

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

СТОЛЯРОВА АНАСТАСІЯ ВАЛЕРІЇВНА

УДК: 539.215:620.22-419.8(043.5)

**ДИСЕРТАЦІЯ
ГОМОГЕНІЗАЦІЯ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З
ПОРОЖНИСТИМИ ТРАНСТРОПНИМИ ВОЛОКНАМИ**

113 – Прикладна математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.


_____ А. В. Столярова

Науковий керівник:

Гребенюк Сергій Миколайович,
доктор технічних наук, доцент

Запоріжжя – 2021

АНОТАЦІЯ

Столярова А. В. Гомогенізація композиційного матеріалу з порожнистими трансропними волокнами. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика». – Запорізький національний університет, Запоріжжя, 2021.

У дисертаційному дослідженні викладено підхід до гомогенізації односпрямованих композитів із трансропними матрицею та порожнистими волокнами. За допомогою методу представницького об'ємного елемента розв'язано крайові задачі про поздовжній та поперечний розтяг, поздовжній та поперечний зсув для неоднорідного та гомогенізованого матеріалу. Отримано аналітичні співвідношення для визначення ефективних пружних характеристик вказаних композитів. За основу обрано кінематичний критерій узгодження.

Основна частина дисертації складається з вступу, чотирьох розділів та висновків.

Обґрунтування вибору теми дослідження, формулювання мети, завдань, методів дослідження, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів викладено у вступі. Наводиться обґрунтування та достовірність отриманих результатів. Розкрито особистий внесок здобувача у дослідженнях, виконаних у співавторстві, подано відомості щодо апробації результатів дисертації.

У першому розділі висвітлюються основні підходи до визначення напружено-деформованого стану волокнистих композиційних матеріалів та конструкцій, спроектованих з їх використанням. Особливу увагу приділено врахуванню специфічних властивостей складових, таких як в'язкопружність, анізотропія та інших, при визначенні ефективних механічних характеристик

композита. Окремо висвітлені питання гомогенізації композитів, армованих порожнистими волокнами. Відзначені переваги та недоліки чисельних та експериментальних підходів до визначення напружено-деформованого стану таких композитів у порівнянні з аналітичними методами. На основі проведеного аналізу сформульовано основні завдання, які необхідно вирішити в ході дослідження.

У цьому розділі наведено основні співвідношення для визначення ефективних пружних характеристик композитів з порожнистими волокнами, компоненти яких є ізотропними матеріалами, отримані Г. А. Ваніним та Д. М. Карпіносом.

Другий розділ висвітлює основну ідею застосування методу представницького об'ємного елемента для визначення ефективних механічних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу з порожнистими волокнами. Визначено основні компоненти напружено-деформованого стану трансропних компонентів композиту та гомогенізованого однорідного матеріалу при поперечних деформаціях. За основу взято умову ідеального контакту на межі «матриця-порожнисте волокно».

Розглядається методика визначення ефективних пружних характеристик при поперечному розтягу та чистому поперечному зсуві. Для кожного випадку розв'язано дві крайові задачі. Перша задача про сумісне деформування матриці і порожнистого волокна, друга – про деформування гомогенізованого трансропного матеріалу. Підхід, який запропоновано для використання, ґрунтується на застосуванні кінематичних умов узгодження переміщень точок гомогенізованого композиту та його складових – матриці та порожнистого волокна.

Постановки крайових задач та їх розв'язки при поздовжніх деформаціях для односпрямованого композиційного матеріалу з порожнистим волокном наведені у третьому розділі. Отримано аналітичні співвідношення для визначення ефективних поздовжнього модуля пружності, коефіцієнта

Пуассона та поздовжнього модуля зсуву таких композитів. Складові композита приймалися трансропними. Співвідношення для кожної характеристики отримано із розв'язання двох крайових задач. Перша про сумісне деформування матриці і порожнистого волокна. Друга – деформування однорідного трансропного матеріалу, що моделює композит. Як умова узгодження для обох задач, використовувалась рівність компонентів вектору переміщень.

Четвертий розділ присвячений використанню отриманих у другому та третьому розділах співвідношень для розрахунку ефективних пружних характеристик волокнистих композитів. Обчислення проведені для двохфазових односпрямованих волокнистих композитів з ізотропними компонентами, а також для випадку трансропних волокон. Представлені результати розрахунків відображають залежність ефективних пружних сталих композиційного матеріалу від об'ємного вмісту матеріалу волокна та порожнини в матеріалі композиту.

Розрахунки ефективних механічних характеристик волокнистих композиційних матеріалів за отриманими формулами демонструють високу збіжність результатів з обчисленнями за співвідношеннями Г. А. Ваніна та Д. М. Карпіноса.

На основі виконаного дослідження сформульовано висновки за дисертаційною роботою.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у такому: розвинено метод представницького об'ємного елемента для гомогенізації односпрямованого композиційного матеріалу з трансропними матрицею та порожнистим волокном при поперечному та поздовжньому розтягу і зсуві, що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження переміщень композиту та його складових; вперше, на основі розв'язання задачі гомогенізації про поперечний розтяг та чистий поперечний зсув, отримано аналітичні співвідношення для визначення поперечного модуля пружності та коефіцієнта Пуассона односпрямованого композиту з трансропними

матрицею та порожнистим волокном, що залежать від пружних характеристик його складових та об'ємного вмісту матеріалу волокна та порожнини у композиті; вперше, на основі розв'язання задачі гомогенізації про поздовжній розтяг та чистий поздовжній зсув, отримано аналітичні вирази для розрахунку поздовжнього модуля пружності, коефіцієнта Пуассона та поздовжнього модуля зсуву односпрямованого композиційного матеріалу з порожнистими волокнами у випадку трансропності обох компонент композиту, що залежать від пружних характеристик його складових та об'ємного вмісту матеріалу волокна та порожнини у композиті; вперше проведено розрахунки за отриманими формулами та побудовано залежності ефективних пружних сталих композитів з порожнистими волокнами від об'ємного вмісту матеріалу волокна та порожнини у композиційному матеріалі.

Практичне значення результатів роботи полягає у можливості безпосереднього використання отриманих аналітичних співвідношень для визначення ефективних пружних сталих двохфазових односпрямованих композиційних матеріалів з порожнистими волокнами, що складаються як із ізотропних, так і трансропних компонентів. Представлені у роботі аналітичні залежності дозволяють на стадії проектування, варіюючи матеріалом матриці, матеріалом волокна, об'ємним вмістом волокна та об'ємним вмістом порожнини у ньому, отримувати композиційні матеріали із раціональними характеристиками.

ВОЛОКНИСТИЙ КОМПОЗИТ, ЕФЕКТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ, МАТРИЦЯ, ПОРОЖНИСТЕ ВОЛОКНО, ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ МАТЕРІАЛ, ГОМОГЕНІЗАЦІЯ, МОДУЛЬ ПРУЖНОСТІ, МОДУЛЬ ЗСУВУ, КОЕФІЦІЄНТ ПУАССОНА

ABSTRACT

Stoliarova A. V. Homogenization of composite material with hollow transtropic fibers. – Qualification scientific work, manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, specialty 113 “Applied Mathematics” – Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, 2021.

In the dissertation research, the approach to a homogenization of unidirectional composites with transtropic matrix and hollow transtropic fibers is stated. Using the method of a representative volumetric element, the boundary value problems of longitudinal and transverse elongation, longitudinal and transverse shear for inhomogeneous and homogenized material are solved. Analytical ratios to determine the effective elastic characteristics of these composites were obtained. The kinematic criterion of coordination is chosen as a basis.

The main part of the dissertation consists of an introduction, four sections, and conclusions.

The justification of the choice of the research topic, formulation main aim, tasks, research methods, scientific novelty, and practical significance of the obtained results are stated in the introduction. Given justification and reliability of the obtained results. Presented personal contribution of the applicant in the researches executed in co-authorship is revealed, the information on approbation of results of the dissertation.

The first section covers the main approaches to determining the stress-strain state of fibrous composite materials and structures designed using them. Particular attention is paid to taking into account the specific properties of the components, such as viscoelasticity, anisotropy, and others when determining the effective mechanical characteristics of the composite. The issues of homogenization composites, reinforced by hollow fibers, are covered separately. The advantages and disadvantages of numerical and experimental approaches to determining the stress-

strain state of such composites, compared to analytical methods, are noted. Main tasks, that need to be solved during the research, are formulated based on analysis.

This section presents basic relations for determining the effective elastic characteristics of composites with hollow fibers, components of which are isotropic materials, obtained by G. A. Vanin and D. M. Karpinos.

The second section covers the basic idea of applying the method of a representative volumetric element to determine effective mechanical characteristics of unidirectional composite material with hollow fibers. The main components of the stress-strain state of the anisotropic components of the composite and the homogenized homogeneous material at transverse deformations are determined. The condition of perfect adhesion between the materials of the matrix and the hollow fiber is taken as a basis.

The method of determining the effective elastic characteristics at transverse elongation and simple transverse shear is detailed. Two boundary value problems are solved for each case. One of them about the common deformation of the matrix and the hollow fiber, the second – the problem of deformation of homogenized anisotropic material. The proposed approach is based on the application of kinematic conditions of coordination of displacements for points of the homogenized composite and its components – matrix and hollow fiber.

Statements of boundary value problems and their solutions for a unidirectional composite material with hollow fiber at longitudinal deformations are given in the third section. Analytical relations to determine the effective longitudinal modulus of elasticity, Poisson's coefficient, and longitudinal shear modulus of such composites were obtained. The components of the composite were taken anisotropic. The ratio for each characteristic is obtained by solving two boundary value problems. The first is about the common deformation of the matrix and the hollow fiber. The second is the deformation of a homogeneous anisotropic material that models the composite. The equality of the components of the displacement vector was used as a condition of the agreement for both problems.

The fourth section is devoted to the use of relations obtained in the second and third sections to calculate the effective elastic characteristics of fibrous composites. The calculations were performed for two-phase unidirectional fibrous composites with isotropic components, as well as for the case of transtropic fibers. The presented calculation results reflect the dependence of the effective elastic constants of the composite on the volumetric content of the fiber material and the cavity inside the composite material.

Calculations of the effective mechanical characteristics of fibrous composite materials according to the obtained formulas demonstrate a high convergence of the results with the calculations based on the ratios of G. A. Vanin and D. M. Karpinos.

Conclusions on the dissertation work based on the performed research are formulated.

The scientific novelty of the obtained results is as follows. Firstly, developed a method of representative volumetric element for homogenization of unidirectional composite material with transtropic matrix and hollow fiber at transverse and longitudinal elongation and shear. It is based on the use of kinematic conditions of coordination of displacements of composite and its components.

Secondly, for the first time, based on the solution of the problem of homogenization on transverse elongation and simple transverse shear, were obtained analytical ratios for determining the transverse modulus of elasticity and Poisson's coefficient of a unidirectional composite with a transtropic matrix and hollow fiber, depending on the elastic characteristics of its components and volumetric content of fiber and the cavity inside the composite.

Thirdly, for the first time, based on the solution of the problem of homogenization of longitudinal elongation and simple longitudinal shear, were obtained analytical expressions for calculating the longitudinal modulus of elasticity, Poisson's ratio, and longitudinal shear modulus of unidirectional composite material with hollow fibers in the case of transtropeness of both components of the composite, depending on the elastic characteristics of its components and volumetric content of fiber and the cavity inside the composite.

Fourthly, for the first time calculations according to the obtained formulas were performed, and the dependencies of effective elastic constants composites with hollow fibers on the volumetric content of fiber and cavity inside the composite material were constructed.

The practical significance of the work results lies in the possibility of direct use of the obtained analytical relations to determine the effective elastic constants two-phase unidirectional composite materials with hollow fibers, which consisting of both isotropic and transtropic components. The analytical dependences presented in this thesis allow to obtain composite materials with rational characteristics at the design stage, varying the matrix's material, fiber's material, volumetric fiber's content, and volumetric content of the cavity in it.

FIBROUS COMPOSITE, EFFECTIVE CHARACTERISTICS, MATRIX,
HOLLOW FIBER, TRANSVERSALLY-ISOTROPIC MATERIAL,
HOMOGENIZATION, MODULUS OF ELASTICITY, SHEAR MODULUS,
POISSON'S COEFFICIENT

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковано основні наукові результати

1. Homeniuk S., Grebenyuk S., Klimenko M., Stoliarova A. Determining the effective characteristics of a composite with hollow fiber at longitudinal elongation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 6/7 (96). P. 6–12. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.143406, ISSN: 1729-3774.
2. Столярова А. В., Гребенюк С. М., Клименко М. І. Поздовжній модуль пружності волокнистого композиту з перехідним шаром. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 2. С. 130–142. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-14, ISSN: 2413-6549.
3. Grebenyuk S., Klymenko M., Stoliarova A., Titova O. Longitudinal shear modulus of the composite material with hollow fibers. *Mechanika 2019: proceedings of the 24th International scientific conference* (Kaunas, Lithuania, 17 May 2019). Kaunas: Kaunas University of Technology, 2019. P. 45–48. ISSN: 1822-2951.
4. Столярова А. В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із трансропними порожнистими волокнами: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с. ISBN: 978-966-992-520-6.

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

5. Столярова А. В. Ефективний поздовжній модуль пружності та коефіцієнт Пуассона композиту з ізотропним порожнистим волокном та ізотропною матрицею. *Актуальні проблеми математики та*

інформатики: збірка тез доповідей Дев'ятої Всеукраїнської, шістнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників (Запоріжжя, 26–27 квітня 2018 р.). Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2018. С. 133–134.

6. Столярова А. В. Ефективний поздовжній модуль пружності і коефіцієнт Пуассона композиту з транстропними матрицею та порожнистим волокном. *Сучасні проблеми машинобудування*: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів (Харків, 15–18 квітня 2019 р.). Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного, 2019. С. 11.
7. Столярова А. В. Вплив перехідного шару на поздовжній модуль пружності волокнистого композиту. *Актуальні проблеми математики та інформатики*: збірка тез доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників (Запоріжжя, 25–26 квітня 2019 р.). Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2019. С. 123–124.

ЗМІСТ

Вступ.....	14
Розділ 1. Сучасний стан проблеми визначення ефективних механічних характеристик волокнистих композиційних матеріалів	22
1.1 Методи визначення ефективних механічних характеристик волокнистих композиційних матеріалів	22
1.2 Дослідження ефективних механічних характеристик композитів з порожнистими волокнами	29
1.3 Висновки до першого розділу.....	38
Розділ 2. Гомогенізація композиційного матеріалу з транстропними матрицею та порожнистим волокном при поперечних деформаціях	39
2.1 Основні припущення та постановка задачі	39
2.2 Ефективні пружні сталі композиційного матеріалу при рівномірному поперечному розтягу	41
2.3 Ефективні пружні сталі композиційного матеріалу при чистому поперечному зсуві	52
2.4 Висновки до другого розділу	70
Розділ 3. Гомогенізація композиційного матеріалу з транстропними матрицею та порожнистим волокном при поздовжніх деформаціях	71
3.1 Ефективні пружні сталі композиційного матеріалу при рівномірному поздовжньому розтягу.....	71
3.2 Ефективні пружні сталі композиційного матеріалу при чистому поздовжньому зсуві	77
3.3 Висновки до третього розділу.....	83
Розділ 4. Розрахунок ефективних характеристик композиційних матеріалів за відомими характеристиками складових	85
4.1 Визначення механічних характеристик односпрямованих композиційних матеріалів з ізотропними складовими	85

4.2 Визначення механічних характеристик односпрямованих композиційних матеріалів з транслопними складовими	95
4.3 Висновки до четвертого розділу	99
Висновки.....	101
Список використаних джерел	103
Додатки	119
ДОДАТОК А	119
ДОДАТОК Б.....	124
ДОДАТОК В	135
ДОДАТОК Г.....	138

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. На теперішній час розвиток науки та техніки ставить нові вимоги до машин, механізмів, обладнання, споруд, інфраструктурних об'єктів у різних галузях господарювання, таких як машинобудування, будівництво, ракетно-космічна галузь, літако- та суднобудування, транспорт тощо. Одним із напрямків вдосконалення є підвищення надійності, довговічності, міцності, зменшення собівартості та матеріалоемності розроблюваних об'єктів.

Ефективним шляхом для такого вдосконалення є створення та використання нових конструкційних матеріалів (композитів) у виробництві. Як правило, основною задачею при створенні нових конструкційних матеріалів є задача отримання матеріалу з новими, не притаманними існуючим матеріалам, властивостями. При розробці силових конструкційних елементів на перший план виходять механічні властивості матеріалів. Застосування композиційних матеріалів для управління механічними властивостями як матеріалу, так і конструкції в цілому, є ефективною тенденцією сьогодення, яка підтверджується як все більшим відсотком використання композиційних матеріалів, так і розширенням сфери їх застосування, навіть у тих галузях де вони раніше не застосовувалися.

Для силових елементів конструкцій основною характеристикою, яка цікавить проектувальників, є міцність. Її оцінки проводяться шляхом визначення напружено-деформованого стану конструкції в реальних умовах експлуатації й подальшого знаходження «небезпечних», з точки зору міцності, зон. Для розв'язання цієї задачі необхідно знати механічні характеристики конструкційних матеріалів.

Найбільш надійним є експериментальний спосіб визначення механічних характеристик, для цього потрібно виробити зразки композиційного матеріалу й провести необхідні натурні випробування. Але цей спосіб дуже витратний.

По-перше кількість варіантів композиційного матеріалу може бути дуже значною й задалегідь відкинути неприйнятні варіанти можливо тільки спираючись на інтуїцію розробників. По-друге, навіть для одного виду композиційного матеріалу потрібно провести певну кількість експериментальних випробувань, щоб потім оцінити діапазон та осереднені значення характеристик матеріалу методами математичної статистики.

Іншим способом оцінки властивостей композиційного матеріалу є математичне та комп'ютерне моделювання. На основі механічних або інших законів розробляються математичні моделі композиційного матеріалу, потім проводиться дослідження поведінки композиційного матеріалу аналітичними або чисельними методами. Результатом цього дослідження є аналітичні співвідношення для механічних характеристик матеріалу (у разі використання аналітичних методів), або числові значення цих характеристик (у разі використання чисельних методів).

Нагальним питанням стає питання класифікації композиційних матеріалів, що допомагає прискорити вибір методів розрахунку, технології виготовлення тощо. Залежно від вибору класифікаційних ознак розроблено декілька видів класифікації. При створенні математичних моделей композиційного матеріалу, виникає необхідність тим чи іншим способом врахувати геометричні параметри армуючих елементів та їх розташування у матеріалі матриці. Тому, з точки зору вибору методів розрахунку, доцільно класифікувати композиційні матеріали за геометричними параметрами армуючих елементів та схемами їх розташування у матеріалі матриці.

За цими критеріями композиційні матеріали поділяють на дисперсно-зміцненні з армуючими елементами у вигляді порошків та гранул, пластинчаті, у яких як армуючий елемент виступає фольга або плівка, та волокнисті з тканинними та волокнистими армуючими елементами.

У волокнистому композиційному матеріалі як волокна використовуються моноволокна, нитки, дріт, джгути тощо, які, як правило, мають циліндричну або близьку до неї форму із різними формами поперечного

перерізу – круглого, еліптичного, кільцевого, трикутного, квадратного, прямокутного, шестикутного та інших. Волокна можуть бути короткими, коли усі три розміри окремого волокна співставні між собою, та неперервними, коли один із лінійних розмірів (довжина) набагато більший, ніж два інші. Розташування волокон у матриці також може бути різним. Якщо волокна орієнтовані випадковим чином, то маємо хаотично армовані композити. Також волокна у матриці можуть бути направлені у певних напрямках, якщо такий напрям один – маємо одновимірно-армований композиційний матеріал, два – двовимірно-армований матеріал, три та більше – просторово-армований.

Суттєвого розширення діапазону технічних характеристик композиційних матеріалів можна досягти, використовуючи для армування порожнисті волокна. Для дослідження напружено-деформованого стану односпрямованого композиту з порожнистими волокнами доцільним є застосування методу гомогенізації.

Цей метод полягає в отриманні аналітичних залежностей ефективних пружних сталих композита від значень відповідних констант для його складових, а також об'ємних часток вмісту волокна та порожнини в матеріалі композиту. Адекватна оцінка механічних характеристик композиційного матеріалу неможлива без врахування трансстропних властивостей складових.

У зв'язку з цим важливою для розвитку методів прикладної математики і тенденціями застосування композиційних матеріалів у практиці створення нових конструкцій і систем є задача гомогенізації композиційних матеріалів, односпрямовано-армованих трансверсально-ізотропними порожнистими волокнами, що обумовлює **актуальність** даного дисертаційного дослідження.

У роботі викладено підхід до гомогенізації односпрямованого композиційного матеріалу, армованого за гексагональною схемою неперервними порожнистими волокнами круглого перерізу. На основі методу представницького об'ємного елемента, розв'язано крайові задачі про поздовжній та поперечний розтяг, поздовжній та поперечний зсув для неоднорідного та гомогенізованого матеріалу. Із застосуванням кінематичних

умов узгодження знайдено ефективні пружні сталі гомогенізованого композиційного матеріалу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Виконання дисертації пов'язано з планом наукових досліджень, що проводились на математичному факультеті Запорізького національного університету за держбюджетною темою «Математичне та програмне забезпечення автоматизованого проектування аерокосмічної техніки» (номер державної реєстрації 0118U00210, 2018–2020 рр.), в яких автор брала участь як виконавець на посаді молодшого наукового співробітника проблемної науково-дослідної лабораторії прикладної математики та механіки.

Мета дослідження – отримати аналітичні співвідношення для розрахунку ефективних пружних характеристик односпрямованих композитів з трансропними матрицею та порожнистим волокном за допомогою представницького об'ємного елемента.

Досягнення поставленої мети передбачає реалізацію наступних завдань:

- проаналізувати існуючі методи дослідження напружено-деформованого стану композиційних матеріалів;
- дослідити відомі підходи до визначення ефективних пружних характеристик композитів, армованих порожнистими волокнами;
- визначити компоненти напружено-деформованого стану матриці, порожнистого волокна та однорідного композиційного матеріалу при поздовжніх та поперечних деформаціях на основі дослідження елементарної комірки композиту;
- розв'язати задачу гомогенізації композиту з порожнистим волокном в умовах поперечного розтягу та чистого поперечного зсуву;
- розв'язати задачу гомогенізації композиту з порожнистим волокном в умовах поздовжнього розтягу та чистого поздовжнього зсуву;

- порівняти результати, отримані за запропонованими аналітичними співвідношеннями, з аналогічними результатами, знайденими за відомими формулами для ізотропних компонентів;
- визначити ефективні пружні характеристики односпрямованих композиційних матеріалів за відомими характеристиками складових.

Об’єкт дослідження – процеси деформування волокнистого композиційного матеріалу.

Предмет дослідження – ефективні пружні характеристики односпрямованих композиційних матеріалів з трансропними порожнистими волокнами.

Вибір об’єкта дослідження здійснено на основі аналізу як класичних, так і сучасних літературних джерел у напрямку дослідження напружено-деформованого стану волокнистих композиційних матеріалів, в тому числі, армованих порожнистими волокнами.

Методи дослідження – аналітичні методи розв’язування крайових задач механіки деформівного твердого тіла.

Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів. Обґрунтованість отриманих результатів дисертаційної роботи забезпечується коректністю сформульованих задач гомогенізації при поперечних та поздовжніх деформаціях. Зокрема, використанням загально-відомих співвідношень механіки деформівного твердого тіла, крайових умов та критеріїв узгодження при певних деформаціях. Достовірність результатів забезпечується співставленням розрахунків за отриманими в роботі співвідношеннями, з розрахунками за вже відомими формулами на прикладі композиту з ізотропними компонентами.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у такому:

- розвинено метод представницького об’ємного елемента для гомогенізації односпрямованого композиційного матеріалу з трансропними матрицею та порожнистим волокном при поперечному та поздовжньому розтягу і зсуві, що ґрунтується на

використанні кінематичних умов узгодження переміщень композиту та його складових;

- вперше на основі розв’язання задачі гомогенізації при поперечному розтягу та чистому поперечному зсуві, отримано аналітичні співвідношення для визначення поперечного модуля пружності та коефіцієнта Пуассона односпрямованого композиту з трансропними матрицею та порожнистим волокном, що залежать від пружних характеристик його складових та об’ємного вмісту матеріалу волокна та порожнини у композиті;
- вперше на основі розв’язання задачі гомогенізації при поздовжньому розтягу та чистому поздовжньому зсуві, отримано аналітичні залежності для розрахунку поздовжнього модуля пружності, коефіцієнта Пуассона та поздовжнього модуля зсуву односпрямованого композиційного матеріалу з порожнистими волокнами у випадку трансропності обох компонент композиту, з урахуванням пружних характеристик його складових та об’ємного вмісту матеріалу волокна та порожнини у композиті;
- вперше проведено розрахунки за отриманими формулами та побудовано залежності ефективних пружних сталих композитів з порожнистими волокнами від об’ємного вмісту матеріалу волокна та порожнини у композиційному матеріалі.

