу та стиску різномодульного трансверсально-ізотропного волокнистого композиту.
3. Отримано формули для ефективних значень коефіцієнтів Пуассона при поздовжньому та поперечному розтягу та стиску різномодульного трансверсально-ізотропного композитного матеріалу.
4. Отримані вирази для ефективних пружних сталих композитного матеріалу дозволяють дослідити залежності цих величин від механічних характеристик його складових – матриці та волокна, а також від об'ємної частки волокна у матеріалі композиту.
5. Порівняння отриманих значень ефективних сталих при розтягу та стиску свідчить, що для зразка, що досліджувався, максимальне перевищення величини E_1 при розтягу над значенням цього показника для стиску становить 25% перевищує відповідні значення цього показника при

стиску. Значення ефективного коефіцієнта Пуассона ν_{12} для розтягу у середньому на 40% перевищує його значення при стиску. Значення ефективного поперечного модуля пружності E_2^+ у середньому на 28% перевищує значення E_2^- цього показника при розтязі. Аналогічне перевищення для коефіцієнту Пуассона ν_{23} складає близько 6%.

Розроблена методика гомогенізації волокнистого композиту враховує відмінності механічних характеристик його складових при розтягу та стиску, що обумовлює відповідні відмінності у значеннях ефективних пружних сталих. Застосування запропонованої у роботі моделі та методики розрахунку механічних характеристик дозволить підвищити точність розрахунків конструкційних елементів, виготовлених з композитів, на міцність та врахувати фактор різномодульності при дослідженні їх деформування під дією статичних та динамічних навантажень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Смолянкова Т.М. (2016). Визначення ефективного модуля зсуву односпрямованого композиту при нормальному розподілі радіуса волокна. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*, 127-135.
2. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O., Smoliankova T. (2018). Effective Characteristics of the Viscoelastic Fiber-reinforced Composite with Transversally Isotropic Components under Transverse Shear. *Mechanika 2018. Proceedings of the 23th international scientific conference. Kaunas University of Technology*, 31- 35.
3. Grebenyuk S., Klymenko M., Smoliankova T., Koval R. (2019). Effective Characteristics of the Multi-Modular Composites under Transverse Stretching. *Trans Tech Publication Ltd*, 968, 511-518.
4. Grebenyuk S., Smoliankova T., Klymenko M., Kudin O. (2020). The homogenization of multi-modular composites at their longitudinal deformation. *Eastern European Journal of enterprise technologies*, 3/7 (105), 13-19.
5. Grebenyuk S.M., Smoliankova T.M., Klymenko M.I. (2020). Model of homogenization of the multi-modular transtropic fibrous composite. *Вісник Запорізького національного університету. Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя: Видавничий дім «Гельветика», 2, 5-10.
6. Портной К. И. и др. (1979). *Структура и свойства композиционных материалов*. Москва: Машиностроение.
7. Лехницкий С. Г. (1977). *Теория упругости анизотропного тела*. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука».

8. Tang T. (2008). *Variational Asymptotic Micromechanics Modeling of Composite Materials*. Logan: Utah State University.
9. Tenek L. T., Argyris J. (1997). *Finite Element Analysis for Composite Structures*. Dordrecht: Kluwer academic publishers.
10. Yu W., Tang T. (2010). Variational asymptotic method for unit cell homogenization. *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures*, 116–130.
11. Zeng T., Wu L., Guo L. (2004). Mechanical analysis of 3D braided composites: a finite element model. *Composite Structures*, 64, 399–404.
12. Ramos R. and etc. (2001). Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents – I. Elastic and square symmetry. *Mechanics of Materials*, 33, 223–235.
13. López-Realpozo J.C. and etc. (2014). Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers. *International Journal of Solids and Structures*, 51(6), 1253-1262.
14. Kari S. and etc. (2008). Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites. *Composites Science and Technology*, 68(3-4), 684-691.
15. . and etc. (2011). Influence of parallelogram cells in the axial behaviour of fibrous composite. *International Journal of Engineering Science*, 49(1), 75-84.
16. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. (2012). Исследование процессов разрушения композиционных материалов на базе метода асимптотической гомогенизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки»*, 6, 101–113.
17. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. (2012). Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 24(5), 3-20.

18. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. (2009). Об упругих свойствах композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 21(4), 96-110.
19. Patel H. P., Kennedy R. H. (1982). Nonlinear finite element analysis for composite structures of axisymmetric geometry and loading. *Computers and Structures*, 15(1), 79-84.
20. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. (2003). *Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры*. Москва: Едиториал УРСС.
21. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. (2012). Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 24(5), 3-20.
22. Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В. (2008). *Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры*. Днепропетровск: Пороги.
23. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикун Е.Н., Назаренко Л.В. (1993). *Механика композитов. Статистическая механика и эффективные свойства материалов* (Т. 2). Київ: Наукова думка.
24. Kwon Y. W., Allen D. H., Talreja R. (2007). *Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures*. New York: Springer.
25. Ko Y.-F., Ju J. W. (2012). New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. 223, 2437-2458.
26. Zhong W., Pan N. (2003). A computer simulation of single fiber pull out process in a composite. *Journal of Composite Materials*, 37(21), 1951-1969.
27. Куимова Е. В., Труфанов Н. А. (2009). Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного

- волокнистого композита с вязкоупругими компонентами. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, 4(70), 129-148.
28. Gosz M., Moran B., Achenbach J. D. (1991). Effect of a viscoelastic interface on the transverse behavior of fiber-reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 27, 1757-1771.
29. Kamiński M. (2008). Homogenization of fiber-reinforced composites under the stochastic aging process. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6, 361-370.
30. Medeiros R. and etc. (2012). Effective properties evaluation for smart composite materials. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 34, 362-370.
31. Mukhopadhyay M. (2005). *Mechanics of Composite Materials and Structures*. Hyderabad: Universities Press.
32. H. Teodorescu and etc. (2008). Some averaging methods in the micromechanics of composite materials with periodic structure. *10th WSEAS Int. Conf. on Automatic Control, Modelling and Simulation (ACMOS'08)*, 210-214.
33. Srivastava V. K. and etc. (2011). Analysis of particles loaded fiber composites for the evaluation of effective material properties with the variation of shape and size. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 3(1), 52-68.
34. Klusemann B., Svendsen B. (2010). Homogenization methods for multi-phase elastic composites: comparisons and benchmarks. *Technische mechanik*, 30(4), 374-386.
35. Zhang Y., Xia Z., Ellyin F. (2005). Nonlinear viscoelastic micromechanical analysis of fibre-reinforced polymer laminates with damage evolution. *International Journal of Solids and Structures*, 42(2), 591-604.
36. Yao Y., Chen S., Chen P. (2013). The effect of a graded interphase on the mechanism of stress transfer in a fiber-reinforced composite. *Mechanics of Materials*, 58, 35-54.

37. Würkner M., Berger H., Gabbert U. (2011). On numerical evaluation of effective material properties for composite structures with rhombic fiber arrangements. *International Journal of Engineering Science*, 49, 322-332.
38. Yan P., Jiang C. P., Song F. (2011). An eigenfunction expansion-variational method for the anti-plane electroelastic behavior of three-phase fiber composites. *Mechanics of Material*, 43, 586-597.
39. N. Willoughby and etc. (2012). Homogenization methods to approximate the effective response of random fibre-reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 49, 1421-1433.
40. Walter J. D., Patel H. P. (1979). Approximate expressions for the elastic constants of cord-rubber laminates. *Rubber Chemistry and Technology*, 52(4), 710-724.
41. Sai V.S. and etc. (2013). Mechanical properties of hybrid elliptical fiber reinforced lamina with equal fiber volume fractions. *International Journal of Current Engineering and Technology*, 3(1), 102-107.
42. Zhong W., Pan N. (2003). A computer simulation of single fiber pull out process in a composite. *Journal of Composite Materials*, 37(21), 1951-1969.
43. Teodorescu-Draghicescu H. and etc. (2010). Simulation of elastic properties of sheet molding compounds. *Recent advances in applied mathematics, Proceedings of the American conference on applied mathematics (American-Math '10)*, 642-646.
44. Ochoa O. O., Reddy J. N. (1992). *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Dordrecht: Kluwer academic publishers.
45. Жук Я. А., Сенченков И. К. (2003). К вопросу об определении макрохарактеристик однонаправленного волокнистого композита из физически нелинейного материала при гармоническом нагружении. *Системні технології*, 4(27), 62-67.
46. Новиков В. У., Бурьян О. Ю. (2000). Моделирование межфазного слоя в анизотропных композитах. *Прикладная физика*, 1, 67-78.

47. Бурьян О. Ю., Новиков В. У. (2002). Моделирование межфазного слоя в композитах с полимерной матрицей. Определение его структуры и механических свойств. *Механика композитных материалов*, 38(3), 289-304.
48. Булычев Г. Г., Кукуджанов В. Н. (1993). Динамическое разрушение предварительно-напряженного волокнистого композита, вызванное обрывом волокна. *Механика твердого тела*, 3, 169-176.
49. Фильштинський Л. А. та ін. (2013). Моделювання магнітних властивостей гібридних волокнистих феромагнітних композитів регулярної структури. *Вестник Херсонского национального технического университета*, 2(47), 357-362.
50. Фильштинський Л. А., Загряжська П. І. (2010). Моделювання композитного матеріалу з в'язкопружними компонентами. *Вісник Запорізького національного університету*, 2, 141-144.
51. Пагано Н. Дж. (1978). Роль эффективных модулей в исследовании упругих свойств слоистых композитов. *Механика композиционных материалов*, 2, 13-37.
52. Пагано Н. Дж. (1978). Точные модули анизотропных слоистых композитов. *Механика композиционных материалов*, 2, 38-60.
53. Yang F., Pitchumani R. (Eds.). (2003). Influence of interphase material property gradients on the micromechanics of fibrous thermosetting-matrix composites. *14th International Conference on Composite Materials (ICCM 14)*. San Diego.
54. Yao Y., Chen S. (2012). The effects of fiber's surface roughness on the mechanical properties of fiber-reinforced polymer composites. *Journal of Composite Materials*, 47(23), 2909-2923.
55. Yu W., Tang T. (2007). A variational asymptotic micromechanics model for predicting thermoelastic properties of heterogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 44, 7510-7525.