Практичне значення результатів роботи полягає у можливості безпосереднього використання отриманих аналітичних співвідношень для визначення ефективних пружних сталих двохфазових односпрямованих композиційних матеріалів з порожнистими волокнами, що складаються як із ізотропних, так і трансропних компонентів. Представлені у роботі аналітичні залежності дозволяють на стадії проєктування, варіюючи матеріалом матриці, матеріалом волокна, об’ємним вмістом волокна та об’ємним вмістом порожнини у ньому, отримувати композиційні матеріали із раціональними характеристиками.

Результати дисертаційного дослідження впроваджені в навчальний процес і застосовуються при викладанні курсу «Механіка деформівного твердого тіла» та виконанні кваліфікаційних робіт студентами спеціальності 111 – «Математика» Запорізького національного університету.

Публікації. Основні наукові результати дисертаційної роботи висвітлено у семи опублікованих працях, серед них: дві статті – у наукових фахових виданнях України [43, 85], з них одна – у виданні, індексованому в наукометричній базі Scopus [85]; одна стаття – матеріали закордонної міжнародної конференції [77]; одна монографія [47]; апробацію результатів дисертації засвідчують три тези доповідей, опублікованих у збірниках праць вітчизняних наукових конференцій різного рівня [44, 45, 46].

Особистий внесок здобувача. Основні наукові результати дисертації отримані автором самостійно. У статтях, опублікованих у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у наступному:

- у [85] отримано формули для ефективних поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона для композиту з трансропними матрицею та порожнистим волокном, що відображають залежність цих сталих від пружних характеристик матриці, волокна та об'ємних часток волокна та порожнини у матеріалі композита; проведено розрахунки за отриманими співвідношеннями, деякі з них представлені графічно;
- у [43] на основі представницького об'ємного елемента запропоновано підхід до визначення ефективного поздовжнього модуля пружності односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу із особливостями структури;
- у [77] отримано формули для ефективного поздовжнього модуля зсуву композиційного матеріалу з трансропними порожнистими волокнами; на чисельному прикладі показано збіжність отриманих результатів з обчисленнями за відомими формулами для ізотропних компонентів.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати, що отримані у дисертаційному дослідженні, доповідались та обговорювались на конференціях різного рівня: дев'ятій Всеукраїнській, шістнадцятій регіональній науковій конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (Запоріжжя, 26–27 квітня 2018 р.); конференції молодих вчених та спеціалістів «Сучасні проблеми машинобудування» (Харків, 15–18 квітня 2019 р.); десятій Всеукраїнській, сімнадцятій регіональній науковій конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (Запоріжжя, 25–26 квітня 2019 р.); The 24th International scientific conference «Mechanika 2019» (Kaunas, Lithuania, 17 May 2019); VII Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (Запоріжжя, 23–26 травня 2019 р.); VIII Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (Запоріжжя, 11–14 червня 2020 р.).

Дисертація у цілому розглядалася на міжкафедральному науковому семінарі «Актуальні проблеми прикладної математики та механіки» Запорізького національного університету під керівництвом д.т.н., професора В. З. Грищака та на розширеному засіданні кафедри фундаментальної математики Запорізького національного університету.

Обсяг і структура дисертації. Дисертаційна робота викладена на 138 сторінках машинописного тексту, складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та чотирьох додатків. Робота ілюстрована 2 таблицями та 27 рисунками. Список використаних джерел містить 119 найменувань, з них 50 кирилицею та 69 латиницею.

РОЗДІЛ 1. СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Визначення фізико-механічних властивостей композитів за властивостями їх структурних елементів є однією з важливих задач прикладної математики та сучасної механіки композиційних матеріалів, для розв'язання якої використовуються аналітичні, чисельні, статистичні та експериментальні методи.

У даному розділі подається аналітичний огляд сучасного стану досліджуваних задач, наводяться основні способи визначення механічних характеристик композиційних матеріалів для подальшого їх використання при розв'язанні задач механіки деформівного твердого тіла. Особлива увага приділяється математичному моделюванню композиційного матеріалу із порожнистими волокнами та врахуванню анізотропії властивостей компонентів.

1.1 Методи визначення ефективних механічних характеристик волокнистих композиційних матеріалів

Проблемі визначення ефективних механічних характеристик волокнистих композитів присвячена значна кількість наукових досліджень. Зокрема, розглядаються анізотропні, пластичні, в'язкопружні компоненти композита, наявність температурного розширення тощо.

Визначенню пружних сталих для композиційного матеріалу за різними методиками присвятили свої дослідження ряд вчених, зокрема, О. А. Лапін [30], J. E. Ashton, J. C. Halpin, P. H. Petit [61], Г. Тангоппа [48], V. E. Gough [75], J. D. Walter, H. P. Patel [110], T. Akasaka [53], Д. М. Карпінос [26],

Г. А. Ванін [107], Д. С. Аболіньш [51] та інші. Так, у роботах [30, 48, 53, 61, 75, 110] для розрахунку основних пружних характеристик композитів наведені співвідношення, отримані у плоскій постановці. Тривимірний випадок розглядався у [26, 51, 107]. Значний вклад в дослідження неоднорідних композиційних матеріалів внесли В. З. Грищак та інші [1, 32, 33], А. П. Дзюба та інші [11, 12, 71], Н. В. Сметанкіна [14] та інші. Ряд робіт [1, 11, 12, 14, 32, 33, 71] зосереджені на математичному моделюванні та дослідженні напружено-деформованого стану деталей конструкцій, що використовуються в ракетобудуванні. Фундаментальні дослідження композиційних матеріалів викладені в серії робіт під керівництвом О. М. Гузя [9, 10, 34, 35].

У довідниках під редакцією В. В. Васильєва, Ю. М. Тарнопольського [25], Д. М. Карпіноса [26] узагальнено основні методи розв'язання задач механіки композиційних матеріалів. Зокрема, наведено співвідношення для розрахунку ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів, представлено результати низки аналітичних та експериментальних досліджень.

Авторами М. О. Соловей, О. П. Кривенко, О. О. Міщенко [42], Є. В. Бахтіною [3], В. В. Рубашевським, М. М. Заразовським, С. М. Шукаєвим [40] розглянуто найбільш використовувані аналітичні методиками визначення пружних констант односпрямованих волокнистих композитів. Наведено чисельне порівняння ефективних характеристик на прикладі полімерного вуглепластика [42], композиту на основі Е-скловолокна і епоксидного зв'язуючого [3], епоксидних вуглепластиків [40], що обчислені за розглянутими методиками для різного об'ємного вмісту волокон.

У [91] на основі точної теорії армування запропоновані співвідношення для визначення ефективних пружних характеристик односпрямованих композитів на основі ізотропних пластиків, армованих за гексагональною схемою довгими трансропними волокнами. У роботі [8] отримані аналітичні вирази для розрахунку пружних сталих гумокордного матеріалу з урахуванням трансверсально-ізотропних властивостей корду.

В монографії [7] досліджується напружено-деформований стан двохфазового односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу з урахуванням транслопних властивостей матриці та волокна. На основі дослідження представницького об'ємного елемента знайдено аналітичні співвідношення для визначення ефективних характеристик таких композитів на базі кінематичного та енергетичного критеріїв узгодження.

Для визначення термопружних характеристик та характеристик теплопровідності композита зі сферичними та циліндричними включеннями, у [104] застосовується варіаційний асимптотичний метод (VAMUCH). Цей же метод використовується для дослідження ефективних пружних властивостей волокнистого композиту на прикладі представницького об'ємного елемента [118].

В [4] розглядаються асимптотичні методи розрахунку неоднорідних композиційних матеріалів із урахуванням мікромеханічних ефектів, викликаних особливостями внутрішньої структури.

Методика розрахунку ефективних в'язкопружних характеристик композитів при сталих циклічних коливаннях, що базується на методі вирішення локальних задач в'язкопружності на комірці періодичності композитів, описана в [13]. Наведені приклади чисельного моделювання в'язкопружних характеристик односпрямовано-армованих композитів.

В [29] розглядаються питання чисельного визначення ефективних термов'язкопружних характеристик односпрямованих композитів з полімерною матрицею за властивостями компонентів. На основі методу, що базується на використанні принципу Вольтерра, вирішується задача визначення механічних в'язкопружних характеристик композита за відомими характеристиками їх в'язкопружних компонент [89].

Розв'язання задачі гомогенізації в'язкопружного трансверсально-ізотропного волокнистого односпрямованого композиту розглядається в серії публікацій під авторством С. М. Гребенюка, М. І. Клименка, В. І. Дирди, А. Ф. Булата, А. М. Богуславської, Т. М. Смолянкової, О. О. Тітової. Основні

результати, отримані у цих дослідженнях, опубліковані у [5, 21, 68, 69, 76, 78, 79, 80]. Зокрема, можна відзначити резюмуючу монографію М. І. Клименка, С. М. Гребенюка, С. І. Гоменюка [23], в якій викладено основи математичного моделювання в'язкопружних композиційних матеріалів. Для аналогічного композиту в роботі [22] отримано співвідношення для ефективного операторного модуля поздовжнього зсуву.

Ефективні поздовжній модуль пружності та коефіцієнт Пуассона для різномодульного односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу з урахуванням ізотропії компонент композиту отримано в [81].

Метод гомогенізації застосовується для визначення ефективних пружних властивостей композитів з різними формами та розподілами включень (зі сферичними та еліптичними частинками, волокнами циліндричної форми, в тому числі з напівсферичними кінцями) [102]. Розроблено два порівняно нових підходи до гомогенізації багатофазних композитів, а саме ефективної самоузгоджувальної схеми (ESCS) та прямої похідної взаємодії (IDD) [93]. Ефективність цих методів порівнюється з класичними підходами та з відповідними результатами моделювання методом скінченних елементів.

У [117] розроблено вдосконалену модель зсувного відставання для вивчення впливу шорсткості поверхні на механічні властивості односпрямованих волокнистих полімерних композитів зі ступеневою структурою.

Великий внесок у аналіз еластомерних композитів на основі армованих волокнами систем зроблено В. М. Ахундовим [28, 54–60]. Так, в [55] досліджуються пружні властивості односпрямовано-армованих композиційних матеріалів при розтягу і зсуві у площині арматури. Отримано залежність параметрів розтягу та зсувних деформацій від значень деформації для різних геометрій розташування волокон в двоспрямованому композиті [56]. Аналогічні залежності отримано для тринаправленого армування [57].

На основі дворівневої каркасної теорії із застосуванням моделі кусково-однорідного тіла проведено візуалізацію деформування односпрямовано-, перехресно- та триортогонально-армованих волокнистих композитів [28, 58].

Розробка способів проектування композиційних матеріалів, досліджується в [54]. Метод базується на структурній макроскопічній теорії армованих середовищ [59, 60], яка може використовуватися для аналізу як жорстких, так і м'яких композитів.

Задачі визначення напружено-деформованого стану композиту в класичній постановці базуються на припущенні, що між його компонентами має місце ідеальне зчеплення, а з'єднання матриці з волокном має чітку межу розподілу, що обмежує компоненти композиту. Така адгезія описується неперервністю напружень та переміщень на міжфазній межі. Однак, важливу роль в механіці композитів відіграє ефект неідеального контакту між компонентами. Властивості перехідного шару, що утворюється при різноманітних взаємодіях матеріалів матриці з включеннями, у великій мірі визначають експлуатаційні характеристики композиту та їх стабільність в часі.

При механічному навантаженні композиту, напруження досягають максимальних значень саме на межі розділу компонентів. Головна функція перехідного шару полягає в тому, щоб знизити локальні напруження і забезпечити рівномірну передачу навантаження на межі розподілу.

Як правило, складність процесів взаємодії матриці та волокна приводить до складних математичних постановок задач, розв'язати які аналітичними методами не видається можливим. Тому використовують чисельні методи, такі як метод скінченних елементів, метод скінченних різниць та інші.

Серія робіт під авторством О. Ю. Бурьян, В. У. Новикова та ін. присвячена дослідженню впливу міжфазного шару на напружено-деформований стан волокнистих композитів [36, 38, 39, 70].

P. S. Theocaris, E. P. Sideridis, G. C. Papanicolaou запропонували методику знаходження поздовжнього модуля пружності і коефіцієнта Пуассона волокнистого композиту за умови неідеальної адгезії між матрицею

та волокном [105]. Пружні властивості мезофази (перехідного шару) змінюються за типовим законами, вираженим елементарними функціями: лінійним, параболічним, гіперболічним та логарифмічним відповідно.

Робота [73] присвячена застосуванню методу гомогенізації до розробки математичної моделі трифазного (включення, матриця та міжфазний шар) композиційного матеріалу. Отримані чисельні результати для ефективних характеристик композиційного матеріалу з випадково розподіленими сферичними включеннями та композиту з хаотично розподіленими односпрямованими волокнами.

Асимптотичний метод гомогенізації застосовується до комірки у вигляді паралелограма для обчислення ефективних пружних коефіцієнтів композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними складовими та неідеальним контактом на межі поділу між матрицею й волокнами [72].

В статті [95] із використанням методу гомогенізації знайдено поперечний модуль пружності для трифазного композита з хаотично розташованими односпрямованими круглими волокнами з урахуванням взаємодії між волокнами. За допомогою методу скінченних елементів чисельно досліджені різні механічні параметри міжфазної взаємодії матриці та волокна.

Вивчено ефективні пружні характеристики композита з ромбічним вкладанням волокон та з урахуванням особливостей міжфазного контакту на межі матриця-волокно за допомогою методу гомогенізації та методу скінченних елементів [114]. На основі експериментальних методів проаналізовано міжфазну взаємодію на границі полімерної матриці й волокна [101].

Досліджено міжфазові явища в композитах типу епоксіполімер/скловолокно методами релаксаційної спектроскопії [31]. В [18, 19] врахована можливість утворення перехідного шару між волокном та матрицею при отриманні розрахункових формул для ефективних коефіцієнтів теплопровідності в напрямку укладки волокон і в площині, перпендикулярній

цьому напрямку. Знайдені поля напружень та деформацій в односпрямованому склопластику без міжфазного шару й з міжфазним шаром з використанням методу скінченних елементів в програмному комплексі ANSYS [2]. Проаналізовано вплив міжфазного шару.

Досліджено вплив неоднорідного перехідного шару, що утворюється між матрицею та волокном, на напружено-деформований стан односпрямованих волокнистих композитів [116]. При цьому коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт теплового розширення міжфазної зони вважалися постійними. Розглянуто випадки, коли поздовжній модуль пружності змінюється за лінійним та степеневим законами.

В роботі [16] запропоновано формулу розрахунку поздовжнього модуля пружності міжфазної зони, що залежить від модулів пружності вуглепластику, волокна, полімерної матриці, а також об'ємного вмісту компонентів композиту та міжфазної зони. Формули для визначення товщини міжфазного шару отримані в [37].

В ряді робіт припускається, що виконуються умови ідеального контакту (неперервність переміщень та напружень) на поверхнях розділу «матриця-перехідний шар-волокно» [43, 64, 84, 90].

В [50] трикомпонентний матеріал зводиться до двокомпонентного шляхом заміни волокон з міжфазним шаром на ефективні композитні волокна з еквівалентними або ефективними модулями пружності. Композитні волокна, в свою чергу, моделюються двокомпонентним волокнистим матричним матеріалом, в якому волокна і матриця характеризуються модулями пружності та об'ємним вмістом реальних волокон та міжфазних шарів відповідно.

У всіх розглянутих вище роботах об'єктом дослідження є композиційні матеріали, армовані суцільними волокнами. Наявність у волокнах порожнин певною мірою ускладнює математичні моделі і отримання аналітичних співвідношень для ефективних механічних характеристик. У багатьох конструкціях вагому роль відіграє не тільки опір до деформацій, а й вага,

вартість застосовуваних матеріалів, тому актуальним напрямком стає дослідження порожнистих волокон.

1.2 Дослідження ефективних механічних характеристик композитів з порожнистими волокнами

Порожністі волокна знайшли своє застосування в найрізноманітніших технічних пристроях, таких як п'єзоелектричні перетворювачі, біомедичні імплантати, пристрої інфільтрації та поділу рідини, паливні камери і батареї. Зокрема, порожністі волокна широко використовуються в композиціях [66, 67, 113, 119]. Необхідно відзначити застосування теорії таких композиційних матеріалів при розв'язанні задач біомеханіки [17, 103].

Незважаючи на велику кількість досліджень напружено-деформованого стану волокнистих композитів, тільки деякі теоретичні дослідження зосереджені на моделюванні пружної поведінки композиційних матеріалів з порожнинами в волокнах [63, 97].

Слід відзначити, що фізично далеко не кожен матеріал можна застосувати у процесі виготовлення порожнистих волокон. Одним з найпоширеніших компонентів для виготовлення композитів з порожнистими волокнами є скловолокно. Порожністі скловолокна, як армуючі елементи, знайшли своє застосування у виготовленні склопластиків.

Основною характеристикою порожнистого скловолокна вважається коефіцієнт капілярності (відношення внутрішнього діаметру волокна до зовнішнього). В роботі [15] отримано аналітичні співвідношення для розрахунку фізико-механічних властивостей односпрямованого склопластику на основі порожнистих волокон, які залежать, окрім характеристик складових, від коефіцієнту капілярності.

У публікації [92] здійснено порівняльний аналіз використання порожнистих і суцільних скляних волокон при проектуванні композиційних

матеріалів. Порожністі волокна заповнювали за допомогою капілярного ефекту, і процес наповнювання досліджували як функцію в'язкості і кута контакту між склом і рідинами. Порожністі скловолокна показали більш високу міцність на розтяг і жорсткість на вигин, ніж суцільні в разі аналогічного зовнішнього діаметру.

Дослідження [96, 100] виявили, що використання порожнистих скловолокон для армування композитів підвищують ефективність конструкцій, в яких жорсткість або міцність на стиснення є визначальним конструктивним критерієм.

Дослідження механічних характеристик склопластиків на основі порожнистих волокон свідчить про доцільність використання таких композитів для виробів, що знаходяться під дією стискаючих навантажень. Так, М. С. Асланова, С. Л. Рогінський, В. І. Дрейцер дійшли висновку, що питома міцність склопластику з порожністими волокнами виявилася майже втричі вищою в порівнянні з армуванням суцільними волокнами [20, с. 183–188].

Якщо пружність склопластиків на основі порожнистих волокон при стиску вздовж вісі волокна висока, то в напрямку, перпендикулярному вісі волокна, міцність при стиску значно нижча в порівнянні зі склопластиками на основі суцільних волокон [27].

Дослідження пружних властивостей склопластиків, армованих порожністими волокнами під дією циклічних навантажень, висвітлено також у [88]. Як армуючі елементи використовувалися скручені з порожнистих волокон нитки, що намотувалися на циліндричну оправу. Авторами виявлено, що відносні характеристики таких склопластиків значно вищі в порівнянні з армованими суцільними волокнами. Перевага порожнистих скловолокон особливо помітна при стиску та згині досліджуваного композиційного матеріалу.

Експериментальні та розраховані значення міцності на стиснення для ряду випробуваних зразків показують високу залежність від геометрії

розташування волокон [87]. У цьому дослідженні вивчається поведінка тонкого порожнистого скловолокна, зв'язаного епоксидною смолою (HGF) при осьовому стискаючому навантаженні. З'ясувалося, що розташування волокон всередині пучка (тобто вирівнювання, односпрямованість, інтервал тощо), а не властивість кожного окремого волокна має переважний вплив на спротив деформації стиснення. Робота [87] є доповненням експериментального дослідження, основні етапи та результати якого висвітлені в [86].

На механічні характеристики склопластиків значною мірою можна вплинути шляхом зміни профілю поперечного перерізу армуючих волокон. Так, Р. В. Хемфрі виявлено, що упаковка скловолокон з перерізом у вигляді порожнистого шестикутника дозволяє отримати композит з високим вмістом волокон при малій вазі [41, с. 401–413]. Відзначається, що щільність композиту на основі порожнистих гексагональних волокон вдвоє нижча за щільність звичайного склопластика.

Г. А. Ванін запропонував метод теоретичного визначення фізико-механічних властивостей склопластиків, армованих порожнистими волокнами [106]. Отримано наближені формули для розрахунку основних механічних характеристик композитів, що залежать від пружних властивостей компонентів композиційного матеріалу і діаметру порожнини.

Ефективність використання композиційних матеріалів, орієнтовано армованих порожнистими волокнами, досліджувалася також у роботах [108, 109]. Методику визначення напружень та поздовжнього модуля зсуву циліндричної оболонки, що посилена в одному напрямку порожнистими волокнами, схильними до скручування в площині армування, запропонована у [94].

В [6] ефективні пружні сталі композиційних матеріалів з порожнистими волокнами визначаються методом послідовної регуляризації. Зокрема, Г. А. Ваніним отримано наступні співвідношення для визначення напружено-деформованого стану композиту, армованого порожнистими волокнами:

$$E_1^0 = \xi(1 - q^2)E_a + (1 - \xi)E + \frac{8G\xi(1 - \xi)(1 - q^2)(v_a - v)^2}{(1 - q^2)(2 - \xi + \chi\xi) + (1 - \xi)(\chi_a - 1 + 2q^2)G/G_a}, \quad (1.1)$$

$$v_{21}^0 = v_{31}^0 = (1 - \xi q^2)v + \xi(1 - q^2)(v - v_a) \times \frac{\chi + 1 - q^2(2 - \xi + \chi\xi - 2(1 - \xi)G/G_a)}{(1 - q^2)(2 - \xi + \chi\xi) + (1 - \xi)(\chi_a - 1 + 2q^2)G/G_a}, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_2^0} &= \frac{1}{E_3^0} = \frac{v_{21}^{02}}{E_1^0} + \frac{1}{8G} \times \\ &\times \left((2(1 - \xi)(1 - q^2)(\chi - 1) + (\xi(\chi + 1)(\chi_a - 1) + \right. \\ &+ (1 - \xi)(\chi - 1)(\chi_a - 1 + 2q^2))G/G_a) / ((1 - q^2) \times \\ &\times (2 - \xi + \chi\xi) + (1 - \xi)(\chi_a - 1 + 2q^2)G/G_a) + \\ &+ (2\xi(1 - \xi)(1 - q^2)\chi + 2\xi(1 + \chi\xi)(1 + \chi_a q^2)G/G_a + \\ &+ 3q^2(1 - q^2)(1 - \xi)^2(1 - G/G_a)) / (3q^2(1 - q^2)(1 - \xi) \times \\ &\times (1 - G/G_a) + (1 - q^2)\xi(\chi + \xi) + \xi(1 - \xi)(1 + \chi_a q^2)G/G_a), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{23}^0}{E_2^0} &= -\frac{v_{21}^{02}}{E_1^0} + \frac{1}{4G_{23}^0} - \frac{1}{8G} \times \\ &\times (2(1 - \xi)(1 - q^2)(\chi - 1) + (\xi(\chi + 1)(\chi_a - 1) + \\ &+ (1 - \xi)(\chi - 1)(\chi_a - 1 + 2q^2))G/G_a) / ((1 - q^2)(2 - \xi + \chi\xi) + \\ &+ (1 - \xi)(\chi_a - 1 + 2q^2)G/G_a), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_2^0} &= \frac{1}{E_3^0} = \frac{v_{21}^{02}}{E_1^0} + \frac{1}{4G_{23}^0} + \frac{1}{8G} \times \\ &\times (2(1 - \xi)(1 - q^2)(\chi - 1) + (\xi(\chi + 1)(\chi_a - 1) + \\ &+ (1 - \xi)(\chi - 1)(\chi_a - 1 + 2q^2))G/G_a) / ((1 - q^2)(2 - \xi + \chi\xi) + \\ &+ (1 - \xi)(\chi_a - 1 + 2q^2)G/G_a), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\nu_{23}^0}{E_2^0} &= -\frac{\nu_{21}^{02}}{E_1^0} + \frac{1}{8G} \times \\
&\times \left((2\xi(1-\xi)(1-q^2)\chi + 2\xi(1+\chi\xi)(1+\chi_a q^2) G/G_a + \right. \\
&+ 3q^2(1-q^2)(1-\xi)(1-G/G_a)) / (3q^2(1-q^2)(1-\xi) \times \\
&\times (1-G/G_a) + \xi(1-\xi)(1+\chi_a q^2) G G_a + (1-q^2)\xi(\chi+\xi)) - \\
&- (2(1-\xi)(1-q^2)(\chi-1) + (\xi(\chi+1)(\chi_a-1) + \\
&+ (1-\xi)(\chi-1)(\chi_a-1+2q^2)) G/G_a) / ((1-q^2)(2-\xi+\chi\xi) + \\
&+ (1-\xi)(\chi_a-1+2q^2) G/G_a), \tag{1.6}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{G_{12}^0} = \frac{1}{G_{13}^0} = \frac{1}{G} \frac{1-\xi + (1+\xi) G/G_a^2}{1+\xi + (1-\xi) G/G_a^2}, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{G}{G_{23}^0} &= \left((1+\chi\xi)(1+\chi_a q^2) G/G_a + (1-q^2)((1-\xi)\chi(1-\Omega) - \right. \\
&- (1+\chi\xi)\Omega G/G_a) / \left((1-q^2)((\chi+\xi)(1-\Omega) - \right. \\
&- (1-\xi)\Omega G/G_a) + (1-\xi)(1+\chi_a q^2) G/G_a), \tag{1.8}
\end{aligned}$$

де E_a, E – поздовжній модуль пружності волокна та матриці відповідно, ν_a, ν – коефіцієнт Пуассона волокна та матриці відповідно, G_a, G – модуль зсуву волокна та матриці відповідно, a – зовнішній радіус волокна, ε – радіус порожнини в волокні, ξ – об’ємна частка волокна, $q^2 = \varepsilon^2/a^2$, $\chi_a = 3 - 4\nu_a$, $\chi = 3 - 4\nu$, $\Omega = 3q^2(1-q^2)(1-G/G_a)/(1+\chi_a G/G_a - (1-G/G_a)q^2)$, $G_a^2 = (1-q^2)G_a/(1+q^2)$.