56. Васильев В. В. (1988). *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва: Машиностроение.
57. Лагздинь А. Ж., Тамуж В. П., Тетерс Г. А., Крегерс А. Ф. (1989). *Метод ориентационного усреднения в механике материалов*. Рига: Зинатне.
58. Победря Б. Е. (1984). *Механика композиционных материалов*. Москва: Изд-во Моск. ун-та.
59. Soutis C., Beaumont P. W. R. (2005). *Multi-scale modelling of composite material systems: the art of predictive damage modelling*. Cambridge: Woodhead Publishing Limited.
60. Teodorescu-Draghicescu H. and etc. (2009). A homogenization method for pre-impregnated composite materials. *Proceedings of the World Congress on Engineering*. London, U.K.
61. Soares C. A. M., Soares C. M. M., Freitas M. J. M. (1999). *Mechanics of composite materials and structures*. Dordrecht: Kluwer academic publishers.
62. Bogdanovich A., Pastore C. M. (1996). *Mechanics of Textile and Laminated Composites: With Applications to Structural Analysis*. London: Chapman & Hall.
63. Кучер М. К., Заразовский М. М. (2010). Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних констант пружності волокнистих композитів. *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. Серія: *Машинобудування*, 58, 24-29.
64. Кучер Н. К., Заразовский М. Н., Земцов М. П. (2006). Деформирование слоистых эпоксидных композитов, армированных высокопрочными волокнами. *Проблемы прочности*, 38(1), 41-54.
65. Silva L.J. and etc. (2012). Micromechanical analysis of hybrid composites reinforced with unidirectional natural fibres, silica microparticles and maleic anhydride. *Materials Research*, 15(6), 1003-1012.

66. Чу Т.-В. , Ко Ф. (Ред.). (1991). *Тканые конструкционные композиты*: Пер. с англ. Москва: Мир.
67. Болтыров А. А. (2007). Определение упругих эффективных характеристик однонаправленного резинокордного материала. *Проблемы шин и резинокордных композитов: труды восемнадцатого симпозиума*, 1, 73-86.
68. Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И. (2012). *Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей*. Днепропетровск-Запорожье: Запорожский национальный университет.
69. Растеряев Ю. К., Агальцов Г. Н. (2005). Составные резинокордные материалы и механика их деформирования. *Геотехническая механіка*, 60, 200-248.
70. Растеряев Ю. К. (1999). Теория деформирования составных анизотропных резинокордных материалов, используемых в каркасах пневматических шин. *Геотехническая механіка*, 11, 84-100.
71. Растеряев Ю. К., Каспаров А. А. (1996). Упругие характеристики и механика деформирования составных анизотропных резинокордных систем пневматических шин. *Труды I Международного симпозиума по механике эластомеров*, II, 47-66.
72. Pande G. N., Beer G., Williams J. R. (1990). *Numerical methods in rock mechanics*. Chichester: Wiley.
73. Бурдун Е. Т., Криптюк А. В. (2011). Оптимизация структуры намоточной тороидальной оболочки при ограничениях по устойчивости. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць*, 12, 24-32.
74. Шишкин Б. М., Левашов А. П. (2013). Численный алгоритм идентификации характеристик жесткости однонаправленно армированного слоя по заданным модулям упругости и коэффициенту Пуассона пакета композиционных слоев. *Материалы XVIII*

Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, 457-459.

75. Дария Заде С., Львов Г. И. (2015). Численная методика определения эффективных механических характеристик однонаправленно армированного композита. *Проблемы прочности*, 4, 31-40.
76. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. (2010). Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования. *Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля*, 10(152/2), 41-48.
77. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. (2009). Об упругих свойствах композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 21(4), 96-110.
78. Кочетков В. А. (1993). Прогнозирование термического деформирования слоистых гибридных композитов с учетом термовязкоупругих свойств связующего и волокон. *Механика композитных материалов*, 3, 317-323.
79. Плуме Э. З. (1992). Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа. *Механика композитных материалов*, 4, 557-566.
80. Труфанов Н. А., Сметанников О. Ю. (1990). Приближенное определение трансверсальных вязкоупругих свойств органоволокна в составе однонаправленного органопластика. *Численное моделирование статического и динамического деформирования конструкций*, 114-118.
81. Максимов Р. Д., Плумэ Э. (2001). Длительная ползучесть органостеклопластика. *Механика композитных материалов*, 37(4), 435-450.
82. Куимова Е. В., Труфанов Н. А. (2009). Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, 4(70), 129-148.

83. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. (2005). Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. *Прикладная механика*, 41(5), 9-21.
84. Булат А. Ф., Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Клименко М. И. (2019). Определение эффективных характеристик волокнистого вязкоупругого композита с трансверсально-изотропными составляющими. *Проблеми міцності*, 2, 15-25.
85. Клименко М. И., Гребенюк С. Н., Богуславская А. М. (2015). Характеристики композиционного материала с трансверсально-изотропными вязкоупругими матрицей и волокном. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*, 3, 94-101.
86. Grebenyuk S. and etc. (2015). Effective longitudinal elastic modulus of the composite with viscoelastic matrix and transtropic fiber. *20th International Scientific Conference Mechanika*, 96-100.
87. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O., Smoliankova T. (2018). Effective Characteristics of the Viscoelastic Fiber-reinforced Composite with Transversally Isotropic Components under Transverse Shear. *Mechanika 2018: proceedings of the 23th international scientific conference*, 31-35.
88. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O. (2016). Mechanical properties of the composite with viscoelastic isotropic matrix and transversally isotropic fiber under transverse tension. *Mechanika 2016. Proceedings of the 21th international scientific conference*, 96-100.
89. Карпинос Д.М. (Ред). (1985). *Композиционные материалы: справочник*. Киев: Наукова думка.
90. Васильева В.В., Тарнопольского Ю.М. (Ред.). (1990). *Композиционные материалы: Справочник*. Москва : Машиностроение.
91. Kelly A. (Eds). (1989). *Concise encyclopedia of composite materials*. Cambridge: MIT Press.

- 92.Гребенюк С. Н. (2012). Определение модуля сдвига композиционного материала с транслопными матрицей и волокном. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць*, 13, 92-98.
- 93.Гребенюк С. Н. (2012). Определение продольного модуля упругости композита на основе энергетического условия согласования. *Вестник Херсонского национального технического университета*, 2(45), 106-110.
- 94.Гребенюк С. Н. (2010). Определение упругих постоянных резинокордного материала при помощи энергетического критерия согласования. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць*, 11, 79-86.
- 95.Гребенюк С. Н. (2011). Упругие характеристики композиционного материала с транслопной матрицей и волокном. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць*, 12, 62-68.
- 96.Гребенюк С. М. (2012). Визначення пружних сталих композита з транслопними матрицею та волокном на основі кінематичної умови узгодження. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*, 1, 62-76.
- 97.Гребенюк С.М., Гоменюк С.І., Клименко М.І. (2019). *Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Монографія*. Херсон: Видавничий дім «Гельветика»,.
- 98.Клименко М.І., Гребенюк С.М., Гоменюк С.І. (2019). *Ефективні механічні характеристики в'язкопружних композитів. Монографія*. Херсон: Видавничий дім «Гельветика».
99. Dzyuba A.P., Prokopalo E.F., Dzyba P.A. (2017). Experimental Investigation on the Torsional Stability of Cylindrical Shells Weakened by Circular Holes. *Space Science and Technology*, 49 (6), 829-837.

100. Дзюба А.П., Сафронова І.А., Левитіна Л. Д. (2019). Алгоритм розрахунку циліндричної оболонки зі змінною в окружному напрямку жорсткістю на основі дискретно-континуального підходу. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб.наук.праць*, 30, 53-67.
101. Дзюба А.П., Сіренко В.М., Дзюба А.А., Сафронова І.А. (2018). Моделі та алгоритми оптимізації елементів неоднорідних оболонкових конструкцій. *Актуальні проблеми механіки: Монографія*, 225-244.
102. Rodichev Y. M., Smetankina N. V., Shupikov O. M., Ugrimov S. V. (2018). Stress-strain assessment for laminated aircraft cockpit windows at static and dynamic load. *Strength of Materials*, 50(6), 868-873.
103. Smetankina N., Postnyi O. (2020). Nonstationary heat conduction in multilayer glazing subjected to distributed sources. *Informatyka, Automatyka, Pomiaru w Gospodarce i Ochronie Srodowiska*, 10(2), 28-31.
104. Амбарцумян С.А. (1982). *Разномодульная теория упругости*. М.: Наука.
105. Амбарцумян С.А. (2004). *Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию*. Ереван:РАУ.
106. Цвелодуб И.Ю. (2008). О разномодульной теории упругости. *Прикладная математика и теоретическая физика*, 49(1), 157-164.
107. Цвелодуб И.Ю. (2007). О простейшей разномодульной теории упругости изотропных материалов. *Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия*, 4(54), 366-371.
108. Ершова А.Ю., Мартиросов М.И. (2015). Экспериментальное исследование разномодульных полимерных композитов с мелкодисперсным наполнителем. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 5, 68-72.
109. Бессонов Д.Е., Зезин Ю.Л., Ломакин Е.В. (2009). Разносопротивляемость зернистых композитов на основе

- ненасыщенных полиэфиров. *Известия Саратовского университета*, 9(4/2), 9-13.
110. Пахомов Б.М. (2017). Вариант модели изотропного разномодульного материала. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 6, 35-45.
111. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. (2016). Математические модели деформирования углерод-углеродных композитов. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 5, 11-123.
112. Комков К.Ф. (2008). Особенности упругих свойств высоконаполненных полимерных материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 3, 3-13.
113. Пахомов Б.М. (2014). Условие пластического течения, включающее коэффициент Пуассона. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2, 15-27.
114. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. (1978). Соотношения теории упругости для разномодульного изотропного тела. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 6, 29-34.
115. Ломакин Е.В. (1980). Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 4, 92-99.
116. Ломакин Е.В. (1981). Разномодульность композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1, 23-29.
117. Ломакин Е.В. (2007). Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами. *Физическая мезомеханика*, 10(5), 41-52.
118. Мясников В.П., Олейников А.И. (2007). *Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред*. Владивосток: Дальнаука.
119. Мясников В.П., Олейников А.И. (1992). Основные общие соотношения изотропно-упругой разносопротивляющейся среды. *Доклады АН СССР*, 332(1), 57-60.

120. Саркисян М.С. (1987). О соотношениях теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 5, 87-94.
121. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. (1966). Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. *Инженерный журнал Механика твердого тела*, 2, 44-53.
122. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. (1966). К разномодульной теории упругости. *Инженерный журнал Механика твердого тела*, 6, 64-67.
123. Шапиро Г.С. (1966). О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию. *Инженерный журнал Механика твердого тела*, 2, 123-125.
124. Матченко Н.М., Толоконников Л.А. (1968). О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах. *Инженерный журнал Механика твердого тела*, 6, 108-110.
125. Nassef A.S.E., Dahim M.A. (2016). New Bi-modular Material Approach to Buckling Problem of Reinforced Concrete Columns. *Mechanical Engineering Research*, 6(1), 19-28.
126. Березин А.В. (1990). *Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел*. Москва: Наука.
127. Буренин А.А., Ярунина В.М. (2006). К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. *Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород*, 100-106.
128. Awani Bhushan, Panda S.K. (2018). Experimental and computational correlation of fracture parameters K_{Ic} , J_{Ic} and G_{Ic} for unimodular and bimodular graphite components. *Journal of Nuclear Materials*, 503(Mai), 205-225.