Інша група формул для визначення пружних характеристик у випадку ізотропії компонентів двохфазового композиту, армованого порожнистими волокнами, представлена Д. М. Карпіносом [26]:

$$E_x = E_f V_f (1 - q^2) + E_m V_m, \tag{1.9}$$

$$\mu_{xy} = \mu_{xz} = \mu_m - \frac{V_f(\mu_f - \mu_m)(\chi_m + 1)(1 - q^2)}{(1 - q^2)(1 + V_m + V_f\chi_m) + V_m(\chi_f - 1 + 2q^2)\frac{G_m}{G_f}}, \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{1}{E_z} = \frac{\mu_{xy}^2}{E_x} + \frac{\chi_m + 1}{8G_m} \left(\frac{1}{N'} - \frac{2Q'}{1 + Q'} \right), \quad (1.11)$$

$$\frac{\mu_{zy}}{E_y} = -\frac{\mu_{xy}^2}{E_x} + \frac{\mu_m}{2G_m} + \frac{\chi_m + 1}{8G_m} \left(\frac{N' - 1}{N'} - \frac{2Q'}{1 + Q'} \right), \quad (1.12)$$

$$G_{xy} = G_{xz} = \frac{(1 + V_f)(1 - q^2) + V_m(1 + q^2)\frac{G_m}{G_f}}{V_m(1 - q^2) + (1 + V_f)(1 + q^2)\frac{G_m}{G_f}} G_m, \quad (1.13)$$

$$\frac{G_m}{G_{yz}} = 1 - V_f(\chi_m + 1)L, \quad (1.14)$$

де E_f, E_m – поздовжній модуль пружності волокна та матриці відповідно, μ_f, μ_m – коефіцієнт Пуассона волокна та матриці відповідно, V_f, V_m – об’ємна частка волокна та матриці відповідно, G_f, G_m – модуль зсуву волокна та матриці відповідно, q – відношення діаметру порожнини до зовнішнього діаметру волокна, величини $\chi_f, \chi_m, Q', N', L$ визначаються за співвідношеннями:

$$\chi_f = 3 - 4\mu_f, \chi_m = 3 - 4\mu_m,$$

$$Q' = V_f \frac{1 - q^2 - (1 + \chi_f q^2) G_m / G_f}{(1 - q^2)\chi_m + (1 + \chi_f q^2) G_m / G_f},$$

$$N' = V_m + V_f(\chi_m + 1)(1 - q^2) / (2(1 - q^2) + (\chi_f - 1 + 2q^2) G_m / G_f),$$

$$1/L = -V_m + (\chi_m + 1)(1 - q^2) / (1 - q^2 - (1 + \chi_f q^2) G_m / G_f).$$

Варіаційним методом [83] отримано вирази для ефективних модулів пружності композиційних матеріалів, посилених паралельними порожнистими та суцільними волокнами.

В роботі [17] отримано аналітичні вирази для ефективних модулів об'ємного стиску односпрямовано-армованих матеріалів, компонентами яких є трансропні матриця і порожнисті або суцільні циліндричні волокна різного діаметру.

Автори [52] на основі методу представницького об'ємного елемента отримали загальні співвідношення для визначення п'яти основних пружних характеристик та двох п'єзоелектричних коефіцієнтів композиційного матеріалу з трансропними п'єзоелектричними порожнистими волокнами. Елементарна комірка представляє собою систему концентричних циліндрів. Отримані співвідношення не мають замкненого аналітичного вигляду й можуть бути використані для визначення ефективних характеристик в результаті значних обчислювальних процедур.

Публікація [99] присвячена вивченню проблеми прогнозування ефективних пружних характеристик композитів, армованих односпрямованими порожнистими волокнами або порожнистими сферичними включеннями за гексагональною схемою. На основі узагальненого самоузгоджувального методу, проведено обчислення модуля об'ємного стиску та поздовжнього модуля зсуву композиту з ізотропними компонентами.

Авторами [103] на основі багатофазової узагальненої самоузгодженої моделі отримані співвідношення та проведено оцінку ефективних поперечних модулів пружності односпрямованого композиційного матеріалу, армованого ідентичними багат шаровими порожнистими волокнами. Зокрема, встановлено, що коефіцієнт Пуассона приймає від'ємні значення за межами певних рівнів пористості, і що парність кількості шарів волокон є значущим параметром.

Використання порожнистих поліефірних волокон для армування композиту в порівнянні з твердими речовинами досліджується в [74]. Тут метод скінченних елементів використовується для моделювання поведінки композитів і вивчення режиму відмови при випробуваннях на удар. У результаті було виявлено, що ударостійкість композиту з порожнистими волокнами є вищою, ніж з суцільними.

Цей же метод використовується авторами [64] для оцінки ефективних модулів пружності при поздовжніх та поперечних деформаціях односпрямованих композитів на основі порожнистих волокон в порівнянні з суцільними. Як представницький об'ємний елемент розглядається нескінченний паралелепіпед, який складається з чверті волокна, оточеного матрицею.

У [98] розглянуті експериментальні дослідження поведінки композитів з епоксидною матрицею, які армовані односпрямованими порожнистими, суцільними і змішаними поліефірними волокнами, при випробуваннях на удар.

Результати експериментальних досліджень впливу армування композитів суцільними скляними і порожнистими волокнами на опір деформації при розтягу, стисненні, вигині, а також на ударостійкість композитів висвітлюються у [62].

Чисельним методом, а саме з використанням ряду Фур'є, визначаються поля локальних напружень в композиційному матеріалі, армованому порожнистими волокнами за гексагональною схемою [112]. Елементарну комірку представлено у вигляді шестикутника з порожнистим волокном круглої форми. Проведено дослідження впливу товщини волокна на пружні характеристики композиту на прикладі двох композиційних матеріалів на основі епоксидної матриці, армованих скловолокнами у першому випадку та нанотрубками оксиду алюмінію – в другому. Зокрема, виявлено, що зміна товщини стінки порожнистого волокна більш суттєво впливає на поперечні пружні характеристики композиту в порівнянні з поздовжніми. Цей же метод

використовується в [111] для дослідження напружено-деформованого стану композитів з гексагональною та квадратною укладкою порожнистих волокон.

У [62, 74, 86, 98, 111, 112] наведено чисельні дані механічних характеристик композиційних матеріалів, отримані в результаті чисельного або фізичного експерименту, що унеможливило безпосереднє використання цих даних для нових композиційних матеріалів.

Для математичного моделювання поведінки композиційного матеріалу, армованого порожнистими волокнами, необхідно з'ясувати, яке напруження виникає, зокрема, на внутрішній стінці порожнистого волокна. Один з варіантів впливу круглого отвору на розподіл напружень в пластинці, що може бути використаним під час розв'язання задачі про чистий поперечний зсув, викладено у [49, с. 105–112].

Автори дослідження [24] отримали точний розв'язок вісесиметричної задачі стиску (розтягу) багатошарового циліндричного стержня, компоненти якого характеризуються анізотропними властивостями. Наведені аналітичні співвідношення для всіх компонент напружено-деформованого стану.

Публікація [82] висвітлює основні етапи дослідження двохфазових односпрямованих волокнистих композитів, армованих як суцільними так і порожнистими волокнами, з використанням тривимірних лінеаризованих рівнянь стійкості.

Аналітичний огляд сучасного стану досліджуваної проблеми вказує, що створення ефективних математичних моделей деформування композиційного матеріалу з порожнистими трансропними волокнами і отримання аналітичних залежностей для визначення ефективних пружних характеристик таких композитів не є у повній мірі розв'язаною задачею.

1.3 Висновки до першого розділу

Виходячи з аналізу джерел, присвячених тематиці дослідження, можна зробити наступні висновки.

По-перше, врахування властивостей компонентів композиційного матеріалу (в'язкопружність, пластичність, анізотропія тощо), умов поєднання компонентів та інше приводять до громіздких математичних моделей. Це ускладнює їх дослідження точними методами і призводить до проблем, пов'язаних з отриманням аналітичних співвідношень для шуканих функцій.

По-друге, дослідження двохфазових композитів із порожнистими волокнами обмежується ізотропією обох або одного з компонентів композиту, але для багатьох матеріалів це припущення приводить до неточностей при моделюванні.

Крім того, з робіт, в яких досліджується напружено-деформований стан композиційних матеріалів, армованих порожнистими волокнами, значна кількість присвячена експериментальному методу визначення ефективних пружних характеристик. Такий підхід ускладнює використання отриманих результатів на етапі проектування нових композитів.

Тому на цей час є актуальним отримання аналітичних співвідношень для визначення ефективних пружних сталих односпрямованого композита з порожнистими волокнами для транслопних компонентів.

Перспективним напрямком дослідження є визначення напружено-деформованого стану композитів з урахуванням можливості утворення перехідного шару на межі «матриця-порожнисте волокно».

РОЗДІЛ 2. ГОМОГЕНІЗАЦІЯ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ТРАНСТРОПНИМИ МАТРИЦЕЮ ТА ПОРОЖНИСТИМ ВОЛОКНОМ ПРИ ПОПЕРЕЧНИХ ДЕФОРМАЦІЯХ

2.1 Основні припущення та постановка задачі

Розглядається двофазовий односпрямований композиційний матеріал, армований порожнистими волокнами за гексагональною схемою, компоненти якого є транстропними.

Оскільки на практиці дедалі ширше використовуються композити з анізотропними властивостями складових, матеріали компонент композиту вважатимуться транстропними.

Для формулювання математичної моделі гомогенізації композиту застосовуються припущення:

- композиційний матеріал вважається однорідним та транстропним з площиною ізотропії, перпендикулярній осі волокна;
- площини ізотропії для матриці і волокна співпадають та перпендикулярні осі волокна;
- зв'язок між напруженнями та деформаціями описується законом Гука;
- на міжфазній поверхні композита виконуються умови ідеального з'єднання.

Пропонується модель, за якою із масиву композиційного матеріалу виокремлюють гексагональну комірку так, щоб усередині вона містила одне порожнисте волокно та оточуючу його матрицю. Для цього площина, перпендикулярна осі волокна у композиті, уявно розбивається правильними шестикутниками так, щоб центр шестикутника співпадав із центром круглого волокна. Отримана елементарна гексагональна комірка апроксимується прямим круговим циліндром. При цьому радіус циліндру підбирається таким

чином, щоб об'єм гексагональної комірки дорівнював об'єму циліндричної комірки (рис. 2.1).

Тоді представницький елемент композиційного матеріалу, що має трансропні властивості, має вигляд комбінації двох порожнистих циліндрів нескінченної довжини, що моделюють трансропні матрицю та порожнисте волокно відповідно.

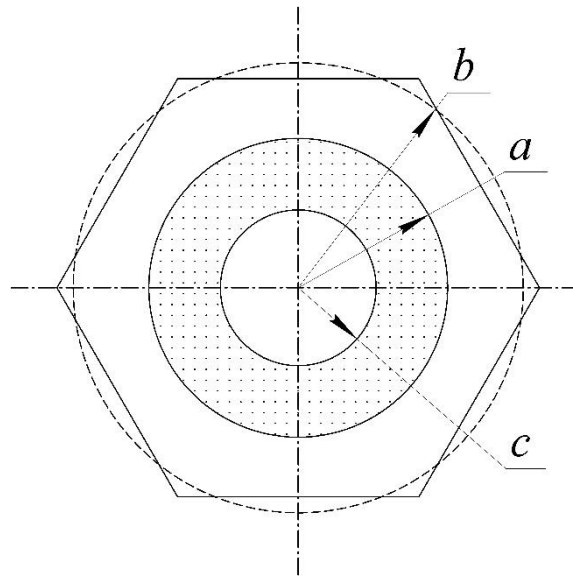


Рис. 2.1. Гексагональна комірка: a – радіус волокна; b – радіус матриці; c – радіус порожнини

Вводяться позначення f та g – об'ємний вміст волокна та порожнини у матеріалі композита відповідно. Враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку в ній займає волокно, мають однакову висоту, отримують наступні співвідношення:

$$g = \frac{\pi c^2}{\pi b^2} = \frac{c^2}{b^2}, \quad f = \frac{\pi(a^2 - c^2)}{\pi b^2} = \frac{a^2 - c^2}{b^2}. \quad (2.1)$$

Аналітичні співвідношення для визначення ефективних пружних сталей, якими характеризується композиційний матеріал, знаходяться із сумісного розв'язання двох вісесиметричних крайових задач при лінійних та зсувних деформаціях.

Перша задача полягає у деформуванні елементарної комірки композиту у вигляді двох коаксіальних порожнистих циліндрів: перший ($c \leq r \leq a$), що моделює транслопне порожнисте волокно, і другий ($a \leq r \leq b$), що моделює транслопну матрицю. Друга задача пов'язана з деформуванням суцільного однорідного циліндра ($0 \leq r \leq b$), що моделює транслопний композит.

Використання умов узгодження переміщень та напружень при розв'язанні цих задач, дає можливість отримати розрахункові формули для ефективних поздовжнього та поперечного модулів пружності E_1 та E_2 відповідно, коефіцієнтів Пуассона ν_{12} та ν_{23} , а також поздовжнього модуля зсуву G_{12} , як функцій пружних сталей складових композиту й об'ємних часток матеріалу волокна та порожнини в композиційному матеріалі.

Задачі розв'язуються у циліндричній системі координат $Ozr\theta$. Тоді індекс 1 відповідатиме напрямку осі z , напрямку 2 – r , напрямку 3 – θ .

2.2 Ефективні пружні сталі композиційного матеріалу при рівномірному поперечному розтягу

Досліджується поперечний вісесиметричний розтяг односпрямованого композиційного матеріалу з порожнистим волокном. Для цього, спочатку, отримуються основні співвідношення, що описують напруження та переміщення транслопного композиту.

Напружено-деформований стан циліндричного тіла буде характеризуватися наступними співвідношеннями:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r), \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r), \sigma_{zz} = \sigma_0, \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zr} = 0. \quad (2.2)$$

Рівняння рівноваги (А.8) та (А.9), наведені в додатку А, виконуються тотожно, а рівняння (А.7) при масовій силі $G_r = 0$ набуде вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (2.3)$$

З урахуванням (2.2), де осьове напруження – стала величина, можемо припустити, що $\sigma_{zz} = 0$. Тоді з виду напружено-деформованого стану тіла випливає, що ε_{rr} та $\varepsilon_{\theta\theta}$ – функції радіальної координати r , тобто $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(r)$, а $\varepsilon_{zz} = const$.

Скориставшись співвідношеннями Коші та зворотнім законом Гука для транстропного матеріалу з додатку А, рівняння (2.3) запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (2.4)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.4) відносно радіальних переміщень u_r запишеться у вигляді:

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (2.5)$$

де C_1 і C_2 – сталі, що визначаються з крайових умов.

Тоді співвідношення додатку А (А.1), (А.3), з урахуванням (2.5), мають вигляд:

$$\varepsilon_{rr}(r) = C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^2}. \quad (2.6)$$

Використовуючи співвідношення (А.47), (А.48), отримуються залежності для радіальних та осьових напружень:

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2 \left(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1 + \nu_{23}) - \frac{C_2}{r^2}(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21}) \right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_2 \left(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1 + \nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21}) \right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}. \quad (2.7)$$

Співвідношення для ε_{zz} знаходиться, підставляючи значення $\sigma_{zz} = \sigma_0$ та (2.7) у вираз (А.36). Отримаємо:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{1 - \nu_{23}} \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} - 2C_1\nu_{21} \right). \quad (2.8)$$

Використовуючи співвідношення Коші (А.5), інтегруючи (2.8) за умови $\varepsilon_{zz} = const$, отримується вираз для осьових переміщень:

$$u_z(z) = \int \varepsilon_{zz} dz = \frac{1}{1 - \nu_{23}} \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} - 2C_1\nu_{21} \right) z + C_3. \quad (2.9)$$

За умови $u_z(0) = 0$, маємо $C_3 = 0$. Тоді зі співвідношення (2.9) вираз для осьових переміщень має вигляд:

$$u_z(z) = \frac{1}{1 - \nu_{23}} \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} - 2C_1\nu_{21} \right) z. \quad (2.10)$$

З урахуванням отриманого співвідношення (2.10), отримуються наступні вирази для радіальних та окружних напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= E_2 \left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1 - \nu_{23})} + \frac{C_1}{1 - \nu_{23}} - \frac{C_2}{r^2(1 + \nu_{23})} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= E_2 \left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1 - \nu_{23})} + \frac{C_1}{1 - \nu_{23}} + \frac{C_2}{r^2(1 + \nu_{23})} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отримані співвідношення (2.5), (2.10) та (2.11) утворюють повний набір компонент для вісесиметричного напружено-деформованого стану, як функцій пружних характеристик транстропного матеріалу і сталих C_1 та C_2 , які знаходяться з крайових умов.

Розглядається сумісний вісесиметричний поперечний розтяг елементарної комірки композиту у вигляді комбінації двох порожнистих циліндрів з радіусами ($c \leq r \leq a$), що моделює порожнисте волокно, і ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю (рис. 2.2 а).

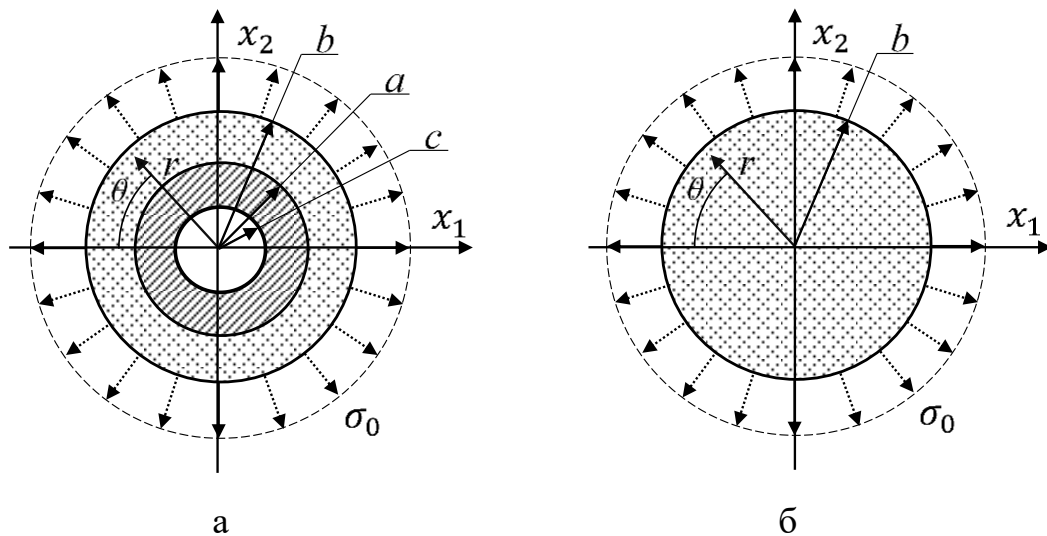


Рис. 2.2. Поперечний розтяг: а – сумісне деформування матриці та порожнистого волокна; б – деформування композита

В виразах (2.5), (2.10) та (2.11) C_1 перепозначається на A , C_2 – на B . Тоді напружено-деформований стан транстропної матриці описується наступними співвідношеннями:

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r},$$

$$u_z^*(z) = \frac{1}{1 - \nu_{23}^*} \left(\frac{\sigma_0^*(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right) z,$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1 - \nu_{23}^*)} + \frac{A}{1 - \nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2(1 + \nu_{23}^*)} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_0^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1 - \nu_{23}^*)} + \frac{A}{1 - \nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2 (1 + \nu_{23}^*)} \right). \quad (2.12)$$

Тут і далі символ \circ позначає величини, що відносяться до волокна, а символ $*$ – величини, що відносяться до матриці.

Аналогічно запишуться співвідношення, які описують напружено-деформований стан порожнистого трансверсально-ізотропного волокна (C_1 перепозначається на C , C_2 – на D):

$$\begin{aligned} u_r^\circ(r) &= Cr + \frac{D}{r}, \\ u_z^\circ(z) &= \frac{1}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right) z, \\ \sigma_{rr}^\circ(r) &= E_2^\circ \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)} + \frac{C}{1 - \nu_{23}^\circ} - \frac{D}{r^2 (1 + \nu_{23}^\circ)} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^\circ(r) &= E_2^\circ \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)} + \frac{C}{1 - \nu_{23}^\circ} + \frac{D}{r^2 (1 + \nu_{23}^\circ)} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

При моделюванні сумісного поперечного вісесиметричного розтягу, умовами узгодження виступають рівність радіальних та осьових переміщень, а також радіальних напружень на межі «матриця-порожнисте волокно»:

$$\sigma_{rr}^\circ(a) = \sigma_{rr}^*(a), \quad u_r^\circ(a) = u_r^*(a), \quad u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (2.14)$$

Радіальні напруження на зовнішній поверхні матриці описуються умовою:

$$\sigma_{rr}^*(b) = \sigma_0. \quad (2.15)$$

Крім того, відсутнє напруження по внутрішній стінці порожнистого

ВОЛОКНА:

$$\sigma_{rr}^{\circ}(c) = 0. \quad (2.16)$$

Невідомі сталі A, B, C, D зі співвідношень (2.12) та (2.13) знаходяться з крайових умов (2.14)–(2.16).

З (2.15), з урахуванням $\nu_{12}^*/E_1^* = \nu_{21}^*/E_2^*$, отримується:

$$A = \frac{1}{E_2^*} (\sigma_0(1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^* \nu_{21}^*) + \frac{B(1 - \nu_{23}^*)}{b^2(1 + \nu_{23}^*)}. \quad (2.17)$$

З другої умови (2.14), використовуючи (2.17), з урахуванням (2.1), маємо:

$$C = \frac{1}{E_2^*} (\sigma_0(1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^* \nu_{21}^*) + B \frac{(f + g)(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)}{a^2(1 + \nu_{23}^*)} - \frac{D}{a^2}. \quad (2.18)$$

Прийнявши такі позначення

$$h_1 = \frac{1 + \nu_{23}^*}{2E_2^{\circ}}, h_2 = \frac{(f + g)(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)}{a^2(1 + \nu_{23}^*)}, \quad (2.19)$$

з урахуванням (2.17) та (2.18), з першої рівності (2.14), маємо

$$D = -a^2 \left(\sigma_0 h_1 (1 - \nu_{23}^{\circ}) - \sigma_0^{\circ} \nu_{21}^{\circ} h_1 - \frac{1 + \nu_{23}^{\circ}}{2E_2^*} (\sigma_0(1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^* \nu_{21}^*) \right) - \\ - B h_1 a^2 (1 - \nu_{23}^{\circ}) \left(\frac{E_2^*(f + g - 1)}{a^2(1 + \nu_{23}^*)} - \frac{E_2^{\circ} h_2}{1 - \nu_{23}^{\circ}} \right). \quad (2.20)$$

Перепишемо (2.18). Враховуючи (2.20), отримаємо

$$\begin{aligned}
C = Bh_2 + \sigma_0 h_1 (1 - \nu_{23}^\circ) - \sigma_0^\circ \nu_{21}^\circ h_1 + \frac{1 + \nu_{23}^\circ}{2E_2^*} (\sigma_0 (1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^* \nu_{21}^*) + \\
+ Bh_1 (1 - \nu_{23}^\circ) \left(\frac{E_2^* (f + g - 1)}{a^2 (1 + \nu_{23}^*)} - \frac{E_2^\circ h_2}{1 - \nu_{23}^\circ} \right). \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Тоді з крайової умови (2.16), з урахуванням (2.20) та (2.21), знаходиться вираз для сталої B :

$$\begin{aligned}
B = \frac{a^2 (1 + \nu_{23}^*)}{E_2^* (2g + f(1 - \nu_{23}^\circ)) (f + g - 1) - a^2 f E_2^\circ h_2 (1 + \nu_{23}^*)} \times \\
\times \left(\frac{E_2^\circ}{E_2^*} (\sigma_0 (1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^* \nu_{21}^*) f - (f + g) (\sigma_0 (1 - \nu_{23}^\circ) - \sigma_0^\circ \nu_{21}^\circ) - \right. \\
\left. - g (\sigma_0 (1 + \nu_{23}^\circ) + \sigma_0^\circ \nu_{21}^\circ) \right). \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Приймаються наступні позначення:

$$\begin{aligned}
\eta = E_2^* (2g + f(1 - \nu_{23}^\circ)) (f + g - 1) - f E_2^\circ ((f + g)(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)), \\
\eta_1 = \frac{E_2^\circ}{E_2^*} (\sigma_0 (1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^* \nu_{21}^*) f - (f + g) (\sigma_0 (1 - \nu_{23}^\circ) - \sigma_0^\circ \nu_{21}^\circ) - \\
- g (\sigma_0 (1 + \nu_{23}^\circ) + \sigma_0^\circ \nu_{21}^\circ). \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Вирази (2.17), (2.20) та (2.21) з переписуються з урахуванням (2.22) та (2.23). Отримуються наступні співвідношення для всіх чотирьох невідомих сталих:

$$\begin{aligned}
A = (f + g)(1 - \nu_{23}^*) \frac{\eta_1}{\eta} + \frac{1}{E_2^*} (\sigma_0 (1 - \nu_{23}^*) - \sigma_0^* \nu_{21}^*), \\
B = a^2 (1 + \nu_{23}^*) \frac{\eta_1}{\eta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1 - v_{23}^\circ}{2E_2^\circ} \frac{\eta_1}{\eta} (E_2^*(1 + v_{23}^\circ)(f + g - 1) + E_2^\circ(f + g)(1 - v_{23}^*) + \\
&\quad + E_2^\circ(1 + v_{23}^*)) + \frac{1 + v_{23}^\circ}{2E_2^\circ} (\sigma_0(1 - v_{23}^\circ) - \sigma_0^\circ v_{21}^\circ) + \\
&\quad + \frac{1 - v_{23}^\circ}{2E_2^*} (\sigma_0(1 - v_{23}^*) - \sigma_0^* v_{21}^*), \\
D &= -a^2 \left(\frac{1 + v_{23}^\circ}{2E_2^\circ} \frac{\eta_1}{\eta} (E_2^*(1 - v_{23}^\circ)(f + g - 1) - E_2^\circ(f + g)(1 - v_{23}^*) - \right. \\
&\quad - E_2^\circ(1 + v_{23}^*)) + \frac{1 + v_{23}^\circ}{2E_2^\circ} (\sigma_0(1 - v_{23}^\circ) - \sigma_0^\circ v_{21}^\circ) + \\
&\quad \left. - \frac{1 + v_{23}^\circ}{2E_2^*} (\sigma_0(1 - v_{23}^*) - \sigma_0^* v_{21}^*) \right). \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Залежність між σ_0 та σ_0° , σ_0^* – осьовими напруженнями, які діють на транстропний матеріал порожнистого волокна та матриці, відповідно, знаходяться з третьої рівності (2.14). При цьому, виходячи з рівності осьових переміщень для довільної осьової координати, σ_0° , σ_0^* – сталі величини.