129. Bert C.W., Reddy J.N. (1982). Mechanics of bimodular composite structures. *Proceedings of the IL7A.M Symposium, Virginia Polytech. Inst*, 2-11.
130. Wahba W. El-Tahan, George H. Staab, Sunder H. Advani. June K. Lee (1989). Structural Analysis of Bimodular Materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(5/Mai), 963-981.
131. Золочевский А.А. (1982). Об учете разносопротивляемости в теории ползучести изотропных и анизотропных материалов. *Прикладная математика и теоретическая физика*, 4, 131-138.
132. Золочевский А.А. (1985). К тензорной связи в теориях упругости и пластичности анизотропных композитных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. *Механика композитных материалов*, 1, 53-58.
133. Золочевский А.А. (1986). Напряженно-деформированное состояние в анизотропных оболочках из разномодульных композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1, 166-168.
134. Золочевский А.А. (1985). Определяющие уравнения и некоторые задачи разномодульной теории упругости анизотропных материалов. *Прикладная математика и теоретическая физика*, 4, 131-138.
135. Золочевский А.А. (1987). Соотношения разномодульной теории упругости анизотропных материалов на основе трех смешанных инвариантов. *Динамика и прочность машин*, 46, 85-89.
136. Jones R.M. (1977). Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression. *AIAA Journal*, 15(1), 1625.
137. Jones R.M., Nelson D.A.R. (1976). Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite. *AIAA Journal*, 14(10), 1427-1435.
138. Jones R.M. (1980). Modeling Nonlinear Deformation of CarbonCarbon Composite Materials. *AIAA Journal*, 18(8), 995-1001.

139. Ramana Murthy P.V., Rao K.P. (1984). Finite Element Analysis of Laminated Anisotropic Beams of Bimodulus Materials. *Computers and Structures*, 18(5), 779-787.
140. Reddy J.N., Bert C.W., Hsu Y.S. (1980). Thermal bending of thin rectangular plates of bimodulus composite materials. *Journal Mach. eng*, 22(6), 297-304.
141. Амелина Е.В., Голушко С.К., Ерасов В.С. и др. (2015). О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет. *Вычислительные технологии*, 20(5), 27-52.
142. Бабич Д.В. (2011). Влияние геометрии плоских микрповреждений материалов на его деформационные свойства. *Проблемы прочности*, 3, 160-174.
143. Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Поймушин В.И., Холмогоров С.А. (2015). Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов. *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физ.-матем. науки*, 157(4), 112-132.
144. Мищенко А.В. (2016). Напряженное состояние структурно-неоднородных стержней из разномодульных материалов при термосиловом воздействии. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 4, 43-52.
145. Кривчун И.А., Уманская О.Л. (2016). Интегральные характеристики жесткости составных пластин из разносопротивляющихся материалов. *Фундаментальные исследования*, 3(3), 505-508.
146. Бабешко М.Е., Шевченко Ю.Н. (2005). Упругопластическое осесимметричное напряженно-деформированное состояние слоистых оболочек из изотропных и трансверсально-изотропных разномодульных материалов. *Прикладная механика*, 41, 88-96.
147. Вержбовский Г.Б., Жданов А.Г. (2016). Оценка несущей способности армированных изгибаемых элементов, выполненных из

- композитного материала с нелинейно упругой разномодульной матрицей. *Международный научно-исследовательский журнал*, 4(46/2), 56-58.
148. Кичаева О.В., Убийвовк А.В. (2016). Механизм разрушения кирпичной кладки при одноосном сжатии балки-стенки, опирающейся на разномодульные материалы (экспериментальные исследования). *Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві*, 5, 223-231.
149. Немировский Ю.В., Гребенюк Г.И., Ажермачев А.В. (2007). Расчет ребристых деревянных конструкций с учетом эффектов разномодульности и нелинейного сопротивления. *Известия вузов. Строительство*, 3, 4-12.
150. Садовский В.М. (2003). Реологические модели разномодульных и сыпучих сред. *Дальневосточный математический журнал*, 4(1), 252-263.
151. Горынин Г.Л., Григорьев Ю.И. (2018). Моделирование плит покрытий из древесины и композитных материалов на основе разномодульной теории. *Вестник кибернетики*, 3, 169-179.
152. Трещев А., Журин Е. (2020). Изгиб кольцевых пластин, выполненных из ортотропного нелинейно сопротивляющегося материала. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 16(1), 130-146.
153. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. (2015). Напряженно-деформированное состояние разномодульной пластинки под действием поперечной нагрузки. *Доклады Национальной Академии наук Армении. Механика*, 3, 203-208.
154. Дудко О.В., Лаптева А.А., Чигарев А.В. (2013). К построению математической модели разномодульной изотропно-упругой среды. *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2(16), 61-67.

155. Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. (2015). Математическое моделирование чистого изгиба балки из разномодульного авиационного материала в условиях ползучести. *Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Инженерные исследования*, 1, 113-114.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

**ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В
ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ДЛЯ ІЗОТРОПНОГО ТА
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ТІЛА [97]**

Формули Коші:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \quad (\text{A.6})$$

Рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0; \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0; \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z = 0. \quad (\text{A.9})$$

Закон Гука для ізотропного матеріалу:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_r - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_\theta + \sigma_z) \right); \quad (\text{A.10})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_\theta - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_r + \sigma_z) \right); \quad (\text{A.11})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_z - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_r + \sigma_\theta) \right); \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\tau_{zr}}{G}; \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G}; \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}. \quad (\text{A.15})$$

Зворотний закон Гука:

$$\sigma_r = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right); \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma_\theta = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_\theta + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_z) \right); \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma_z = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \right); \quad (\text{A.18})$$

$$\tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}; \quad (\text{A.19})$$

$$\tau_{zr} = G\gamma_{zr}; \quad (\text{A.20})$$

$$\tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}. \quad (\text{A.21})$$