Приймаються наступні позначення:

$$\begin{aligned}
d^* &= \frac{v_{21}^*}{E_2^*} \left(v_{21}^\circ \left(\frac{\tau}{\eta} f + 1 \right) - \frac{2v_{21}^*}{1 - v_{23}^*} - 2v_{21}^* E_2^\circ f \frac{f + g}{\eta} \right) - \frac{1 - v_{23}^* - 2v_{21}^* v_{12}^*}{E_1^*(1 - v_{23}^*)}, \\
d^\circ &= \frac{v_{21}^\circ}{E_2^\circ} \left(v_{21}^\circ \left(\frac{\tau}{\eta} f + 1 \right) - \frac{2v_{21}^\circ}{1 - v_{23}^\circ} - 2v_{21}^\circ E_2^* f \frac{f + g}{\eta} \right) - \frac{1 - v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ(1 - v_{23}^\circ)}, \\
d_0 &= \left(\frac{v_{21}^\circ}{E_2^\circ} \frac{\tau}{\eta} - 2v_{21}^* \frac{f + g}{\eta} \right) \left(\frac{E_2^\circ}{E_2^*} f(1 - v_{23}^*) - f(1 - v_{23}^\circ) - 2g \right) - \\
&\quad - \frac{2v_{21}^*}{E_2^*} + \frac{v_{21}^\circ}{E_2^\circ} (1 + v_{23}^\circ) + \frac{v_{21}^\circ}{E_2^*} (1 - v_{23}^*), \tag{2.25}
\end{aligned}$$

де $\tau = E_2^*(1 + v_{23}^\circ)(f + g - 1) + E_2^\circ((f + g)(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*))$, 3

урахуванням яких записується рівність

$$d^* \sigma_0^* - d^\circ \sigma_0^\circ = d_0 \sigma_0. \quad (2.26)$$

Далі моделюється поперечний розтяг однорідного трансропного матеріалу, що моделює композит (рис. 2.2 б). У цьому випадку поле напружень визначається наступними співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zr} = 0. \quad (2.27)$$

Радіальні переміщення описуються співвідношенням (2.5). Оскільки при $r = 0$ матимемо $u_r(0) = 0$, тоді $C_2 = 0$.

Тоді, радіальні та осьові переміщення визначаються формулами:

$$u_r(r) = C_1 r, \quad u_z(z) = -\frac{2C_1 \nu_{21}}{1 - \nu_{23}} z, \quad (2.28)$$

а зі співвідношень (2.11) отримують вирази для радіальних та окружних напружень у вигляді:

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{C_1 E_2}{1 - \nu_{23}}, \quad \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{C_1 E_2}{1 - \nu_{23}}. \quad (2.29)$$

Аналогічно до (2.15) отримують крайову умову

$$\sigma_{rr}(b) = \sigma_0. \quad (2.30)$$

Враховуючи, що значення виразів (2.29) – сталі величини, можемо записати наступне:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0. \quad (2.31)$$

Рівняння стану трансверсально-ізотропного матеріалу (А.34) та (А.36), з урахуванням (2.27) та (2.31), матимуть вигляд:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23})}{E_2}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1}. \quad (2.32)$$

Переміщення отримуються, використовуючи співвідношення Коші (А.1) та (А.5). Інтегруючи (2.32), отримаємо:

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23})}{E_2}r + C_1, \quad u_z(z) = -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1}z + C_2. \quad (2.33)$$

За умови, що $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$, сталі C_1 та C_2 дорівнюють нулю, співвідношення (2.33) переписуються наступним чином:

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23})}{E_2}r, \quad u_z(z) = -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1}z. \quad (2.34)$$

Для того, щоб задачі про сумісний поперечний розтяг компонентів композиту та про розтяг однорідного трансропного матеріалу були еквівалентні, необхідно, щоб для умов рівноваги у обох задачах виконувалася рівність:

$$\pi(a^2 - c^2)\sigma_0^\circ + \pi(b^2 - a^2)\sigma_0^* = 0. \quad (2.35)$$

Перейшовши в (2.35) до об'ємних часток складових композиту (2.1), отримуємо:

$$\sigma_0^\circ f + \sigma_0^*(1 - f - g) = 0. \quad (2.36)$$

З останнього виразу, з урахуванням (2.26), отримуємо:

$$\sigma_0^* = \sigma_0 \frac{d_0 f}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)}, \quad \sigma_0^\circ = \sigma_0 \frac{d_0 (f + g - 1)}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)}. \quad (2.37)$$

Умовами узгодження для сумісного розв'язування двох сформульованих задач будуть виступати рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні та рівність осьових переміщень для довільної осьової координати:

$$u_r(b) = u_r^*(b), \quad u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (2.38)$$

З першої умови (2.38), з урахуванням (2.37), отримують такий пружний коефіцієнт:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu_{23}}{E_2} = & \frac{2f(f + g)E_2^\circ + \eta}{\eta E_2^*} \left((1 - \nu_{23}^*) - \frac{d_0 f \nu_{21}^*}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)} \right) - \\ & - 2 \frac{f + g}{\eta} \left(f(1 - \nu_{23}^\circ) - \frac{d^\circ (f + g - 1)(f + 2g)\nu_{21}^\circ}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)} + 2g \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Перепозначивши в останньому виразі

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & (1 - \nu_{23}^*) - \frac{d_0 f \nu_{21}^*}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)}, \\ \gamma_2 = & (1 - \nu_{23}^\circ) - \frac{d^\circ (f + g - 1)\nu_{21}^\circ}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

отримаємо

$$\frac{1 - \nu_{23}}{E_2} = \frac{2f(f + g)E_2^\circ + \eta}{\eta E_2^*} \gamma_1 - 2 \frac{(f + g)(f + 2g)}{\eta} \gamma_2 - \frac{4g(f + g)\nu_{23}^\circ}{\eta}. \quad (2.41)$$

Вираз (2.41) надалі використовуватиметься для знаходження розрахункових формул поперечного модуля пружності E_2 та коефіцієнта Пуассона ν_{23} .

2.3 Ефективні пружні сталі композиційного матеріалу при чистому поперечному зсуві

Для моделювання поперечного зсуву композиту, розглядають спочатку задачу про сумісне деформування двох порожнистих циліндрів з радіусами ($c \leq r \leq a$) та ($a \leq r \leq b$).

При деформації чистого поперечного зсуву реальний композиційний матеріал перебуває в стані, близькому до плоскої деформації, тобто $\varepsilon_{zz} = 0$.

При моделюванні чистого зсуву для циліндричної області, використовується задача про розтяг прямокутної пластини напруженнями σ_0 в одному напрямку та дії стискаючих напружень σ_0 в іншому (рис. 2.3 а).

Для того, щоб отримати поперечний зсув для циліндричних областей, якими є порожнистий циліндр, що моделює матрицю, і порожнистий циліндр, що моделює волокно, розглянемо розв'язок задачі Кірша. В цій задачі нескінченна пластина з круглим отвором малого радіуса a розтягується напруженням σ_0 (рис. 2.3 б). Виокремивши із пластини кільце радіусом b ($b \gg a$), на межі цього кільця як для простого розтягнення будемо мати [49, с. 105–112]:

$$\sigma_{rr}(b, \theta) = \frac{1}{2} \sigma_0 (1 + \cos 2\theta), \quad \sigma_{r\theta}(b, \theta) = -\frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\theta. \quad (2.42)$$

Для того, щоб отримати чистий зсув, прикладають для такої ж пластини стискаюче навантаження в перпендикулярному напрямі (рис. 2.3 в). І для межі кільця радіусом b ($b \gg a$) матимемо:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(b, \theta) &= -\frac{1}{2}\sigma_0(1 - \cos 2\theta), \\ \sigma_{r\theta}(b, \theta) &= -\frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (2.43)$$

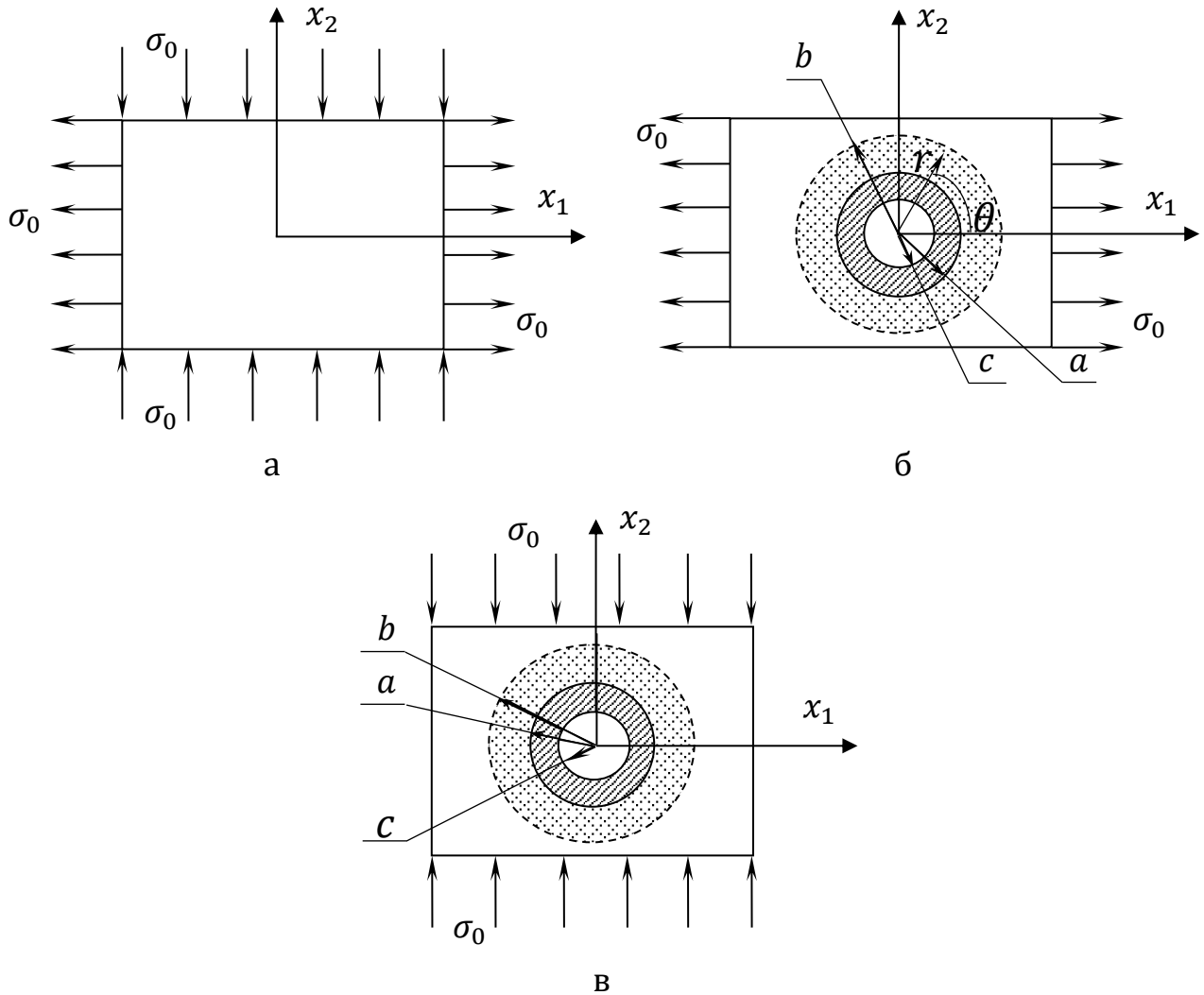


Рис. 2.3. Поперечний зсув: а – пластина під дією розтягуючих та стискаючих напружень; б – пластина з отвором під дією розтягуючих напружень; в – пластина з отвором під дією стискаючих напружень

Таким чином, щоб отримати чистий зсув в кільці радіусом b , згідно з методом суперпозицій, до зовнішньої межі кільця необхідно прикласти таке навантаження (рис. 2.4):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(b, \theta) &= \sigma_0 \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}(b, \theta) &= -\sigma_0 \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (2.44)$$

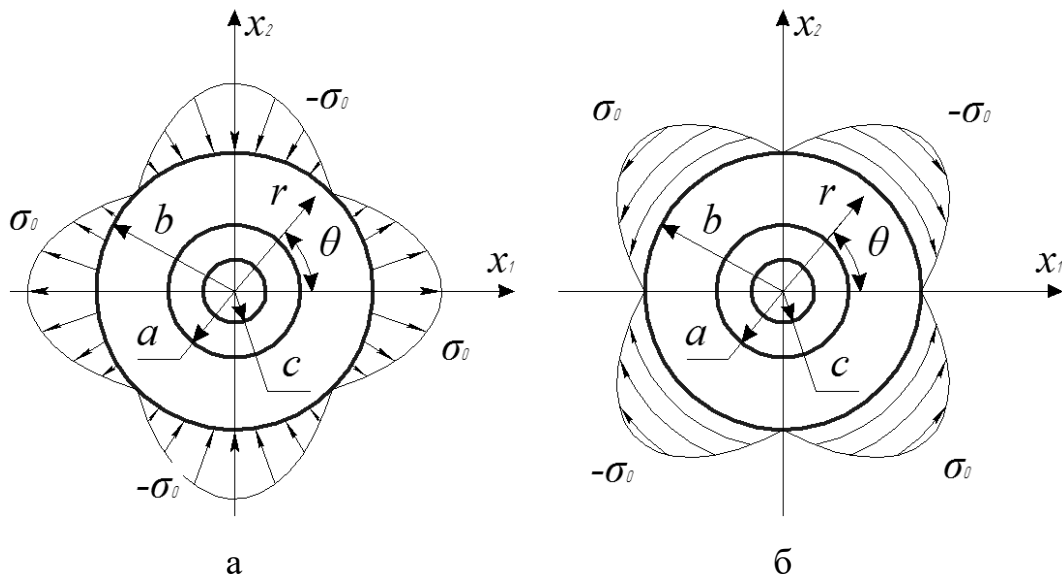


Рис. 2.4. Крайові умови при поперечному зсуві в кільці: а – для напружень $\sigma_{rr}(b, \theta)$; б – для напружень $\sigma_{r\theta}(b, \theta)$

Розв'язок цієї крайової задачі зручно знаходити за допомогою функції Ері вигляду $\phi(r, \theta) = f(r) \cos 2\theta$, тоді бігармонічне рівняння сумісності деформацій у полярній системі координат набуває вигляду [91]:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0. \quad (2.45)$$

Розв'язком цього рівняння є функція вигляду:

$$f(r) = C_1 r^2 + C_2 r^4 + \frac{C_3}{r^2} + C_4. \quad (2.46)$$

Тоді функція Ері для цієї крайової задачі записується у вигляді:

$$\phi(r, \theta) = \left(C_1 r^2 + C_2 r^4 + \frac{C_3}{r^2} + C_4 \right) \cos 2\theta. \quad (2.47)$$

І тепер, враховуючи зв'язок функції Ері з компонентами тензора

напружень:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, & \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right),\end{aligned}\quad (2.48)$$

отримують співвідношення для напруженого стану кожного з двох кілець в умовах чистого зсуву:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta) &= -\left(2C_1 + \frac{6C_3}{r^4} + \frac{4C_4}{r^2}\right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \left(2C_1 + 12C_2 r^2 + \frac{6C_3}{r^4}\right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \left(2C_1 + 6C_2 r^2 - \frac{6C_3}{r^4} - \frac{2C_4}{r^2}\right) \sin 2\theta, \\ \sigma_{zr} &= \sigma_{\theta z} = 0.\end{aligned}\quad (2.49)$$

Компоненту σ_{zz} знаходять з умови:

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad (2.50)$$

скориставшись співвідношенням (А.36):

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{zz} - \nu_{12}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})) = 0, \quad (2.51)$$

з урахуванням (2.49), отримують:

$$\sigma_{zz}(r, \theta) = \nu_{12} \left(12C_2 r^2 - \frac{4C_4}{r^2} \right) \cos 2\theta. \quad (2.52)$$

Напружений стан для трансропного матеріалу описується співвідношеннями (2.49) та (2.52).

Тепер, скориставшись законом Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу, визначають деформований стан кожного з двох кілець в умовах чистого зсуву. З урахуванням (А.34)–(А.39), (2.49) та (2.52), мають:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr}(r, \theta) &= -\frac{1}{E_2} (2C_1(1 + \nu_{23}) + 12C_2r^2(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}) + \\
 &\quad + \frac{6C_3}{r^4}(1 + \nu_{23}) + \frac{4C_4}{r^2}(1 - \nu_{21}\nu_{12})) \cos 2\theta, \\
 \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{E_2} (2C_1(1 + \nu_{23}) + 12C_2r^2(1 - \nu_{21}\nu_{12}) + \\
 &\quad + \frac{6C_3}{r^4}(1 + \nu_{23}) + \frac{4C_4}{r^2}(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12})) \cos 2\theta, \\
 \gamma_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{2(1 + \nu_{23})}{E_2} \left(2C_1 + 6C_2r^2 - \frac{6C_3}{r^4} - \frac{2C_4}{r^2} \right) \sin 2\theta, \\
 \gamma_{zr} &= 0, \quad \gamma_{z\theta} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Далі знаходять компоненти вектора переміщень. Інтегрують перші два співвідношення (2.53). Тоді із співвідношень (А.1) та (А.3) отримують:

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \theta) &= \int \varepsilon_{rr} dr = -\frac{1}{E_2} (2C_1(1 + \nu_{23})r + 4C_2r^3(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}) - \\
 &\quad - \frac{2C_3}{r^3}(1 + \nu_{23}) - \frac{4C_4}{r}(1 - \nu_{21}\nu_{12})) \cos 2\theta + C_1(\theta), \\
 u_\theta(r, \theta) &= \int (r\varepsilon_{\theta\theta} - u_r) d\theta = \frac{2}{E_2} (C_1(1 + \nu_{23})r + C_2r^3(3 + \nu_{23} - 2\nu_{21}\nu_{12}) + \\
 &\quad + \frac{C_3}{r^3}(1 + \nu_{23}) - \frac{C_4}{r}(1 - \nu_{23} - 2\nu_{21}\nu_{12})) \sin 2\theta - \int C_1(\theta) d\theta + C_2(r).
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Підставляють отримані вирази (2.54) в співвідношення Коші (А.6). Прирівнюють отриманий вираз і третє співвідношення з (2.53), отримують:

$$\frac{\partial C_1(\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial C_2(r)}{\partial r} + \int C_1(\theta) d\theta - C_2(r) = 0. \quad (2.55)$$

Вираз (2.55) диференціюють по θ . Отримують:

$$\frac{\partial^2 C_1(\theta)}{\partial \theta^2} + C_1(\theta) = 0. \quad (2.56)$$

Розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (2.56), записують у вигляді:

$$C_1(\theta) = S_1 \cos \theta + S_2 \sin \theta. \quad (2.57)$$

Отримують наступне співвідношення для радіальних переміщень:

$$u_r(r, \theta) = -\frac{2}{E_2} (C_1(1 + \nu_{23})r + 2C_2r^3(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}) - \frac{C_3}{r^3}(1 + \nu_{23}) - \frac{2C_4}{r}(1 - \nu_{21}\nu_{12})) \cos 2\theta + S_1 \cos \theta + S_2 \sin \theta. \quad (2.58)$$

Визначимо сталу $C_2(r)$. Підставляють (2.57) в (2.55), в результаті отримують рівняння:

$$r \frac{\partial C_2(r)}{\partial r} - C_2(r) = 0, \quad (2.59)$$

розв'язком якого є

$$C_2(r) = S_3 r. \quad (2.60)$$

Співвідношення для окружних переміщень записують у вигляді:

$$u_{\theta}(r, \theta) = \frac{2}{E_2} \left(C_1(1 + \nu_{23})r + C_2r^3(3 + \nu_{23} - 2\nu_{21}\nu_{12}) + \frac{C_3}{r^3}(1 + \nu_{23}) + \right. \\ \left. - \frac{C_4}{r}(1 - \nu_{23} - 2\nu_{21}\nu_{12}) \right) \sin 2\theta - S_1 \sin \theta + S_2 \cos \theta + S_3r. \quad (2.61)$$

Невідомі сталі S_1 , S_2 , що входять до співвідношень (2.58) та (2.61), знаходять, враховуючи симетричність крайової задачі:

$$u_r \left(r, \frac{\pi}{4} \right) = u_r \left(r, \frac{3\pi}{4} \right) = u_r \left(r, -\frac{\pi}{4} \right). \quad (2.62)$$

З підстановки (2.62) в (2.58), отримують:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (S_1 + S_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-S_1 + S_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} (S_1 - S_2). \quad (2.63)$$

Рівність (2.63) виконується при умові, що:

$$S_1 = 0, S_2 = 0. \quad (2.64)$$

Аналогічно, скориставшись симетричністю крайової задачі, знаходять невідому константу S_3 в (2.61). Запишемо наступну рівність:

$$u_{\theta}(r, 0) = 0. \quad (2.65)$$

Підставляючи (2.64) та $\theta = 0$ з (2.65) в (2.61), знаходять, що $S_3 = 0$.

Тепер співвідношення для вектору переміщень транстропного матеріалу записуються у вигляді:

$$u_r(r, \theta) = -\frac{2}{E_2} (C_1(1 + \nu_{23})r + 2C_2r^3(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{C_3}{r^3}(1 + \nu_{23}) - \frac{2C_4}{r}(1 - \nu_{21}\nu_{12}) \Big) \cos 2\theta, \\
u_\theta(r, \theta) = & \frac{2}{E_2} \left(C_1(1 + \nu_{23})r + C_2r^3(3 + \nu_{23} - 2\nu_{21}\nu_{12}) + \frac{C_3}{r^3}(1 + \nu_{23}) + \right. \\
& \left. - \frac{C_4}{r}(1 - \nu_{23} - 2\nu_{21}\nu_{12}) \right) \sin 2\theta. \quad (2.66)
\end{aligned}$$

Тепер, перепозначивши в співвідношеннях (2.49), (2.52) та (2.66) невідомі сталі C_1 на A , C_2 на B , C_3 на C , C_4 на D для матриці, для волокна на F , H , K , P відповідно, запишуться співвідношення, що визначають напружено-деформований стан для матеріалів матриці та порожнистого волокна.