Закон Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_2} (\sigma_r - (\nu_{21}\sigma_z + \nu_{23}\sigma_\theta)); \quad (\text{A.22})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_2} (\sigma_\theta - (\nu_{21}\sigma_z + \nu_{23}\sigma_r)); \quad (\text{A.23})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_1} (\sigma_z - \nu_{12}(\sigma_r + \sigma_\theta)); \quad (\text{A.24})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} \tau_{r\theta}; \quad (\text{A.25})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{zr}; \quad (\text{A.26})$$

$$\gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{z\theta}. \quad (\text{A.27})$$

Зворотний закон Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\sigma_r = \frac{E_2 (\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_z + (1-\nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_r + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_\theta)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A.28})$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_2 (\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_z + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12})\varepsilon_r + (1-\nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_\theta)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A.29})$$

$$\sigma_z = \frac{E_1 ((1-\nu_{23}^2)\varepsilon_z + \nu_{21}(1+\nu_{23})\varepsilon_r + \nu_{21}(1+\nu_{23})\varepsilon_\theta)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}, \quad (\text{A.30})$$

$$\tau_{zr} = G_{12}\gamma_{zr}; \quad (\text{A.31})$$

$$\tau_{z\theta} = G_{12}\gamma_{z\theta}; \quad (\text{A.32})$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} \gamma_{r\theta}. \quad (\text{A.33})$$

РІВНЯННЯ СТАНУ ДЛЯ ІЗОТРОПНОГО ТА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО МАТЕРІАЛУ (РІЗНОМОДУЛЬНА ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ, ОСІ КООРДИНАТ Є ГОЛОВНИМИ ОСЯМИ)

Закон Гука для ізотропного матеріалу (випадок розтягу вздовж осі z)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_-} \sigma_r - \frac{\nu_-}{E_-} (\sigma_\theta + \sigma_z), \quad (\text{Б.1})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_-} \sigma_\theta - \frac{\nu_-}{E_-} (\sigma_r + \sigma_z), \quad (\text{Б.2})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_+} \sigma_z - \frac{\nu_+}{E_+} (\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (\text{Б.3})$$

Обернений закон Гука для ізотропного матеріалу (випадок розтягу вздовж осі z)

$$\sigma_r = \frac{1}{\Delta} (E_- (1 - \nu_- \nu_+) \varepsilon_r + E_- \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_\theta + E_+ \nu_- (1 + \nu_-) \varepsilon_z), \quad (\text{Б.4})$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\Delta} (E_- \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_r + E_- (1 - \nu_+ \nu_-) \varepsilon_\theta + E_+ \nu_- (1 + \nu_-) \varepsilon_z), \quad (\text{Б.5})$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\Delta} (E_- \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_r + E_- \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_\theta + E_+ (1 - (\nu_-)^2) \varepsilon_z), \quad (\text{Б.6})$$

$$\Delta = (1 + \nu_-)(1 - \nu_- - 2\nu_+ \nu_-).$$

Закон Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу (випадок розтягу вздовж осі z)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_2^-} \sigma_r - \frac{\nu_{23}^-}{E_2^-} \sigma_\theta - \frac{\nu_{21}^-}{E_2^-} \sigma_z, \quad (\text{Б.7})$$

$$\varepsilon_{\theta} = -\frac{\nu_{23}^-}{E_2^-} \sigma_r + \frac{1}{E_2^-} \sigma_{\theta} - \frac{\nu_{21}^-}{E_2^-} \sigma_z, \quad (\text{Б.8})$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{12}^+}{E_1^+} \sigma_r - \frac{\nu_{12}^+}{E_1^+} \sigma_{\theta} + \frac{1}{E_1^+} \sigma_z. \quad (\text{Б.9})$$

Обернений закон Гука для трансверсально-ізоотропного матеріалу
(випадок розтягу вздовж осі z)

$$\sigma_r = \frac{1}{\delta} \left[E_2^- (1 - \nu_{21}^- \nu_{12}^+) \varepsilon_r + E_2^- (\nu_{23}^- + \nu_{21}^- \nu_{12}^+) \varepsilon_{\theta} + E_1^+ \nu_{21}^- (\nu_{23}^- + 1) \varepsilon_z \right], \quad (\text{Б.10})$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{\delta} \left[E_2^- (\nu_{21}^- \nu_{12}^+ + \nu_{23}^-) \varepsilon_r + E_2^- (1 - \nu_{21}^- \nu_{12}^+) \varepsilon_{\theta} + E_1^+ \nu_{21}^- (\nu_{23}^- + 1) \varepsilon_z \right], \quad (\text{Б.11})$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\delta} \left[E_2^- \nu_{12}^+ (1 + \nu_{23}^-) \varepsilon_r + E_2^- \nu_{12}^+ (1 + \nu_{23}^-) \varepsilon_{\theta} + E_1^+ \nu_{21}^- (1 - (\nu_{23}^-)^2) \varepsilon_z \right], \quad (\text{Б.12})$$

$$\delta = 1 - 2\nu_{23}^- \nu_{21}^- \nu_{12}^+ - 2\nu_{12}^+ \nu_{21}^- - (\nu_{23}^-)^2.$$

Закон Гука для ізоотропного матеріалу (випадок розтягу вздовж осі r)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_+} (\sigma_r - \nu_+ (\sigma_{\theta} + \sigma_z)), \quad (\text{Б.13})$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E_+} (\sigma_{\theta} - \nu_+ (\sigma_r + \sigma_z)), \quad (\text{Б.14})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_-} (\sigma_z - \nu_- (\sigma_r + \sigma_{\theta})). \quad (\text{Б.15})$$

Обернений закон Гука для ізоотропного матеріалу (випадок розтягу
вздовж осі r)

$$\sigma_r = \frac{1}{\Delta_1} (E_+ (1 - \nu_- \nu_+) \varepsilon_r + E_+ \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_{\theta} + E_- \nu_+ (1 + \nu_+) \varepsilon_z), \quad (\text{Б.16})$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{\Delta_1} \left(E_+ \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_r + E_+ (1 - \nu_+ \nu_-) \varepsilon_{\theta} + E_- \nu_+ (1 + \nu_+) \varepsilon_z \right), \quad (\text{Б.17})$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\Delta_1} \left(E_+ \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_r + E_+ \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_{\theta} + E_- (1 - (\nu_+)^2) \varepsilon_z \right), \quad (\text{Б.18})$$

$$\Delta_1 = (1 + \nu_+) (1 - \nu_+ - 2\nu_+ \nu_-).$$

Закон Гука для трансверсально-ізо­тропного матеріалу (випа­док розтягу
вздо­вж осі r)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_2^+} \sigma_r - \frac{\nu_{23}^+}{E_2^+} \sigma_{\theta} - \frac{\nu_{21}^+}{E_2^+} \sigma_z, \quad (\text{Б.19})$$

$$\varepsilon_{\theta} = -\frac{\nu_{23}^+}{E_2^+} \sigma_r + \frac{1}{E_2^+} \sigma_{\theta} - \frac{\nu_{21}^+}{E_2^+} \sigma_z, \quad (\text{Б.20})$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{12}^-}{E_1^-} \sigma_r - \frac{\nu_{12}^-}{E_1^-} \sigma_{\theta} + \frac{1}{E_1^-} \sigma_z. \quad (\text{Б.21})$$

Обернений закон Гука для трансверсально-ізо­тропного матеріалу
(випа­док розтягу вздо­вж осі r)

$$\sigma_r = \frac{1}{\delta_1} \left[E_2^+ (1 - \nu_{21}^+ \nu_{12}^-) \varepsilon_r + E_2^+ (\nu_{23}^+ + \nu_{21}^+ \nu_{12}^-) \varepsilon_{\theta} + E_1^- \nu_{21}^+ (\nu_{23}^+ + 1) \varepsilon_z \right], \quad (\text{Б.22})$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{\delta_1} \left[E_2^+ (\nu_{21}^+ \nu_{12}^- + \nu_{23}^+) \varepsilon_r + E_2^+ (1 - \nu_{21}^+ \nu_{12}^-) \varepsilon_{\theta} + E_1^- \nu_{21}^+ (\nu_{23}^+ + 1) \varepsilon_z \right], \quad (\text{Б.23})$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\delta_1} \left[E_2^+ \nu_{12}^- (1 + \nu_{23}^+) \varepsilon_r + E_2^+ \nu_{12}^- (1 + \nu_{23}^+) \varepsilon_{\theta} + E_1^- \nu_{21}^+ (1 - (\nu_{23}^+)^2) \varepsilon_z \right]. \quad (\text{Б.24})$$

$$\delta_1 = 1 - 2\nu_{23}^+ \nu_{21}^+ \nu_{12}^- - 2\nu_{12}^- \nu_{21}^+ - (\nu_{23}^+)^2.$$

**ЕФЕКТИВНІ СТАЛІ ДЛЯ РІЗНОМОДУЛЬНОГО
ВОЛОКНИСТОГО ТРАНСТРОПНОГО КОМПЗИТУ ПРИ РОЗТЯЗІ
ТА СТИСКУ**

$$E_1^+ = \frac{E_-^* E_+^* (1 - \nu_-^*) (d_1 - d_2) (d_+^\circ + f (d_+^* - d_+^\circ))}{2 (E_-^*)^2 \nu_+^* \nu_-^\circ f d_+^* (1 - \nu_-^*) - d_+^\circ E_+^* (1 - \nu_-^* - 2 \nu_-^* \nu_+^*) (d_1 - d_2) - k_1}, \quad (\text{B.1})$$

$$k_1 = 2 d_+^\circ E_-^* \nu_+^* \nu_-^\circ (f E_-^\circ (1 - \nu_-^*) + d_1 - d_2).$$

$$d_+^\circ = \frac{E_+^* (f - 1) (1 - \nu_+^\circ - 2 \nu_-^\circ \nu_+^\circ) - E_+^\circ (f (1 - \nu_+^* - 2 \nu_-^\circ \nu_+^*) + (1 + \nu_+^*))}{E_+^\circ},$$

$$d_1 = E_-^* (f - 1) (1 - \nu_-^\circ),$$

$$d_2 = E_-^\circ (f (1 - \nu_-^*) + (1 + \nu_-^*))$$

$$d_+^* = \frac{E_+^* (f - 1) (1 - \nu_+^\circ - 2 \nu_-^\circ \nu_+^\circ) - E_+^\circ (f (1 - \nu_+^* - 2 \nu_-^\circ \nu_+^*) + (1 + \nu_+^*))}{E_+^*},$$

$$\nu_{12}^+ = \frac{E_+^* (1 - \nu_-^*) (2 f \nu_-^\circ E_-^* d_+^* - \nu_-^* d_+^\circ (d_1 - d_2 + 2 f E_-^\circ))}{2 (E_-^*)^2 \nu_+^* \nu_-^\circ f d_+^* (1 - \nu_-^*) - d_+^\circ E_+^* (1 - \nu_-^* - 2 \nu_-^* \nu_+^*) (d_1 - d_2) - k_1}. \quad (\text{B.2})$$