Для трансропної матриці отримують:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^*(r, \theta) &= -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta, \\
\sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta) &= \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta, \\
\sigma_{r\theta}^*(r, \theta) &= \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin 2\theta, \\
\sigma_{zz}^*(r, \theta) &= \nu_{12}^* \left(12Br^2 - \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta, \\
\sigma_{zr}^* &= \sigma_{\theta z}^* = 0, \\
u_r^*(r, \theta) &= -\frac{2}{E_2^*} \left(A(1 + \nu_{23}^*)r + 2Br^3(\nu_{23}^* + \nu_{21}^*\nu_{12}^*) - \right. \\
& \left. - \frac{C}{r^3}(1 + \nu_{23}^*) - \frac{2D}{r}(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta, \\
u_\theta^*(r, \theta) &= \frac{2}{E_2^*} \left(A(1 + \nu_{23}^*)r + Br^3(3 + \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*) + \right. \\
& \left. + \frac{C}{r^3}(1 + \nu_{23}^*) - \frac{D}{r}(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right) \sin 2\theta. \quad (2.67)
\end{aligned}$$

Аналогічно виглядатимуть співвідношення для трансропного

порожнистого волокна:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{\circ}(r, \theta) &= -\left(2F + \frac{6K}{r^4} + \frac{4P}{r^2}\right) \cos 2\theta, \\
 \sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r, \theta) &= \left(2F + 12Hr^2 + \frac{6K}{r^4}\right) \cos 2\theta, \\
 \sigma_{r\theta}^{\circ}(r, \theta) &= \left(2F + 6Hr^2 - \frac{6K}{r^4} - \frac{2P}{r^2}\right) \sin 2\theta, \\
 \sigma_{zz}^{\circ}(r, \theta) &= \nu_{12}^{\circ} \left(12Hr^2 - \frac{4P}{r^2}\right) \cos 2\theta, \\
 \sigma_{zr}^{\circ} &= \sigma_{\theta z}^{\circ} = 0, \\
 u_r^{\circ}(r, \theta) &= -\frac{2}{E_2} \left(F(1 + \nu_{23}^{\circ})r + 2Hr^3(\nu_{23}^{\circ} + \nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{K}{r^3}(1 + \nu_{23}^{\circ}) - \frac{2P}{r}(1 - \nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}) \right) \cos 2\theta, \\
 u_{\theta}^{\circ}(r, \theta) &= \frac{2}{E_2} \left(F(1 + \nu_{23}^{\circ})r + Hr^3(3 + \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{K}{r^3}(1 + \nu_{23}^{\circ}) - \frac{P}{r}(1 - \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}) \right) \sin 2\theta. \quad (2.68)
 \end{aligned}$$

Спочатку знаходять розв'язок задачі про сумісний поперечний зсув двох порожнистих циліндрів, що моделюють матрицю та порожнисте волокно, відповідно.

Невідомі сталі A, B, C, D, F, H, K, P , що входять до співвідношень (2.67) та (2.68), знаходять з умов неперервності на стику двох циліндрів:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^*(a, \theta) &= \sigma_{rr}^{\circ}(a, \theta), \quad \sigma_{r\theta}^*(a, \theta) = \sigma_{r\theta}^{\circ}(a, \theta), \\
 u_r^*(a, \theta) &= u_r^{\circ}(a, \theta), \quad u_{\theta}^*(a, \theta) = u_{\theta}^{\circ}(a, \theta), \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

а також крайових умов:

$$\sigma_{rr}^*(b, \theta) = \sigma_0 \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^*(b, \theta) = -\sigma_0 \sin 2\theta. \quad (2.70)$$

Крім цього, внутрішня поверхня порожнистого волокна має бути вільною від напружень [49], тому додаються умови:

$$\sigma_{rr}^{\circ}(c, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{\circ}(c, \theta) = 0. \quad (2.71)$$

З крайових умов (2.70) знаходять:

$$A = -\frac{\sigma_0}{2} - \frac{3Bb^2}{2} - \frac{D}{2b^2}, \quad C = \frac{1}{2}(Bb^6 - Db^2). \quad (2.72)$$

Зі співвідношень (2.71) отримують:

$$F = -\frac{3Hc^2}{2} - \frac{P}{2c^2}, \quad K = \frac{1}{2}(Hc^6 - Pc^2). \quad (2.73)$$

Умови (2.69), з урахуванням (2.72), (2.73) та (2.1), приймають вигляд:

$$\begin{aligned} & -\sigma_0 + Ba^2 \frac{3(1 - (f + g)^2)}{(f + g)^3} - D \frac{1}{a^2} \frac{3 - 4(f + g) + (f + g)^2}{f + g} = \\ & = Ha^2 \frac{3g(g^2 - (f + g)^2)}{(f + g)^3} - P \frac{1}{a^2} \frac{3g^2 - 4g(f + g) + (f + g)^2}{g(f + g)}, \\ & -\sigma_0 - Ba^2 \frac{3(1 + (f + g)^2 - 2(f + g)^3)}{(f + g)^3} + D \frac{1}{a^2} \frac{3 - 2(f + g) - (f + g)^2}{f + g} = \\ & = -Ha^2 \frac{3(g^3 + g(f + g)^2 - 2(f + g)^3)}{(f + g)^3} + P \frac{1}{a^2} \frac{3g^2 - 2g(f + g) - (f + g)^2}{g(f + g)}, \\ & Ba^3 \frac{4(f + g)^3(v_{23}^* + v_{21}^*v_{12}^*) - (1 + v_{23}^*)(1 + 3(f + g)^2)}{(f + g)^3 E_2^*} - \\ & - D \frac{4(f + g)(1 - v_{21}^*v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*)((f + g)^2 - 1)}{a(f + g)E_2^*} - \sigma_0 \frac{a(1 + v_{23}^*)}{E_2^*} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -Ha^3 \frac{(3g(f+g)^2 + g^3)(1 + v_{23}^\circ) - 4(f+g)^3(v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ)}{(f+g)^3 E_2^\circ} - \\
&\quad -P \frac{((f+g)^2 - g^2)(1 + v_{23}^\circ) + 4g(f+g)(1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ)}{ag(f+g)E_2^\circ}, \\
&Ba^3 \frac{2(f+g)^3(3 + v_{23}^* - 2v_{21}^* v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*)(1 - 3(f+g)^2)}{(f+g)^3 E_2^*} + \\
+D \frac{2(f+g)(v_{23}^* + 2v_{21}^* v_{12}^* - 1) - (1 + v_{23}^*)((f+g)^2 + 1)}{a(f+g)E_2^*} - \sigma_0 \frac{a(1 + v_{23}^*)}{E_2^*} = \\
&-Ha^3 \frac{(3g(f+g)^2 - g^3)(1 + v_{23}^\circ) - 2(f+g)^3(3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ)}{(f+g)^3 E_2^\circ} - \\
&\quad -P \frac{((f+g)^2 + g^2)(1 + v_{23}^\circ) - 2g(f+g)(v_{23}^\circ + 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ - 1)}{ag(f+g)E_2^\circ}. \quad (2.74)
\end{aligned}$$

З перших двох рівностей (2.74) отримують:

$$\begin{aligned}
H &= \sigma_0 \frac{(f+g)((f+g)^2 + f+g+1)}{3a^2 f(g-1)(f+2g+1)} + D \frac{(f+g)(f+g-1)^3}{3a^4 f(g-1)(f+2g+1)} - \\
&\quad -P \frac{(f+g)((f+g)^2 + (f+g)(1-3g)+1)}{3a^4 g(g-1)(f+2g+1)}, \\
B &= \sigma_0 \frac{(f+g)(f^2 + 3g(f+g))}{3a^2 (f+g-1)(g-1)(f+2g+1)} + \\
&\quad +D \frac{(f+g)(f^2 + 3(f+g)(g-1))}{3a^4 (g-1)(f+2g+1)} - \\
&\quad -P \frac{f^3(f+g)}{3a^4 g(f+g-1)(g-1)(f+2g+1)}. \quad (2.75)
\end{aligned}$$

Вводяться наступні позначення:

$$k_{11} = 4(f+g)^3(v_{23}^* + v_{21}^* v_{12}^*) - (1 + v_{23}^*)(1 + 3(f+g)^2),$$

$$\begin{aligned}
k_{12} &= 4(f+g)(1 - v_{21}^* v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*)((f+g)^2 - 1), \\
k_{13} &= (3g(f+g)^2 + g^3)(1 + v_{23}^\circ) - 4(f+g)^3(v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ), \\
k_{14} &= ((f+g)^2 - g^2)(1 + v_{23}^\circ) + 4g(f+g)(1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ), \\
k_{21} &= 2(f+g)^3(3 + v_{23}^* - 2v_{21}^* v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*)(1 - 3(f+g)^2), \\
k_{22} &= 2(f+g)(v_{23}^* + 2v_{21}^* v_{12}^* - 1) - (1 + v_{23}^*)((f+g)^2 + 1), \\
k_{23} &= (3g(f+g)^2 - g^3)(1 + v_{23}^\circ) - 2(f+g)^3(3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ), \\
k_{24} &= ((f+g)^2 + g^2)(1 + v_{23}^\circ) - 2g(f+g)(v_{23}^\circ + 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ - 1). \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Останні дві рівності (2.74) з урахуванням (2.76), переписуться у вигляді:

$$\begin{aligned}
Ba^3 \frac{k_{11}}{(f+g)^3 E_2^*} - D \frac{k_{12}}{a(f+g)E_2^*} - \sigma_0 \frac{a(1 + v_{23}^*)}{E_2^*} &= \\
&= -Ha^3 \frac{k_{13}}{(f+g)^3 E_2^\circ} - P \frac{k_{14}}{ag(f+g)E_2^\circ}, \\
Ba^3 \frac{k_{21}}{(f+g)^3 E_2^*} + D \frac{k_{22}}{a(f+g)E_2^*} - \sigma_0 \frac{a(1 + v_{23}^*)}{E_2^*} &= \\
&= -Ha^3 \frac{k_{23}}{(f+g)^3 E_2^\circ} - P \frac{k_{24}}{ag(f+g)E_2^\circ}. \quad (2.77)
\end{aligned}$$

Підставляючи (2.75) в (2.77), отримують систему лінійних рівнянь відносно невідомих D та P .

Вводиться ряд позначень:

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= d_{13}t_4 - d_{23}t_3, \\
\chi_2 &= d_{23}t_2 - d_{13}t_1, \\
\chi_3 &= t_1t_3 - t_2t_4, \\
t_1 &= d_{21}E_2^\circ f + k_{23}E_2^*(f+g-1)^3, \\
t_2 &= d_{11}E_2^\circ f + k_{13}E_2^*(f+g-1)^3, \\
t_3 &= k_{11}E_2^\circ f^3 + d_{12}E_2^*(f+g-1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_4 &= k_{21}E_2^\circ f^3 + d_{22}E_2^*(f + g - 1), \\
d_{11} &= k_{11}(f^2 + 3(f + g)(g - 1)) - 3k_{12}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1), \\
d_{12} &= k_{13}((f + g)^2 + (f + g)(1 - 3g) + 1) - \\
&\quad - 3k_{14}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1), \\
d_{13} &= k_{13}E_2^*(f + g - 1)((f + g)^2 + f + g + 1) + E_2^\circ f(k_{11}(f^2 + 3g(f + g)) - \\
&\quad - 3(1 + \nu_{23}^*)(f + g)^2(f + g - 1)(g - 1)(f + 2g + 1)), \\
d_{21} &= k_{21}(f^2 + 3(f + g)(g - 1)) + 3k_{22}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1), \\
d_{22} &= k_{23}((f + g)^2 + (f + g)(1 - 3g) + 1) - \\
&\quad - 3k_{24}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1), \\
d_{23} &= k_{23}E_2^*(f + g - 1)((f + g)^2 + f + g + 1) + E_2^\circ f(k_{21}(f^2 + 3g(f + g)) - \\
&\quad - 3(1 + \nu_{23}^*)(f + g)^2(f + g - 1)(g - 1)(f + 2g + 1)). \quad (2.78)
\end{aligned}$$

Тоді, з урахуванням (2.78), отримують розв'язок цієї системи:

$$D = \sigma_0 a^2 \frac{\chi_1}{\chi_3(f + g - 1)}, \quad P = -\sigma_0 a^2 \frac{g \chi_2}{f \chi_3}. \quad (2.79)$$

Тепер знаходять співвідношення для всіх інших сталих:

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{\sigma_0}{2} \frac{1}{\chi_3(g - 1)(f + 2g + 1)(f + g - 1)} \times \\
&\quad \times \left((g(f + g + 1)(f + 2g) - 4(f + g))\chi_1 + \right. \\
&\quad \left. + (g(f + g)(f + 2g) + 1)\chi_3 + f^2\chi_2 \right), \\
B &= \frac{\sigma_0}{3a^2} \frac{1}{\chi_3(g - 1)(f + 2g + 1)(f + g - 1)} \times \\
&\quad \times \left(((f + g)(f + g - 3) + g(f + 2g))\chi_1 + \right. \\
&\quad \left. + ((f + g)^2 + g(f + 2g))\chi_3 + f^2\chi_2 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= -\frac{b^4 \sigma_0}{6} \frac{1}{\chi_3 (g-1)(f+2g+1)(f+g-1)} \times \\
&\times \left((3g(f+g)(f+2g) - 4(f+g)^2 - g(f+2g)) \chi_1 - \right. \\
&\quad \left. - ((f+g)^2 + g(f+2g)) \chi_3 - f^2 \chi_2 \right), \\
F &= -\frac{\sigma_0}{2} \frac{1}{\chi_3 f (g-1)(f+2g+1)} \times \\
&\times (g(f+g-1)^2 \chi_1 + g((f+g)^2 + f+g+1) \chi_3 - \\
&\quad - ((f+g)(4g^2 - f - 2g) - f - 2g) \chi_2), \\
H &= \frac{\sigma_0}{3a^2} \frac{(f+g)}{\chi_3 f (g-1)(f+2g+1)} \times \\
&\times ((f+g-1)^2 \chi_1 + ((f+g)^2 + f+g+1) \chi_3 + \\
&\quad + ((f+g)^2 + (f+g)(1-3g) + 1) \chi_2), \\
K &= \frac{\sigma_0 c^4}{6} \frac{1}{\chi_3 f (g-1)(f+2g+1)} \times \\
&\times (g(f+g-1)^2 \chi_1 + g((f+g)^2 + f+g+1) \chi_3 + \\
&\quad + ((f+g)^2 (4g-3) - (f+g)(3-g) + g) \chi_2). \tag{2.80}
\end{aligned}$$

Розв'язують аналогічну задачу на чистий поперечний зсув для транстропного однорідного матеріалу, що моделює композит. У цій задачі композиційний матеріал представляється у вигляді суцільного циліндра радіусом b .

Крайові умови в цьому випадку також описуються співвідношеннями (2.44).

Визначимо співвідношення, що описуватимуть напружений стан матеріалу. Напруження при $r = 0$ мають кінцеві значення, тому необхідно, щоб у формулах (2.49) C_3 та C_4 дорівнювали нулю.

Тоді напружений стан суцільного композиційного матеріалу записується у вигляді (C_1 перепозначається на L , C_2 – на T):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta) &= -2L \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= (2L + 6Tr^2) \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (2.81)$$

З крайових умов (2.44) та співвідношень (2.81), знаходять сталі L та T .
Отримують:

$$L = -\frac{\sigma_0}{2}, \quad T = 0. \quad (2.82)$$

Тепер, скориставшись співвідношеннями (2.49), (2.53), (2.66), записують компоненти напружено-деформованого стану трансропного однорідного композиційного матеріалу. Отримують наступні вирази для напружень, деформацій та переміщень:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta) &= \sigma_0 \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= -\sigma_0 \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\sigma_0 \sin 2\theta, \\ \varepsilon_{rr}(r, \theta) &= \frac{\sigma_0(1 + \nu_{23})}{E_2} \cos 2\theta, \\ \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) &= -\frac{\sigma_0(1 + \nu_{23})}{E_2} \cos 2\theta, \\ \gamma_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{2\sigma_0(1 + \nu_{23})}{E_2} \sin 2\theta, \\ u_r(r, \theta) &= \frac{\sigma_0(1 + \nu_{23})r}{E_2} \cos 2\theta, \\ u_\theta(r, \theta) &= -\frac{\sigma_0(1 + \nu_{23})r}{E_2} \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (2.83)$$

Умовами узгодження при сумісному розв'язуванні двох сформульованих задач про чистий поперечний зсув виступають рівність радіальних та окружних переміщень на зовнішній межі:

$$u_r(b, \theta) = u_r^*(b, \theta), \quad u_\theta(b, \theta) = u_\theta^*(b, \theta). \quad (2.84)$$

Використовуючи першу з умов (2.84), отримують:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} &= \frac{4}{3\chi_3(g-1)(f+2g+1)(f+g-1)} \frac{1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*}{E_2^*} \times \\ &\times \left(((f+g)(3g(f+2g) - 2(f+3)) - fg) \chi_1 + f^2 \chi_2 + \right. \\ &\left. + ((f+g)^2 + g(f+2g)) \chi_3 \right) + \frac{1 + \nu_{23}^*}{E_2^*}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

З другої умови (2.84) отримують:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} &= \frac{4}{3\chi_3(g-1)(f+2g+1)(f+g-1)} \frac{1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*}{E_2^*} \times \\ &\times \left(((g-1)(4(f+g)^2 + g(f+2g)) - f^2 g) \chi_1 - f^2 \chi_2 - \right. \\ &\left. - ((f+g)^2 + g(f+2g)) \chi_3 \right) + \frac{1 + \nu_{23}^*}{E_2^*}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Вводяться такі позначення:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \frac{1}{3\chi_3(g-1)(f+2g+1)(f+g-1)} \times \\ &\times \left(((f+g)(3g(f+2g) - 2(f+3)) - fg) \chi_1 + f^2 \chi_2 + \right. \\ &\left. + ((f+g)^2 + g(f+2g)) \chi_3 \right), \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \gamma_4 = & \frac{1}{3\chi_3(g-1)(f+2g+1)(f+g-1)} \times \\ & \times \left(((g-1)(4(f+g)^2 + g(f+2g)) - f^2g)\chi_1 - f^2\chi_2 - \right. \\ & \left. - ((f+g)^2 + g(f+2g))\chi_3 \right). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Враховуючи, що

$$\frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} + \frac{(1 - \nu_{23})}{E_2} = \frac{2}{E_2} \quad (2.89)$$

та використовуючи співвідношення (2.41) та (2.85), з урахуванням (2.87), отримують формулу поперечного модуля зсуву на основі рівності радіальних переміщень:

$$\begin{aligned} E_2 = & 2\eta E_2^* / (\eta(4\gamma_3(1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + (1 + \nu_{23}^*) + \gamma_1) + \\ & + 2(f+g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f+2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right)). \end{aligned} \quad (2.90)$$

З (2.89), з урахуванням (2.41), (2.86) та (2.88), отримують формулу на основі рівності окружних переміщень:

$$\begin{aligned} E_2 = & 2\eta E_2^* / (\eta(4\gamma_4(1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + (1 + \nu_{23}^*) + \gamma_1) + \\ & + 2(f+g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f+2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right)). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Враховуючи, що

$$\frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} - \frac{(1 - \nu_{23})}{E_2} = \frac{2\nu_{23}}{E_2} \quad (2.92)$$

та використовуючи співвідношення (2.41), (2.85), (2.87) та (2.90), отримують формулу для коефіцієнта Пуассона ν_{23} на основі рівності радіальних переміщень:

$$\begin{aligned} \nu_{23} = & (\eta(4\gamma_3(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) + (1 + \nu_{23}^*) - \gamma_1) - \\ & - 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right)) / \\ & (\eta(4\gamma_3(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) + (1 + \nu_{23}^*) + \gamma_1) + \\ & + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right)). \end{aligned} \quad (2.93)$$

З (2.92), з урахуванням (2.41), (2.86), (2.88) та (2.91), отримують формулу на основі рівності окружних переміщень:

$$\begin{aligned} \nu_{23} = & (\eta(4\gamma_4(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) + (1 + \nu_{23}^*) - \gamma_1) - \\ & - 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right)) / \\ & (\eta(4\gamma_4(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) + (1 + \nu_{23}^*) + \gamma_1) + \\ & + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right)). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Отримали розрахункові формули для поперечного модуля пружності E_2 та коефіцієнта Пуассона ν_{23} , що виражають залежність від пружних характеристик матриці E_1^* , E_2^* , ν_{12}^* , ν_{23}^* та волокна E_1° , E_2° , ν_{12}° , ν_{23}° , а також об'ємного вмісту матеріалу волокна f та порожнини g у матеріалі композиту.

2.4 Висновки до другого розділу

У розділі на основі кінематичного критерію узгодження, отримані формули для визначення поперечних пружних характеристик E_2 та ν_{23} композиційного матеріалу з трансстропними матрицею та порожнистим волокном. Слід відзначити, що ці співвідношення отримані на основі рівності радіальних (формули (2.90), (2.93)) та окружних (формули (2.91), (2.94)) переміщень. Використання тієї чи іншої формули залежить від конкретного типу компонентів композиційного матеріалу й узгоджується порівнянням із експериментальними даними.

Аналітичні співвідношення для розрахунку E_2 та ν_{23} для композитів з порожнистими волокнами для різних комбінацій виду анізотропії (ізотропії/трансверсальної ізотропії) матеріалів матриці та волокна наведено у Додатку Б.

РОЗДІЛ 3. ГОМОГЕНІЗАЦІЯ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ТРАНСТРОПНИМИ МАТРИЦЕЮ ТА ПОРОЖНИСТИМ ВОЛОКНОМ ПРИ ПОЗДОВЖНІХ ДЕФОРМАЦІЯХ

3.1 Ефективні пружні сталі композиційного матеріалу при рівномірному поздовжньому розтягу

Основні припущення, прийняті при розв'язуванні задач про поперечний розтяг та чистий поперечний зсув композиційного матеріалу, залишаються без змін (п. 2.1, розділ 2).

Розглядають сумісний поздовжній розтяг двох порожнистих циліндрів з радіусами ($c \leq r \leq a$) та ($a \leq r \leq b$), що моделюють транстропне порожнисте волокно, і транстропну матрицю відповідно (рис. 3.1 а).

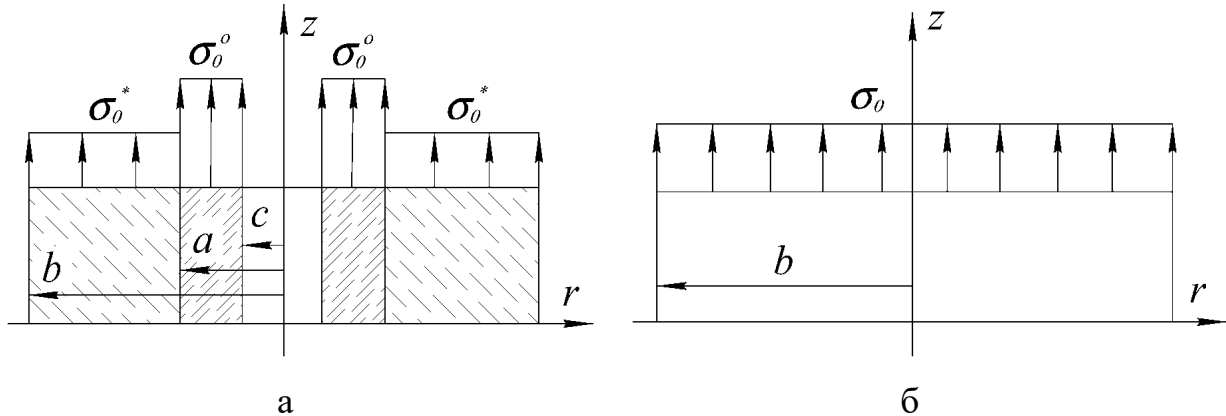


Рис. 3.1. Поздовжній розтяг: а – сумісне деформування матриці та порожнистого волокна; б – деформування композита

Напружено-деформований стан транстропної матриці описується співвідношеннями такого ж вигляду, що і для поперечного розтягу (2.12).

Аналогічно до поперечного розтягу, переміщення та напруження точок транстропного порожнистого волокна описуються співвідношеннями (2.13).

Умовами узгодження при розв'язуванні даної задачі будуть виступати рівність радіальних напружень та радіальних переміщень на межі «матриця-порожнисте волокно», а також осьових переміщень:

$$\sigma_{rr}^{\circ}(a) = \sigma_{rr}^*(a), u_r^{\circ}(a) = u_r^*(a), u_z^{\circ}(h) = u_z^*(h), \quad (3.1)$$

Запишемо крайові умови з міркувань, що зовнішня поверхня матриці та внутрішня поверхня порожнистого волокна вільні від напружень:

$$\sigma_{rr}^*(b) = 0, \sigma_{rr}^{\circ}(c) = 0. \quad (3.2)$$

Сталі A , B , C та D , що входять до співвідношень (2.12) та (2.13), знаходяться з перших двох умов (3.1) та крайових умов (3.2).