$$E_1^- = \frac{E_-^* E_+^* (1 - \nu_+^*) (d_3 - d_4) (d_-^\circ + f (d_-^* - d_-^\circ))}{2 (E_-^*)^2 \nu_-^* \nu_+^\circ f d_-^* (1 - \nu_+^*) - d_-^\circ E_-^* (1 - \nu_+^* - 2 \nu_-^* \nu_+^*) (d_3 - d_4) - k_2}, \quad (\text{B.3})$$

$$\nu_{12}^- = \frac{E_-^* (1 - \nu_+^*) (2 f \nu_+^\circ E_+^* d_-^* - \nu_+^* d_-^\circ (d_3 - d_4 + 2 f E_+^\circ))}{2 (E_+^*)^2 \nu_-^* \nu_+^\circ f d_-^* (1 - \nu_+^*) - d_-^\circ E_-^* (1 - \nu_+^* - 2 \nu_-^* \nu_+^*) (d_3 - d_4) - k_2}, \quad (\text{B.4})$$

$$k_2 = 2 d_-^\circ E_+^* \nu_-^* \nu_+^\circ (f E_+^\circ (1 - \nu_+^*) + d_3 - d_4)$$

$$d_3 = E_+^*(f-1)(1-v_+^o), d_4 = E_+^o(f(1-v_+^*) + (1+v_+^*)),$$

$$d_-^o = \frac{E_-^*(f-1)(1-v_-^o - 2v_-^o v_+^o) - E_-^o(f(1-v_-^* - 2v_+^o v_-^*) + (1+v_-^*))}{E_-^o},$$

$$d_-^* = \frac{E_-^*(f-1)(1-v_-^o - 2v_+^* v_-^o) - E_-^o(f(1-v_-^* - 2v_-^* v_+^*) + (1+v_-^*))}{E_-^*}.$$

$$E_2^+ = \frac{4A_1^+}{1 + A_1^+ A_2^+}, \quad (\text{B.5})$$

$$v_{23}^+ = \frac{1 - 2A_1^+ A_2^+}{1 + 2A_1^+ A_2^+}. \quad (\text{B.6})$$

$$A_1^+ = \frac{E_+^o}{2(1+v_+^o)} \cdot f^2 + \frac{E_+^*}{2(1+v_+^*)} (1-f^2).$$

$$A_2^+ = \frac{(1-v_+^o)(f(1+v_+^*) + (1-v_+^*))}{d_2 - d_1} + \frac{E_+^o(1+v_+^*)(1-v_+^*)(1-f)}{E_+^*(d_2 - d_1)} +$$

$$+ \frac{d^o f(f-1)(v_+^* E_+^o(1+v_+^*) + E_+^*(v_+^*(1-v_+^o) - 2v_+^o))}{E_+^*(d_2 - d_1)(d^* f + d^o(1-f))}.$$

$$d_0 = \frac{4v_-^o E_-^* - 2v_-^*(E_-^o(1+v_-^*) + E_-^*(1-v_-^o))}{E_-^*},$$

$$d_1^o = -d^o = \frac{(E_-^o(f(1-v_-^* - 2v_-^* v_+^*) + (1+v_-^*)) + E_-^*(1-f)(1-v_-^o - 2v_+^o v_-^o))}{E_+^o},$$

$$d_1^* = d^* = \frac{(E_-^*(f-1)(1-v_-^o - 2v_-^* v_+^*) - E_-^o(f(1-v_-^* - 2v_+^o v_-^*) + (1+v_-^*)))}{E_+^*},$$

$$d_1 = E_+^*(f-1)(1-v_+^o), d_2 = E_+^o(f(1-v_+^*) + (1+v_+^*)).$$

$$E_2^- = \frac{4A_1^-}{1 + A_1^- A_2^-}, \quad (\text{B.7})$$

$$v_{23}^- = \frac{1 - 2A_1^- A_2^-}{1 + 2A_1^- A_2^-}. \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned}
A_1^- &= \frac{E_-^\circ}{2(1+v_-^\circ)} \cdot f^2 + \frac{E_-^*}{2(1+v_-^*)} (1-f^2). \\
A_2^- &= \frac{(1-v_-^\circ)(f(1+v_-^*)+(1-v_-^*))}{c_2-c_1} + \frac{E_-^\circ(1+v_-^*)(1-v_-^*)(1-f)}{E_-^*(c_2-c_1)} + \\
&\quad + \frac{c^\circ f(f-1)(v_-^*E_-^\circ(1+v_-^*)+E_-^*(v_-^*(1-v_-^\circ)-2v_-^\circ))}{E_-^*(c_2-c_1)(c^*f+c^\circ(1-f))}. \\
c_0 &= \frac{4v_+^\circ E_+^* - 2v_+^*(E_+^\circ(1+v_+^*)+E_+^*(1-v_+^\circ))}{E_+^*}, \\
c_1^\circ = -c^\circ &= \frac{(E_+^\circ(f(1-v_+^*-2v_+^*v_+^*)+(1+v_+^*))+E_+^*(1-f)(1-v_+^\circ-2v_+^\circ v_+^\circ))}{E_-^\circ}, \\
c_1^* = c^* &= \frac{(E_+^*(f-1)(1-v_+^\circ-2v_+^*v_+^*)-E_+^\circ(f(1-v_+^*-2v_+^*v_+^*)+(1+v_+^*)))}{E_-^*}, \\
c_1 &= E_-^*(f-1)(1-v_-^\circ), \quad c_2 = E_-^\circ(f(1-v_-^*)+(1+v_-^*)).
\end{aligned}$$