З першої рівності (3.2) отримують:

$$A = B \frac{1 - \nu_{23}^*}{b^2(1 + \nu_{23}^*)} - \frac{\sigma_0^* \nu_{12}^*}{E_1^*}. \quad (3.3)$$

З другої рівності (3.2) маємо:

$$D = \frac{c^2(\sigma_0^{\circ} \nu_{12}^{\circ} + C E_1^{\circ})(1 + \nu_{23}^{\circ})}{E_1^{\circ}(1 - \nu_{23}^{\circ})}. \quad (3.4)$$

З другої умови (3.1), з урахуванням (3.3), (3.4) та перейшовши до об'ємних часток складових композиційного матеріалу (2.1), матимемо:

$$C = \frac{1}{E_1^{\circ} E_1^*(1 + \nu_{23}^*) (2g + f(1 - \nu_{23}^{\circ}))} \left(\frac{B}{b^2} E_1^{\circ} E_1^* (1 - \nu_{23}^{\circ}) (1 + f + g + \nu_{23}^* \times \right. \\ \left. \times (1 - f - g)) - (1 + \nu_{23}^*) (g(1 + \nu_{23}^{\circ}) \sigma_0^{\circ} \nu_{12}^{\circ} E_1^* + (f + g)(1 - \nu_{23}^{\circ}) \sigma_0^* \nu_{12}^* E_1^{\circ}) \right). \quad (3.5)$$

Тепер, використовуючи першу з умов (3.1), знаходять сталу B :

$$B = \frac{fE_2^\circ(1 + \nu_{23}^*)(\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ E_1^* - \sigma_0^*\nu_{12}^* E_1^\circ)}{E_1^\circ E_1^* \left((1 - f - g) \left(f(E_2^*\nu_{23}^\circ - E_2^\circ\nu_{23}^*) - E_2^*(f + 2g) \right) - fE_2^\circ(1 + f + g) \right)}. \quad (3.6)$$

Позначимо

$$\alpha = (1 - f - g) \left(f(E_2^*\nu_{23}^\circ - E_2^\circ\nu_{23}^*) - E_2^*(f + 2g) \right) - fE_2^\circ(1 + f + g). \quad (3.7)$$

Тоді, після перетворень, отримують наступні вирази для невідомих сталих:

$$\begin{aligned} A &= f(f + g)E_2^\circ(1 - \nu_{23}^*) \frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ E_1^* - \sigma_0^*\nu_{12}^* E_1^\circ}{\alpha E_1^\circ E_1^*} - \frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*}, \\ B &= a^2 f E_2^\circ(1 + \nu_{23}^*) \frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ E_1^* - \sigma_0^*\nu_{12}^* E_1^\circ}{\alpha E_1^\circ E_1^*}, \\ C &= \left(1 - \frac{g(1 + \nu_{23}^\circ)}{2g + f(1 - \nu_{23}^\circ)} \right) (E_2^\circ f(1 + f + g + \nu_{23}^*(1 - f - g))) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ E_1^* - \sigma_0^*\nu_{12}^* E_1^\circ}{\alpha E_1^\circ E_1^*} - \frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*} \right) - \frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} \frac{g(1 + \nu_{23}^\circ)}{2g + f(1 - \nu_{23}^\circ)}, \\ D &= -c^2 E_2^*(1 + \nu_{23}^*)(f + g)(1 - f - g) \frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ E_1^* - \sigma_0^*\nu_{12}^* E_1^\circ}{\alpha E_1^\circ E_1^*}. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Використовуючи третю з умов (3.1), згрупуємо вирази при σ_0° та σ_0^* .

Позначаючи

$$d^{\circ} = \frac{\alpha + \beta v_{12}^{\circ}}{\alpha E_1^{\circ}}, \quad d^* = \frac{\alpha + \beta v_{12}^*}{\alpha E_1^*}, \quad (3.9)$$

де $\beta = 2(f + g)(v_{21}^{\circ} E_2^*(1 - f - g) + v_{21}^* E_2^{\circ} f)$, отримують

$$d^{\circ} \sigma_0^{\circ} = d^* \sigma_0^*. \quad (3.10)$$

Змоделюємо тепер поздовжній розтяг однорідного трансропного матеріалу (рис. 3.1 б). Напружений стан, що моделює поведінку композиційного матеріалу, описують співвідношення:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} = \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0, \quad (3.11)$$

Умова рівноваги при сумісному розв'язуванні двох сформульованих задач, має вигляд:

$$\pi(a^2 - c^2)\sigma_0^{\circ} + \pi(b^2 - a^2)\sigma_0^* = \pi b^2 \sigma_0. \quad (3.12)$$

Перейшовши в (3.12) до об'ємних часток складових композиту (2.1), отримують:

$$\sigma_0^{\circ} f + \sigma_0^*(1 - f - g) = \sigma_0. \quad (3.13)$$

З останнього виразу, з урахуванням (3.10), отримують:

$$\sigma_0^* = \sigma_0 \frac{d^{\circ}}{d^* f + d^{\circ}(1 - f - g)}, \quad \sigma_0^{\circ} = \sigma_0 \frac{d^*}{d^* f + d^{\circ}(1 - f - g)}. \quad (3.14)$$

Знайдемо співвідношення, що описують переміщення однорідного трансропного матеріалу.

Рівняння стану трансверсально-ізотропного матеріалу додатку А (А.34) та (А.36) запишуться у вигляді:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} \sigma_0. \quad (3.15)$$

Проінтегрувавши вирази (3.15) згідно зі співвідношеннями Коші (А.1) та (А.5), отримуємо:

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0 r + C_1, \quad u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z + C_2. \quad (3.16)$$

Невідомі сталі C_1 та C_2 дорівнюватимуть нулю, з урахуванням, що виконуються умови $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$. Тепер співвідношення для радіальних та осьових переміщень набувають вигляду:

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0 r, \quad u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z. \quad (3.17)$$

Умовами узгодження при сумісному розв'язуванні обох сформульованих задач про поздовжній розтяг будуть виступати рівності:

$$u_r(b) = u_r^*(b), \quad u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (3.18)$$

Друга з умов (3.18), з урахуванням (3.17) та виразу для $u_z^*(z)$ з (2.12), записується наступним чином:

$$\frac{1}{E_1} \sigma_0 = \frac{1}{1 - \nu_{23}^*} \left(\frac{\sigma_0^* (1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^* \nu_{12}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right). \quad (3.19)$$

Із рівності (3.19), враховуючи (3.7), вираз для A з (3.8) та співвідношень (3.14), отримують розрахункову формулу для поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з трансропними матрицею та порожнистим волокном:

$$E_1 = E_1^* \frac{\alpha}{d^\circ \alpha - \gamma} \left(d^* f + d^\circ (1 - f - g) \right), \quad (3.20)$$

з урахуванням співвідношення

$$\gamma = 2f(f + g) \left(v_{21}^\circ E_2^* \frac{v_{12}^*}{E_1^*} - v_{21}^* E_2^\circ \frac{v_{12}^*}{E_1^\circ} \right). \quad (3.21)$$

Перша з умов (3.18), з урахуванням (3.17), виразу для $u_r^*(r)$ з (2.12) та співвідношення для анізотропного матеріалу $v_{12}/E_1 = v_{21}/E_2$, приймає вигляд:

$$-\frac{v_{12}}{E_1} \sigma_0 = Ar + \frac{B}{r}. \quad (3.22)$$

З рівності (3.22), враховуючи (3.7), (3.8) та (3.14), отримують формулу для визначення коефіцієнта Пуассона v_{12} :

$$v_{12} = \frac{v_{21}^* v_{12}^* d^\circ \alpha - \gamma}{v_{21}^* (d^\circ \alpha - \gamma)}, \quad (3.23)$$

з урахуванням співвідношення

$$\gamma = 2f(f + g) \left(v_{21}^\circ E_2^* \frac{v_{12}^*}{E_1^*} - v_{21}^* E_2^\circ \frac{v_{12}^*}{E_1^\circ} \right). \quad (3.24)$$

Отримані співвідношення відображають залежності ефективних поздовжнього модуля пружності E_1 та коефіцієнта Пуассона ν_{12} від пружних характеристик трансропних матриці, порожнистого волокна й об'ємних часток матеріалу волокна та порожнини в матеріалі композита.

3.2 Ефективні пружні сталі композиційного матеріалу при чистому поздовжньому зсуві

Розв'язання задачі чистого поздовжнього зсуву трансверсально-ізотропного циліндричного тіла отримано в [91]. Отримані основні співвідношення, що описують даний вид деформації. Наведемо їх нижче.

Напружено-деформований стан описується наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \sigma_{r\theta} = 0, \\ \sigma_{\theta z} &= \sigma_{\theta z}(r, \theta), \quad \sigma_{zr} = \sigma_{zr}(r, \theta), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{r\theta} = 0, \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}(r, \theta), \quad \gamma_{zr} = \gamma_{zr}(r, \theta).\end{aligned}\tag{3.25}$$

З рівнянь рівноваги додатку А, враховуючи (3.25), перші два виконуються тотожно, третє запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0.\tag{3.26}$$

Запишемо рівняння (3.26) у переміщеннях:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0,\tag{3.27}$$

розв'язок якого

$$u_z(r, \theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \theta. \quad (3.28)$$

Тепер, використовуючи (3.28), формули Коші (А.2) та (А.4), отримують наступні співвідношення для деформацій:

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta z}(r, \theta) &= - \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta, \\ \gamma_{zr}(r, \theta) &= \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Вирази (А.49) та (А.50), з урахуванням (3.29), запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}(r, \theta) &= G_{12} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta, \\ \sigma_{z\theta}(r, \theta) &= -G_{12} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отримані співвідношення (3.28)–(3.30) описують напружено-деформований стан порожнистого циліндра при чистому поздовжньому зсуві.

Для знаходження модуля поздовжнього зсуву G_{12} , розв'язують дві задачі.

Змоделюємо спочатку сумісний чистий поздовжній зсув двох порожнистих циліндрів з радіусами $(c \leq r \leq a)$ та $(a \leq r \leq b)$, що моделюють транстропне порожнисте волокно і транстропну матрицю, відповідно (рис. 3.2).

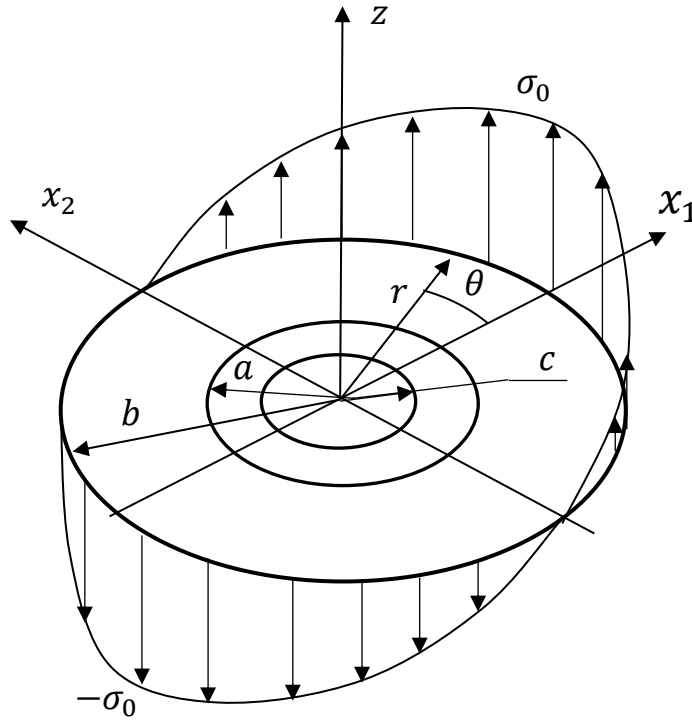


Рис. 3.2. Розподіл напружень $\sigma_{zr}(b, \theta)$ при поздовжньому зсуві в кільці

Напружено-деформований стан трансропних матриці та порожнистого волокна, визначається співвідношеннями (3.28)–(3.30), де C_1 перепозначають на A , C_2 на B для матриці, для волокна на C та D відповідно.

Тоді, для трансропної матриці отримують:

$$\begin{aligned}
 u_z^*(r, \theta) &= \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \cos\theta, \\
 \sigma_{z\theta}^*(r, \theta) &= -G_{12}^* \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin\theta, \quad \sigma_{zr}^*(r, \theta) = G_{12}^* \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos\theta, \\
 \gamma_{\theta z}^*(r, \theta) &= - \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin\theta, \quad \gamma_{zr}^*(r, \theta) = \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos\theta. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Для порожнистого трансропного волокна, мають:

$$u_z^\circ(r, \theta) = \left(Cr + \frac{D}{r} \right) \cos\theta,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{z\theta}^{\circ}(r, \theta) &= -G_{12}^{\circ} \left(C + \frac{D}{r^2} \right) \sin\theta, \quad \sigma_{zr}^{\circ}(r, \theta) = G_{12}^{\circ} \left(C - \frac{D}{r^2} \right) \cos\theta, \\ \gamma_{\theta z}^{\circ}(r, \theta) &= - \left(C + \frac{D}{r^2} \right) \sin\theta, \quad \gamma_{zr}^{\circ}(r, \theta) = \left(C - \frac{D}{r^2} \right) \cos\theta.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Невідомі сталі A, B, C, D , що входять до співвідношень (3.31) та (3.32), знаходять з умов неперервності на межі розділу матеріалів:

$$\sigma_{zr}^{\circ}(a, \theta) = \sigma_{zr}^*(a, \theta), \quad u_z^{\circ}(a, \theta) = u_z^*(a, \theta) \quad (3.33)$$

та крайових умов

$$\sigma_{zr}^*(b, \theta) = \sigma_0 \cos\theta, \quad \sigma_{zr}^{\circ}(c, \theta) = 0. \quad (3.34)$$

З першої умови (3.34) отримують:

$$A = \frac{B}{b^2} + \frac{\sigma_0}{G_{12}^*}. \quad (3.35)$$

Друга з умов (3.34) дає наступний вираз:

$$C = \frac{D}{c^2}. \quad (3.36)$$

З умови рівності осьових переміщень (3.33), з урахуванням (3.35) та (3.36), отримують:

$$B = D \frac{b^2(a^2 + c^2)}{c^2(a^2 + b^2)} - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{\sigma_0}{G_{12}^*}. \quad (3.36)$$

Тоді, перша з рівностей (3.33) дає наступний вираз для D :

$$D = \frac{2\sigma_0 a^2 b^2 c^2}{G_{12}^\circ (a^2 - c^2)(a^2 + b^2) - G_{12}^* (a^2 + c^2)(a^2 - b^2)}. \quad (3.37)$$

Тепер, після перетворень з урахуванням (2.1), отримують вирази для всіх невідомих сталих:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1+f+g} \left(k(f+2g) + \frac{\sigma_0}{G_{12}^*} \right), \\ B &= \frac{b^2}{1+f+g} \left(k(f+2g) - \frac{\sigma_0}{G_{12}^*} (f+g) \right), \\ C &= k, \\ D &= c^2 k, \end{aligned} \quad (3.38)$$

з урахуванням співвідношення

$$k = \frac{2\sigma_0(f+g)}{G_{12}^\circ f(1+f+g) + G_{12}^* (f+2g)(1-f-g)}. \quad (3.39)$$

Вирази (3.31), що описують напружено-деформований стан трансропної матриці, враховуючи (3.38), приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} u_z^*(r, \theta) &= \frac{r \cos \theta}{1+f+g} \left(\frac{k}{r^2} (f+2g)(r^2 + b^2) + l_1 \right), \\ \sigma_{z\theta}^*(r, \theta) &= -\frac{G_{12}^* \sin \theta}{1+f+g} \left(\frac{k}{r^2} (f+2g)(r^2 + b^2) + l_1 \right), \\ \sigma_{zr}^*(r, \theta) &= \frac{G_{12}^* \cos \theta}{1+f+g} \left(\frac{k}{r^2} (f+2g)(r^2 - b^2) + l_2 \right), \\ \gamma_{\theta z}^*(r, \theta) &= -\frac{\sin \theta}{1+f+g} \left(\frac{k}{r^2} (f+2g)(r^2 + b^2) + l_1 \right), \\ \gamma_{zr}^*(r, \theta) &= \frac{\cos \theta}{1+f+g} \left(\frac{k}{r^2} (f+2g)(r^2 - b^2) + l_2 \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

з урахуванням співвідношень

$$l_1 = \sigma_0 \frac{r^2 - (f + g)b^2}{r^2 G_{12}^*}, \quad l_2 = \sigma_0 \frac{r^2 + (f + g)b^2}{r^2 G_{12}^*}. \quad (3.41)$$

Підставляючи (3.38) в (3.32), отримують співвідношення, що описують напружено-деформований стан транстропного порожнистого волокна:

$$\begin{aligned} u_z^\circ(r, \theta) &= k \left(r + \frac{c^2}{r} \right) \cos\theta, \\ \sigma_{z\theta}^\circ(r, \theta) &= -k G_{12}^\circ \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right) \sin\theta, \quad \sigma_{zr}^\circ(r, \theta) = k G_{12}^\circ \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right) \cos\theta, \\ \gamma_{\theta z}^\circ(r, \theta) &= -k \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right) \sin\theta, \quad \gamma_{zr}^\circ(r, \theta) = k \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right) \cos\theta. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Змоделюємо тепер чистий поздовжній зсув транстропного однорідного композиційного матеріалу радіусу b .

Врахуємо скінченність переміщень при $r = 0$ (в співвідношенні (3.28) $C_2 = 0$). Тоді основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан матеріалу (3.28)–(3.30), після перетворень набудуть вигляду (C_1 перепозначають на T):

$$\begin{aligned} u_z(r, \theta) &= Tr \cos\theta, \\ \sigma_{z\theta}(r, \theta) &= -T G_{12} \sin\theta, \quad \sigma_{zr}(r, \theta) = T G_{12} \cos\theta, \\ \gamma_{\theta z}(r, \theta) &= -T \sin\theta, \quad \gamma_{zr}(r, \theta) = T \cos\theta. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Аналогічно до першої з умов (3.34) запишеться крайова умова для однорідного композиційного матеріалу:

$$\sigma_{zr}(b, \theta) = \sigma_0 \cos\theta. \quad (3.44)$$

З (3.44) знаходять сталу T :

$$T = \frac{\sigma_0}{G_{12}}. \quad (3.45)$$

Тоді, для однорідного трансропного матеріалу, що моделює поведінку композиту, отримують, відповідно:

$$\begin{aligned} u_z(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos \theta, \\ \sigma_{z\theta}(r, \theta) &= -\sigma_0 \sin \theta, \sigma_{zr}(r, \theta) = \sigma_0 \cos \theta, \\ \gamma_{\theta z}(r, \theta) &= -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin \theta, \gamma_{zr}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.46)$$

З умови узгодження про рівність осьових переміщень на зовнішній межі $u_z(b, \theta) = u_z^*(b, \theta)$, отримують аналітичний вираз поздовжнього модуля зсуву композиту з трансропними матрицею та порожнистим волокном:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^* \left(G_{12}^\circ f (1 + f + g)^2 + G_{12}^* (f + 2g) (1 - (f + g)^2) \right)}{G_{12}^* (f + 2g) (1 + f + g)^2 + G_{12}^\circ f (1 - (f + g)^2)}. \quad (3.47)$$

3.3 Висновки до третього розділу

У розділі на основі кінематичного критерію узгодження отримано формули для ефективного поздовжнього модуля пружності E_1 , ефективного коефіцієнта Пуассона ν_{12} , поздовжнього модуля зсуву G_{12} для композиту з трансропними компонентами. Вони відображають залежність цих сталих від пружних характеристик трансропних матриці, волокна та об'ємних часток матеріалу волокна та порожнини у матеріалі композита.

Аналітичні вирази ефективних сталих E_1 , ν_{12} , G_{12} для композитів з порожнистими волокнами для частинних випадків анізотропії компонентів композиційного матеріалу наведено у Додатку Б.

РОЗДІЛ 4. РОЗРАХУНОК ЕФЕКТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА ВІДОМИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СКЛАДОВИХ

4.1 Визначення механічних характеристик односпрямованих композиційних матеріалів з ізотропними складовими

Скористаємося отриманими у розділах 2 та 3 аналітичними залежностями для визначення ефективних механічних характеристик односпрямованих композиційних матеріалів, а також дослідимо вплив об'ємної частки порожнини у волокні на величини цих ефективних характеристик.

Спочатку порівняємо значення поздовжнього модуля пружності E_1 , коефіцієнта Пуассона ν_{12} та поздовжнього модуля зсуву G_{12} отримані за формулами (3.20), (3.23), (3.47) та за відповідними формулами Г. А. Ваніна (1.1), (1.7) та Д. М. Карпіноса (1.9), (1.10), (1.13), варіюючи об'ємним вмістом волокна та порожнини.

Розрахунок проведемо для композита з ізотропними складовими – епоксидною матрицею ЕДТ-10 та волокном з алюмоборосилікатного скла, пружні характеристики яких дорівнюють: $E^\circ = 7,31 \cdot 10^4$ МПа, $\nu^\circ = 0,25$, $E^* = 2900$ МПа, $\nu^* = 0,35$ [25].

Результати обчислень зведені в таблицях 4.1 та 4.2, вважаючи, що об'ємний вміст порожнистого волокна $f + g = 0,4$.

Слід відзначити, що результати обчислень E_1 та ν_{12} , отримані різними методами, практично співпадають. Зокрема, максимальна відносна похибка обчислення E_1 запропонованим методом у порівнянні з формулою (1.1), складає 0,05 %, у порівнянні з формулою (1.9), складає 0,2 %. Максимальна відносна похибка обчислення коефіцієнта Пуассона ν_{12} у порівнянні з формулою (1.10), дорівнює 0,03 %.

Таблиця 4.1

Значення поздовжнього модуля пружності E_1 та коефіцієнта Пуассона ν_{12} , обчислені за формулами (3.20), (3.23) та (1.1), (1.9), (1.10)

Об'ємна частка		E_1 , МПа			ν_{12}	
g	f	(3.20)	(1.1)	(1.9)	(3.23)	(1.10)
0	0,4	30989,12	30989,12	30980,00	0,3040	0,3040
0,05	0,35	27334,08	27334,08	27325,00	0,3042	0,3042
0,1	0,3	23679,94	23679,03	23670,00	0,3045	0,3045
0,15	0,25	20025,00	20023,96	20015,00	0,3048	0,3048
0,2	0,2	16368,86	16368,86	16360,00	0,3053	0,3053
0,25	0,15	12715,18	12713,69	12705,00	0,3062	0,3062
0,3	0,1	9060,26	9058,38	9050,00	0,3078	0,3077
0,35	0,05	5405,01	5402,57	5395,00	0,3119	0,3118

Залежність поздовжнього модуля пружності E_1 від об'ємної частки порожнини має яскраво виражений спадний характер, що узгоджується з фізичним змістом цих показників. Значення коефіцієнта Пуассона ν_{12} зростають зі збільшенням об'ємної частки порожнини.

Таблиця 4.2

Значення поздовжнього модуля зсуву G_{12} , обчислені за формулою (3.47) та за формулами (1.7), (1.13)

Об'ємна частка		G_{12} , МПа		
g	f	(3.47)	(1.7)	(1.13)
0	0,4	2344,664641	2344,664641	2344,664642
0,05	0,35	2303,099845	2303,099844	2303,099846
0,1	0,3	2250,450994	2250,450993	2250,450996
0,15	0,25	2181,602313	2181,602314	2181,602314
0,2	0,2	2087,717412	2087,717412	2087,717412
0,25	0,15	1952,105204	1952,105204	1952,105204
0,3	0,1	1738,998667	1738,998667	1738,998667
0,35	0,05	1355,401864	1355,401864	1355,401863

Слід відзначити, що результати обчислень G_{12} , отримані різними методами, також практично повністю співпадають.

Залежність поздовжнього модуля зсуву G_{12} від об'ємної частки порожнини (при збільшенні g) має яскраво виражений спадний характер, що узгоджується з фізичним змістом цього показника.

Проведемо тепер розрахунок ефективних пружних сталих для односпрямованого композиційного матеріалу з ізотропними компонентами. Побудуємо відповідні графіки для візуалізації залежності цих характеристик від об'ємного вмісту порожнистого волокна.

Розглянемо односпрямований композит UD GFRP на основі поліефірної смоли (Polimal 109), армований скловолокнами (Е-скло). Пружні характеристики складових [91]: для волокна маємо $E^\circ = 73$ ГПа, $\nu^\circ = 0,22$, $G^\circ = 29,9$ ГПа; для матриці – $E^* = 3,24$ ГПа, $\nu^* = 0,385$.

На рисунках 4.1–4.7 представлено залежності ефективних пружних сталих від $f + g$ у діапазоні 0,25...0,55 при фіксованих значеннях об'ємної частки g у матеріалі композиту.

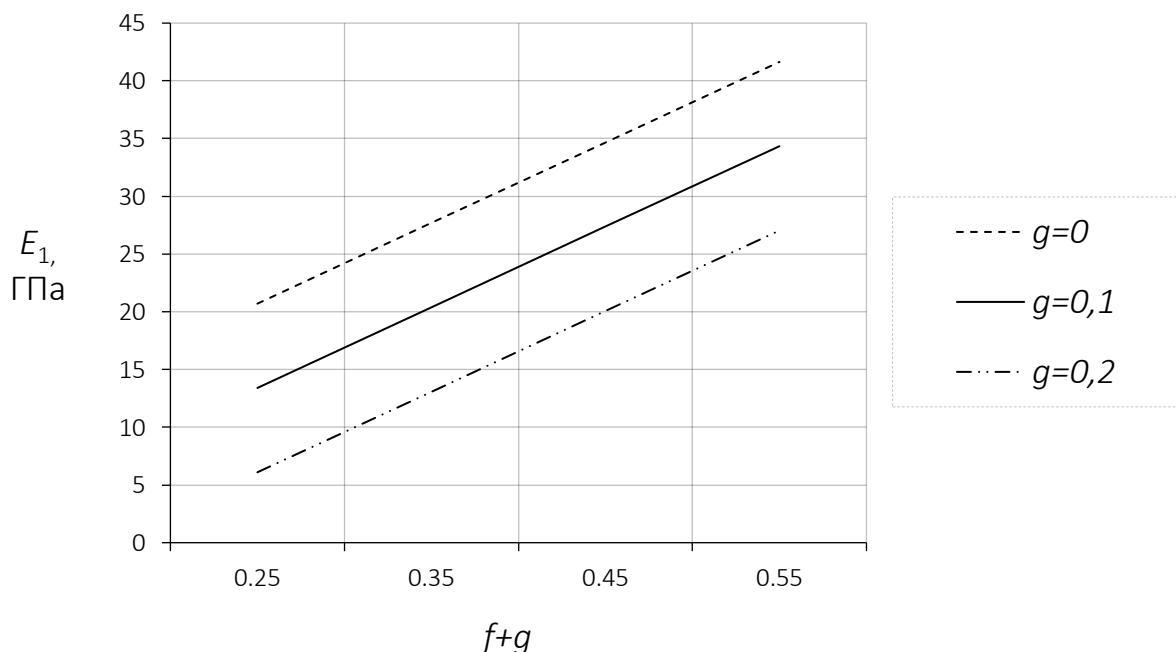


Рис. 4.1. Залежність поздовжнього модуля пружності E_1 (формула (3.20)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

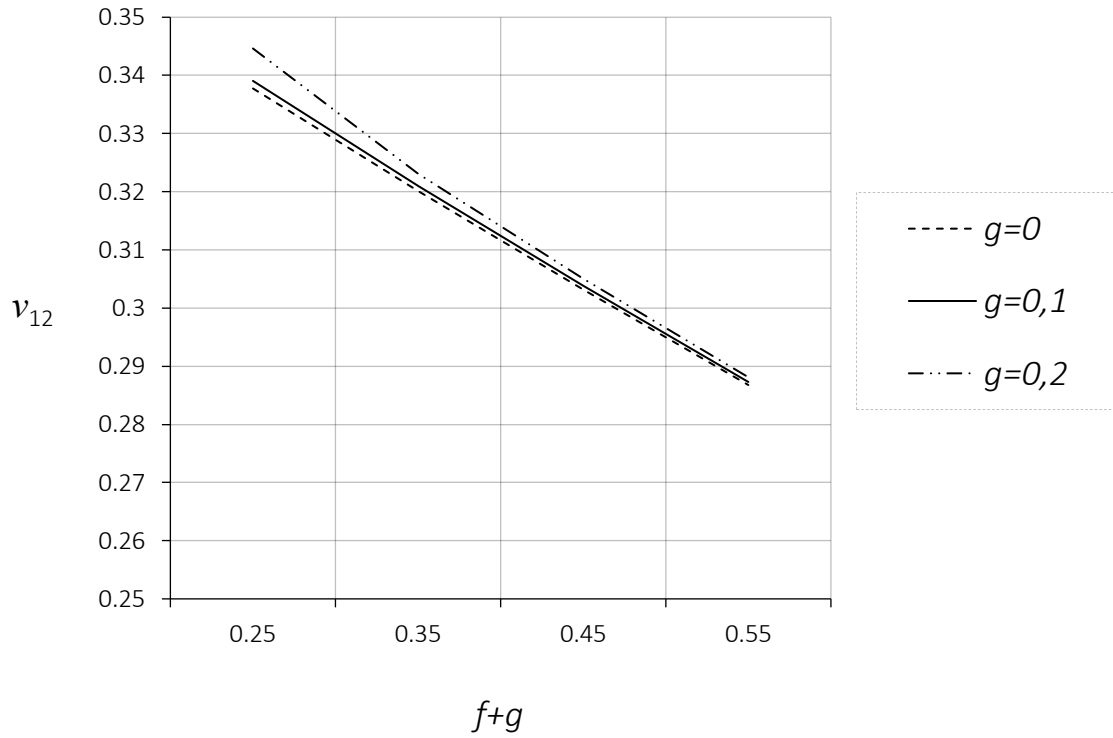


Рис. 4.2. Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{12} (формула (3.23)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

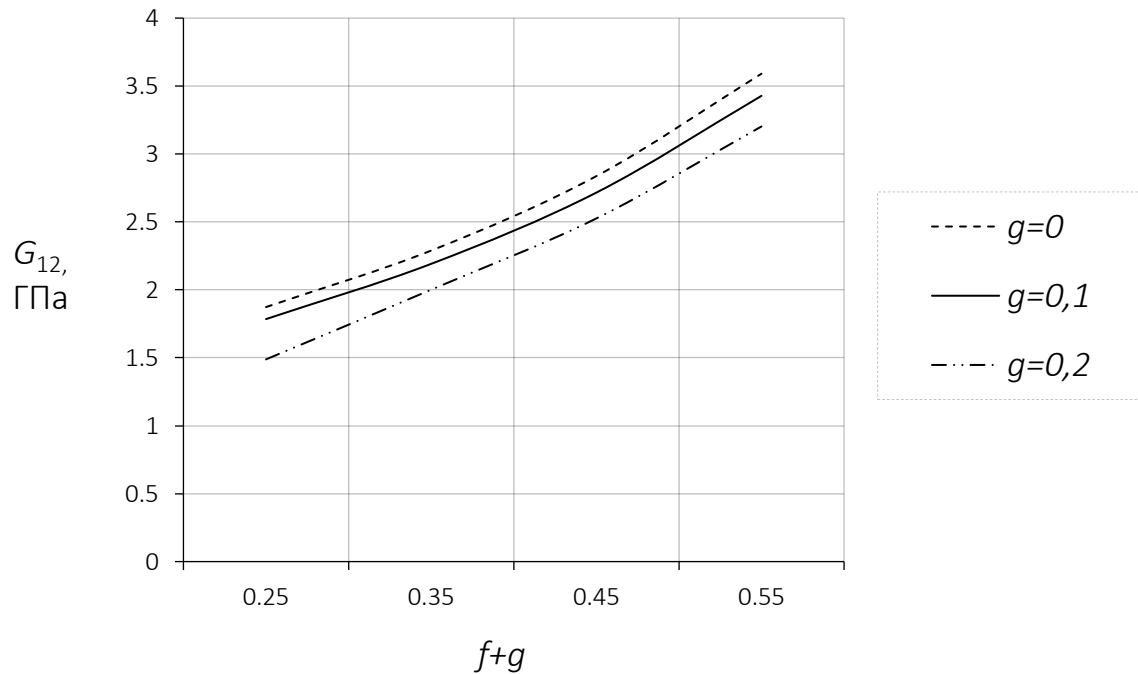


Рис. 4.3. Залежність поздовжнього модуля зсуву G_{12} (формула (3.47)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

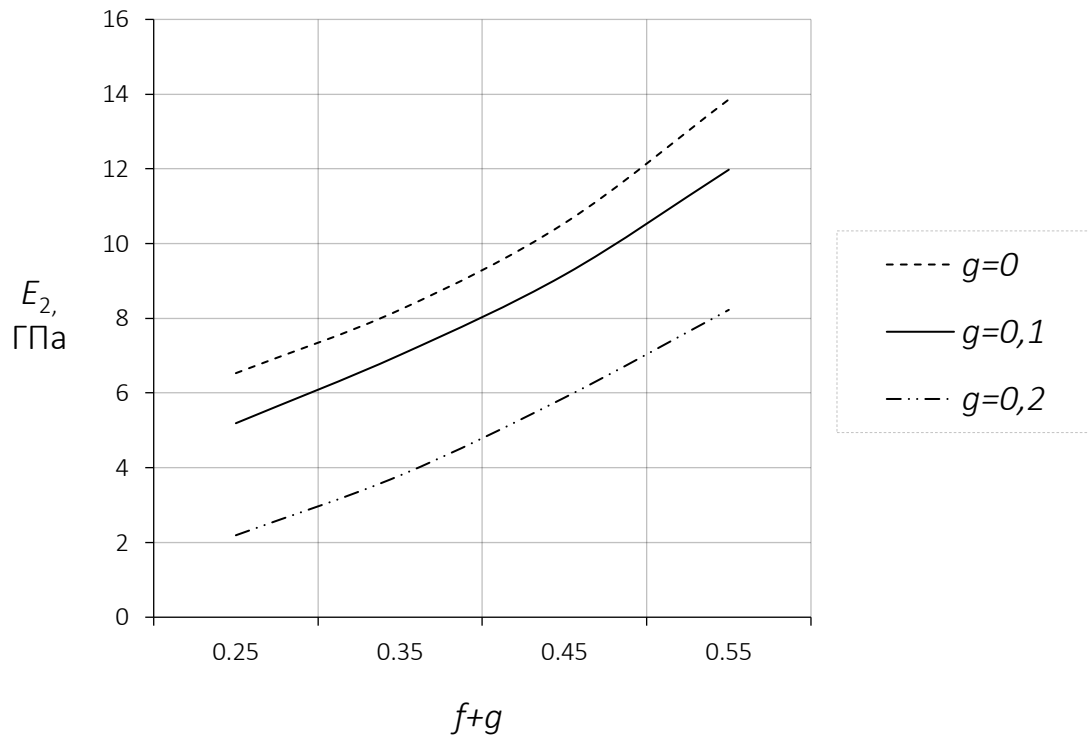


Рис. 4.4. Залежність поперечного модуля пружності E_2 (формула (2.90)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

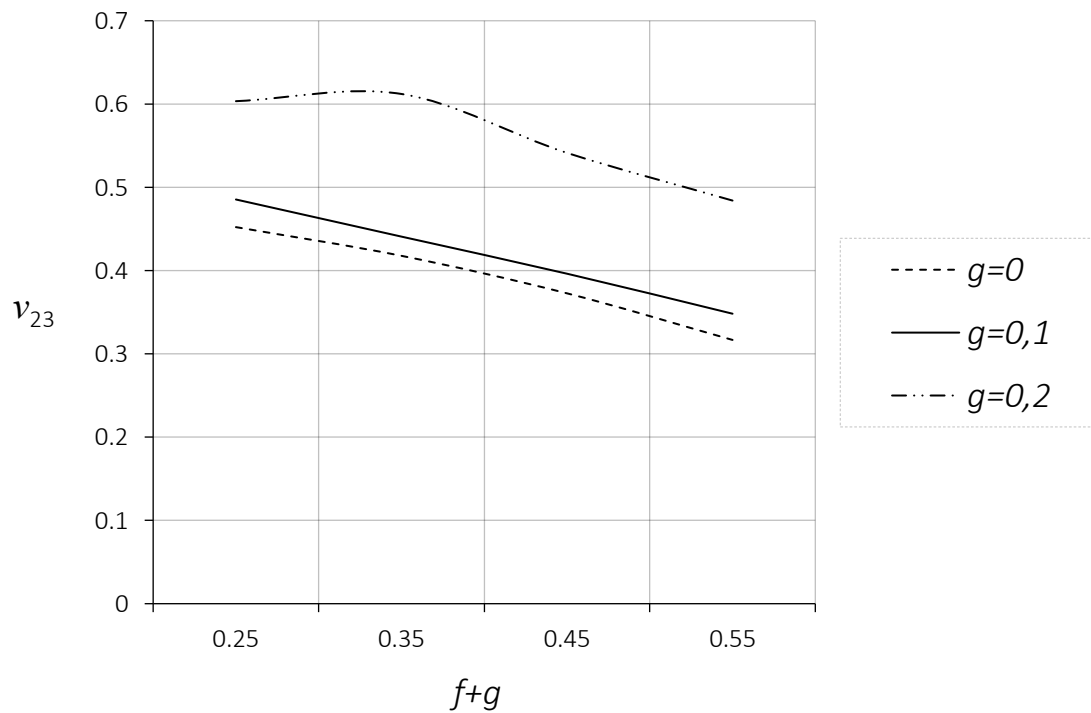


Рис. 4.5. Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} (формула (2.93)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

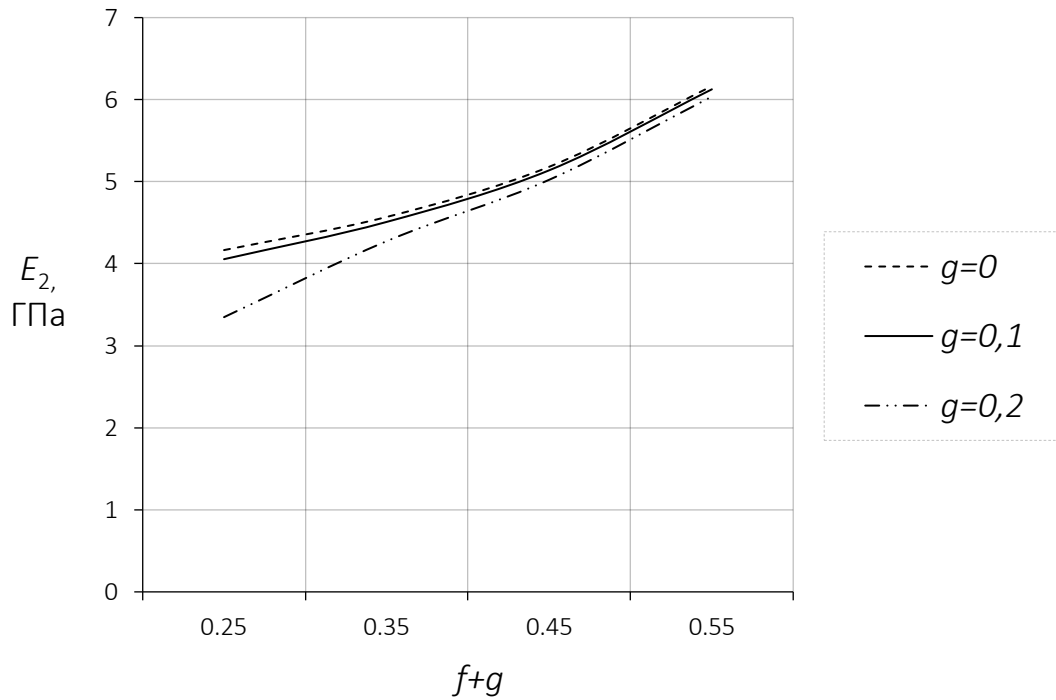


Рис. 4.6. Залежність поперечного модуля пружності E_2 (формула (2.91)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

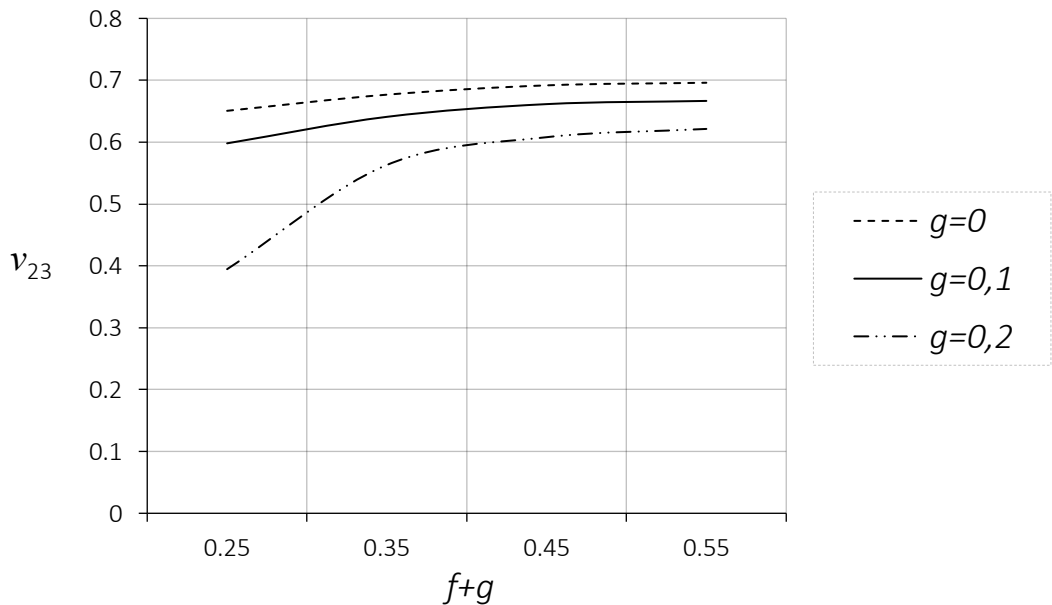


Рис. 4.7. Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} (формула (2.94)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

Ефективні пружні сталі скламагнієвого композиту, для якого пружні сталі компонентів дорівнюють $E^\circ = 72,395$ ГПа, $\nu^\circ = 0,2$; $E^* = 51,712$ ГПа, $\nu^* = 0,3$ [64], представлені на рисунках 4.8–4.14.

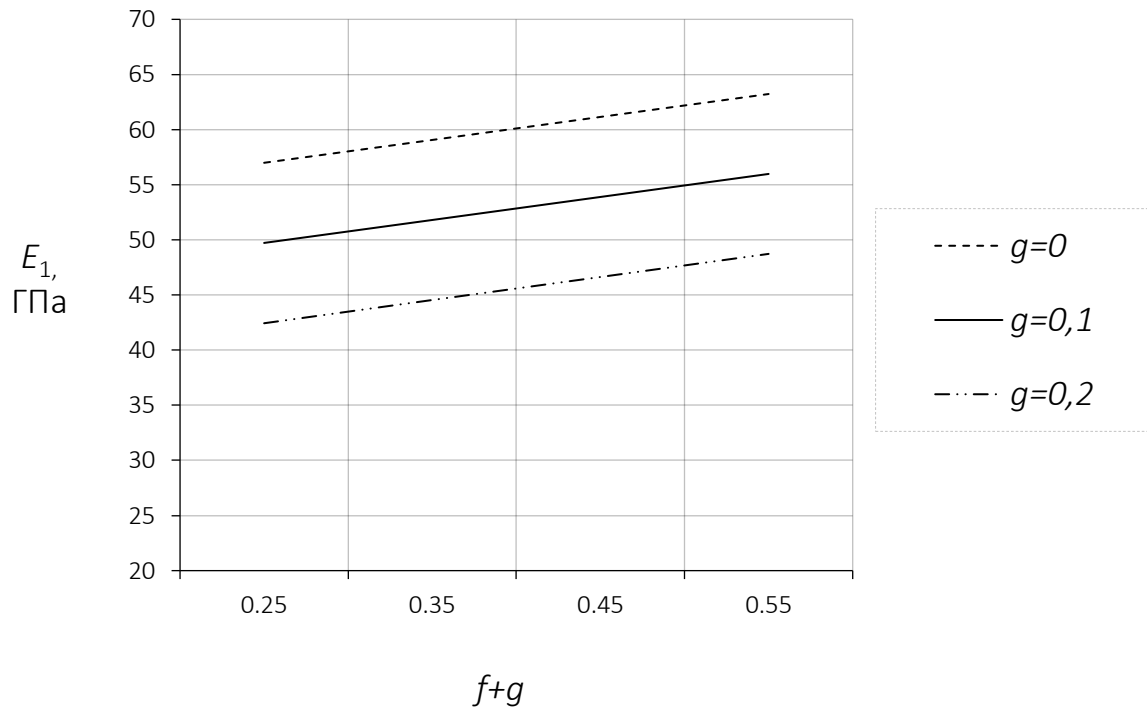


Рис. 4.8. Залежність поздовжнього модуля пружності E_1 (формула (3.20)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

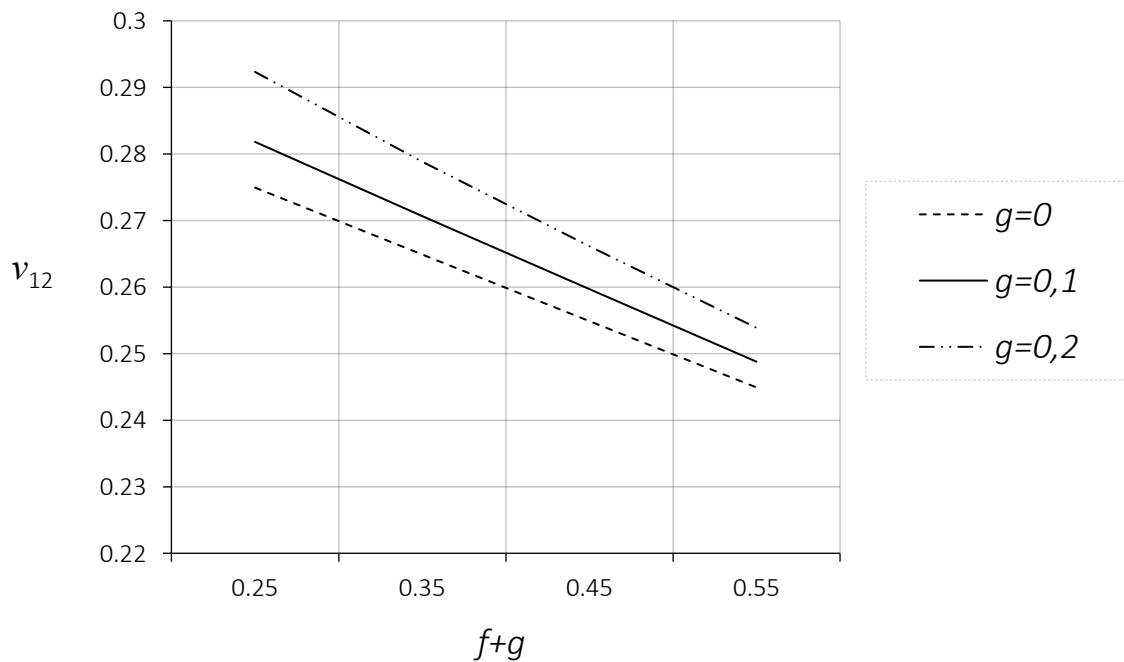


Рис. 4.9. Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{12} (формула (3.23)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

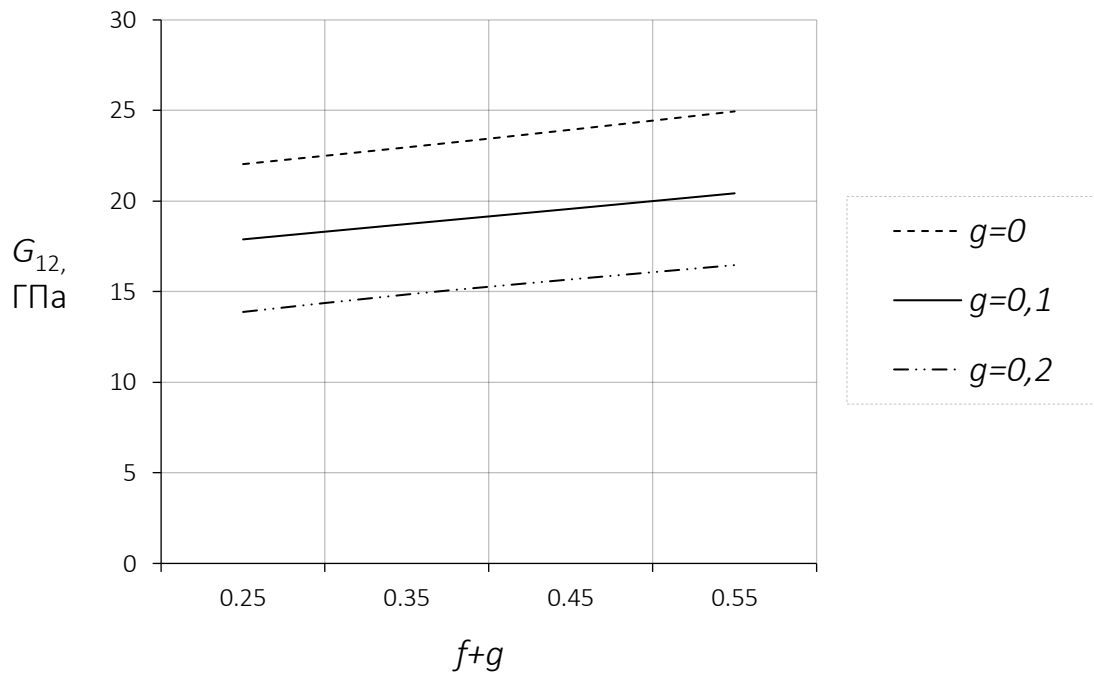


Рис. 4.10. Залежність поздовжнього модуля зсуву G_{12} (формула (3.47)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

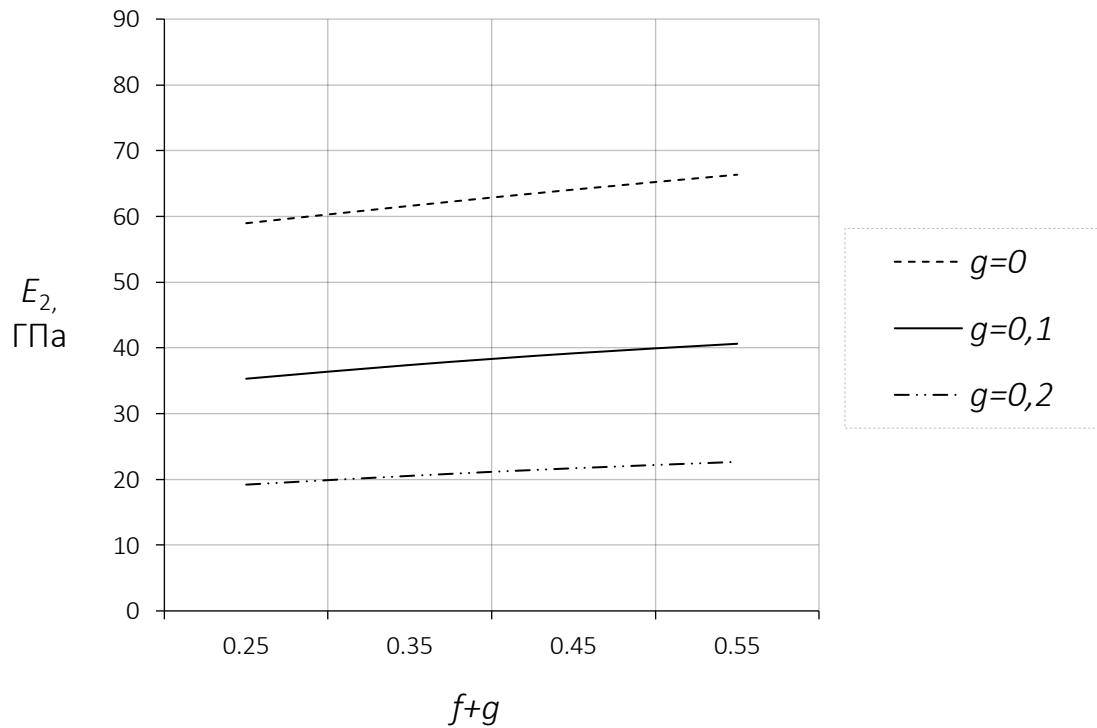


Рис. 4.11. Залежність поперечного модуля пружності E_2 (формула (2.90)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

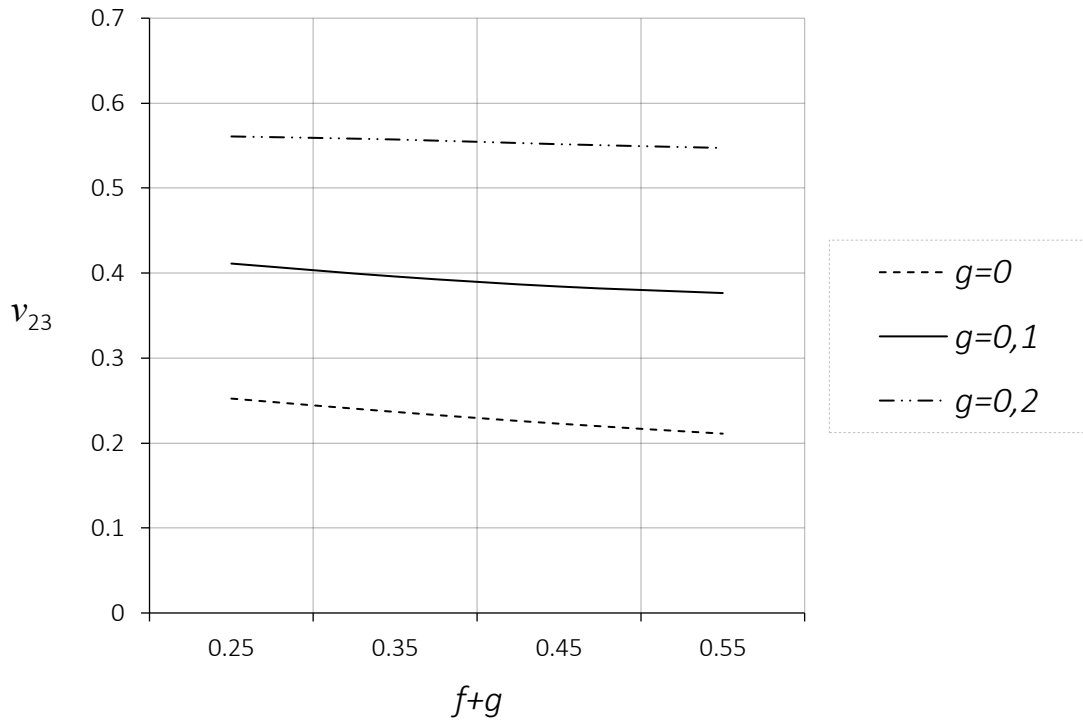


Рис. 4.12. Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} (формула (2.93)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

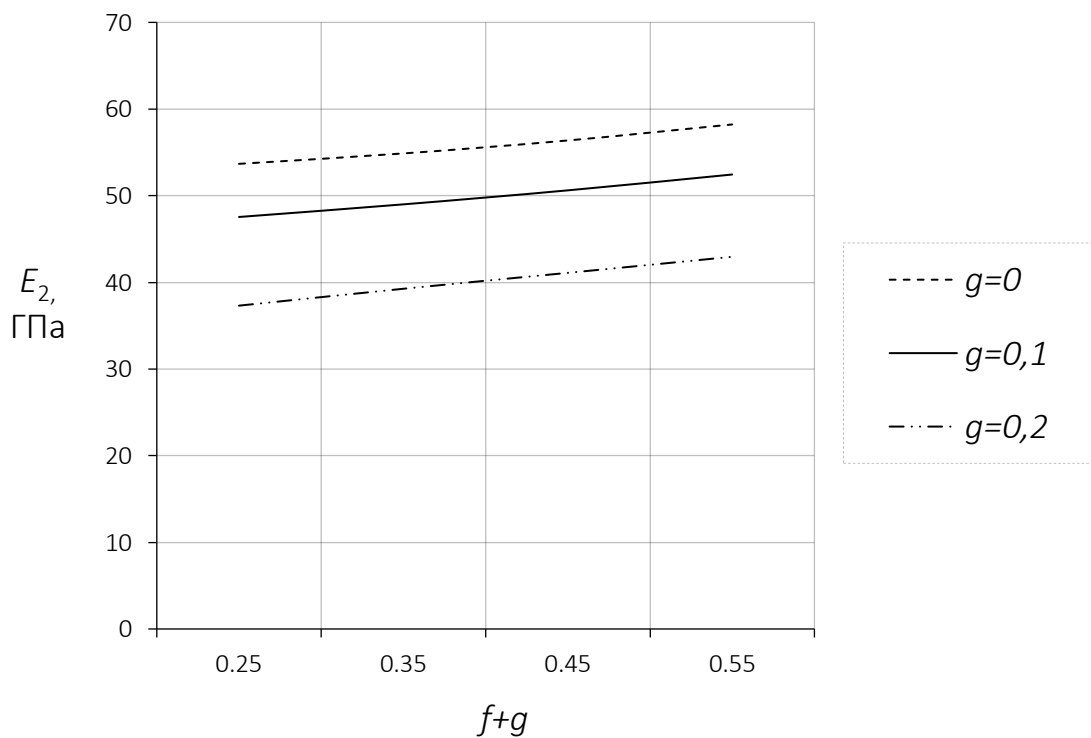


Рис. 4.13. Залежність поперечного модуля пружності E_2 (формула (2.91)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

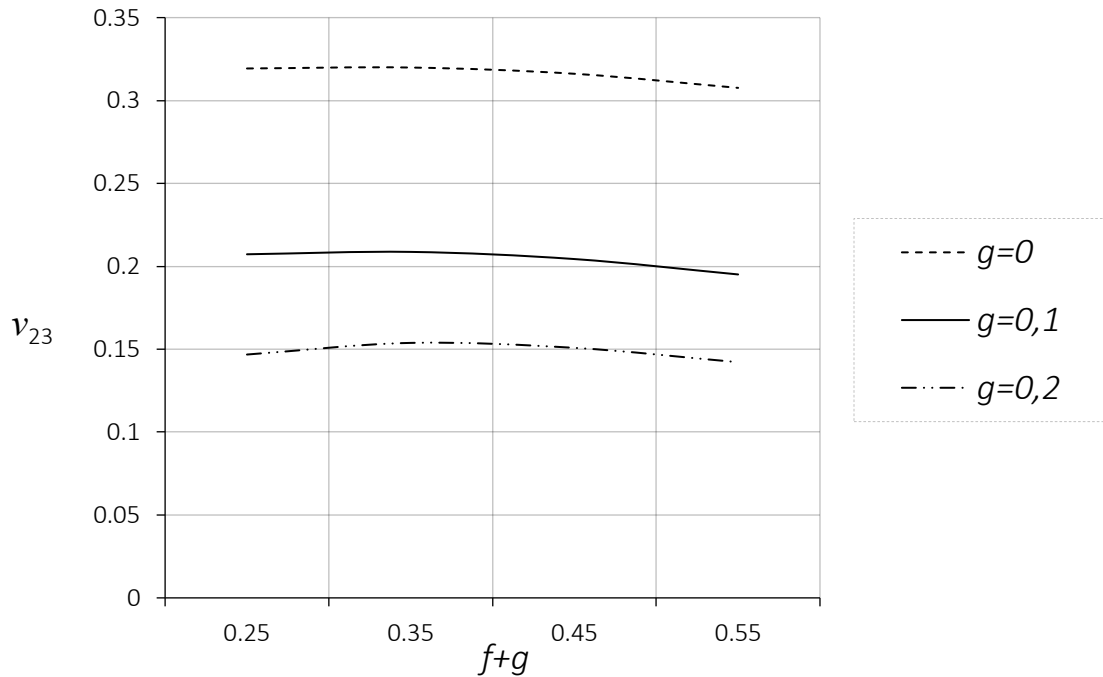


Рис. 4.14. Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} (формула (2.94)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

На основі аналізу отриманих графіків можна стверджувати, що поздовжній модуль пружності E_1 для обох розглянутих композитів має близьку до лінійної залежність від об'ємної частки волокна та порожнини $f + g$ (рис. 4.1, 4.8), причому зі збільшенням об'ємної частки порожнини g у матеріалі композиту, поздовжній модуль пружності E_1 зменшується. Коефіцієнт Пуассона ν_{12} зі збільшенням g збільшується (рис. 4.2, 4.9).

Збільшення об'ємної частки порожнистого волокна $f + g$ приводить до збільшення поздовжнього модуля зсуву G_{12} для розглянутих композитів з ізотропними компонентами (рис. 4.3, 4.10).

Залежності поперечного модуля пружності E_2 та коефіцієнта Пуассона ν_{23} від об'ємної частки порожнистого волокна у діапазоні $f + g = 0,25 \dots 0,55$, розраховані за формулами на основі рівності радіальних переміщень, представлені на рисунках 4.4, 4.5 для композиту UD GFRP, на рисунках 4.11 та 4.12 для скломагнієвого композиту відповідно. Розраховані за формулами на основі рівності окружних переміщень, поперечний модуль пружності E_2 та

коефіцієнт Пуассона ν_{23} представлені графічно на рисунках 4.6, 4.7 та 4.13, 4.14 відповідно для композиту UD GFRP та скломагнієвого композиту. Як можна зауважити, ці залежності мають нелінійний характер, хоча для поперечного модуля пружності, як і для поздовжнього, збільшення об'ємної частки більш жорсткого волокна приводить до його зростання, про коефіцієнт Пуассона ν_{23} такого сказати неможна.

4.2 Визначення механічних характеристик односпрямованих композиційних матеріалів з трансстропними складовими

Розглянемо композит UD FRC з епоксидною матрицею 914, армований вуглецевими волокнами T300 за гексагональною схемою. Пружні характеристики, відповідно [115]: $E_1^\circ = 230$ ГПа, $E_2^\circ = 40$ ГПа, $\nu_{12}^\circ = 0,25$, $\nu_{23}^\circ = 0,3$, $G_{12}^\circ = 30$ ГПа, $G_{23}^\circ = 15,4$ ГПа; $E^* = 4$ ГПа, $\nu^* = 0,39$. На рисунках 4.15–4.21 представлено залежності ефективних пружних сталих, розрахованих за тих же умов, що і в п. 4.1: $f + g = 0,25 \dots 0,55$ при $g = 0; 0,1; 0,2$.

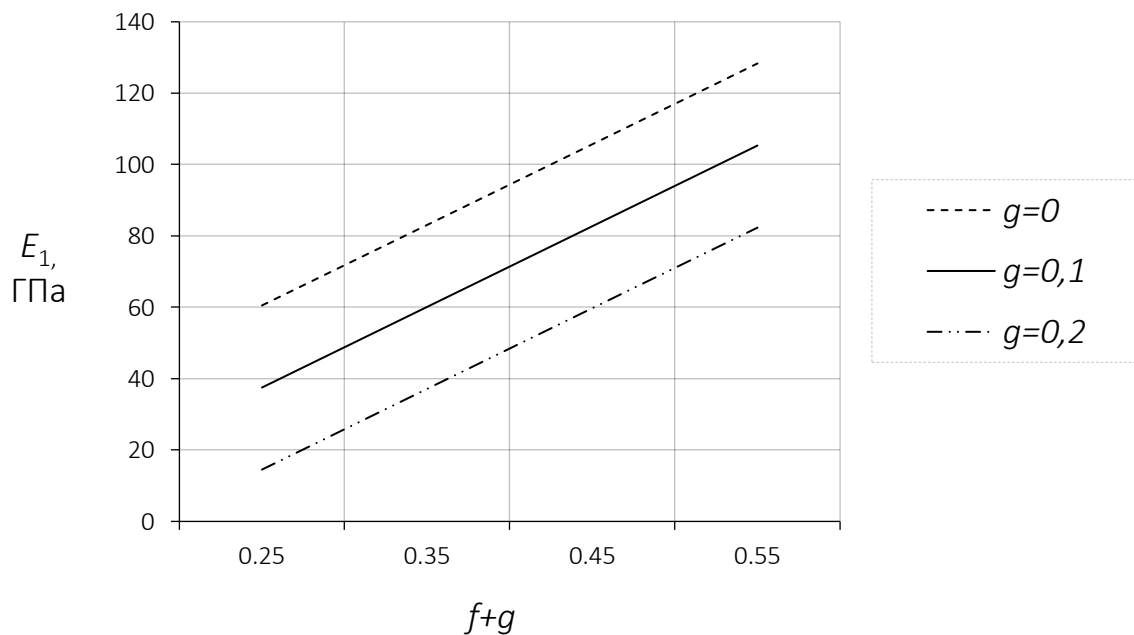


Рис. 4.15. Залежність поздовжнього модуля пружності E_1 (формула (3.20)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

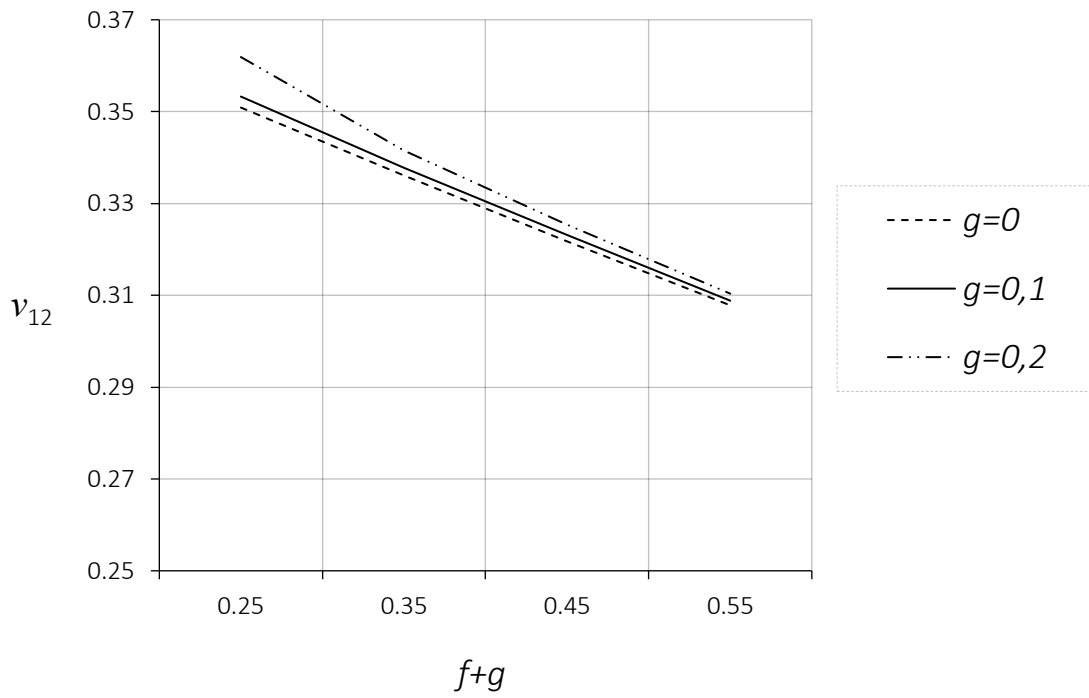


Рис. 4.16. Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{12} (формула (3.23)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

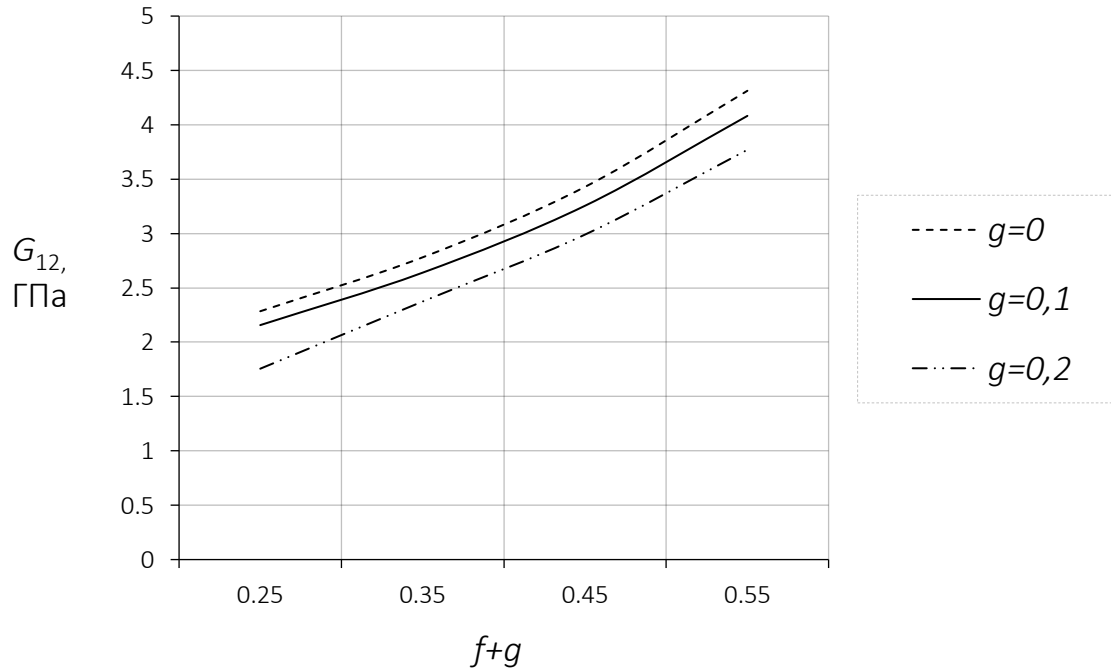


Рис. 4.17. Залежність поздовжнього модуля зсуву G_{12} (формула (3.47)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

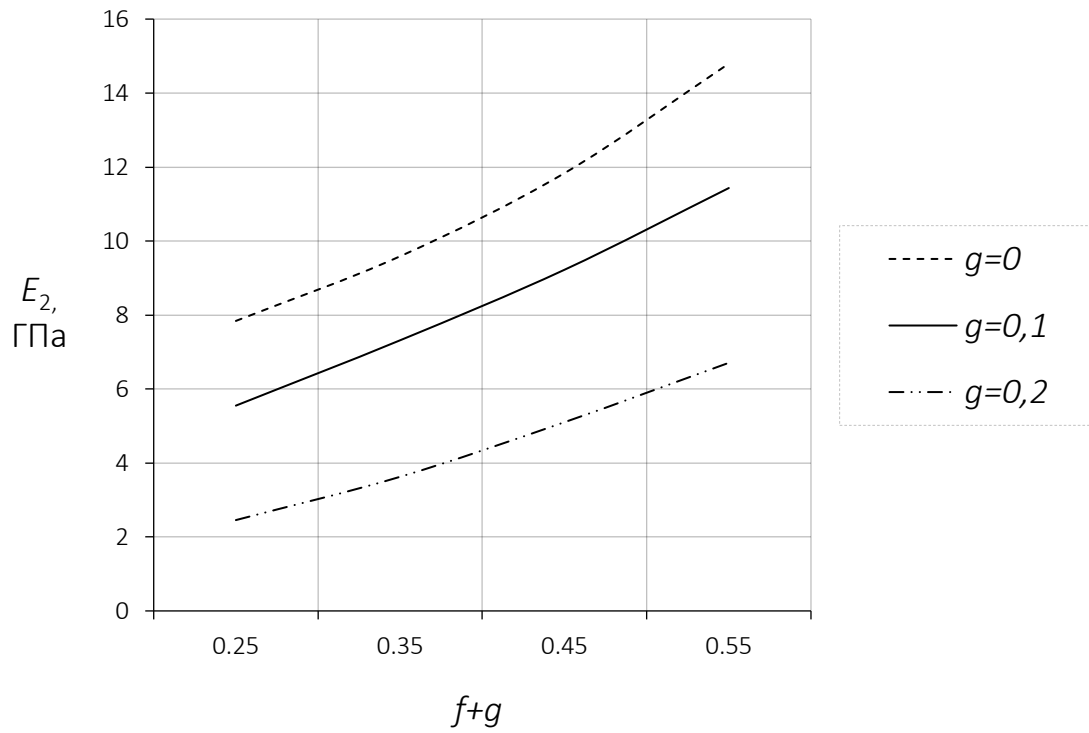


Рис. 4.18. Залежність поперечного модуля пружності E_2 (формула (2.90)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

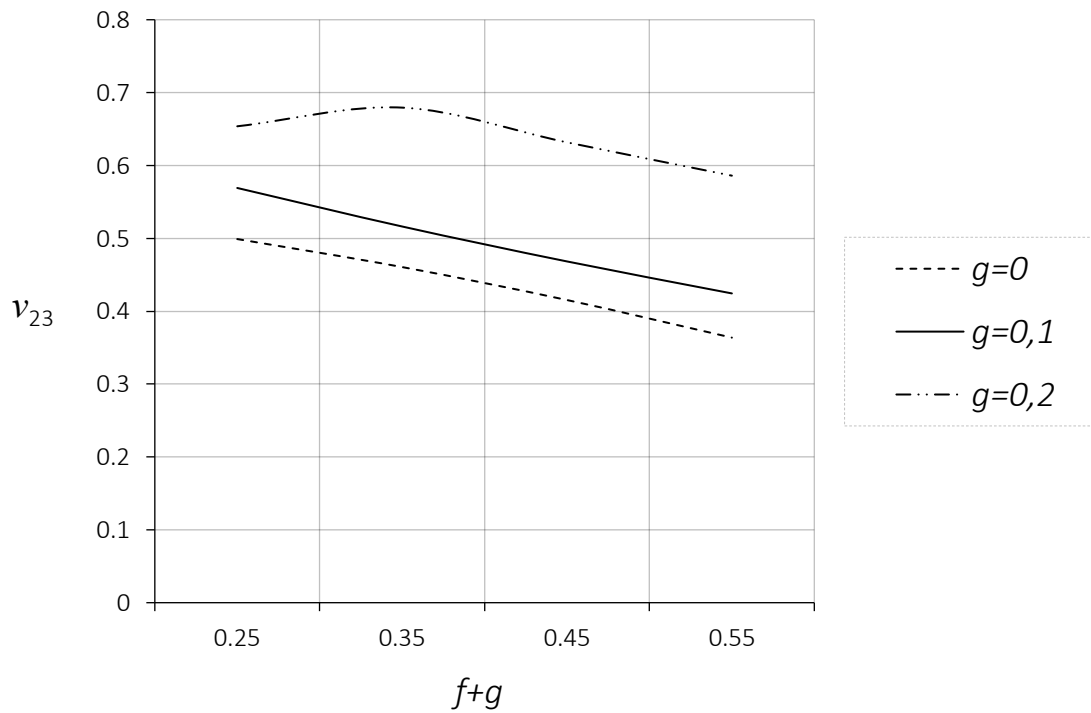


Рис. 4.19. Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} (формула (2.93)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

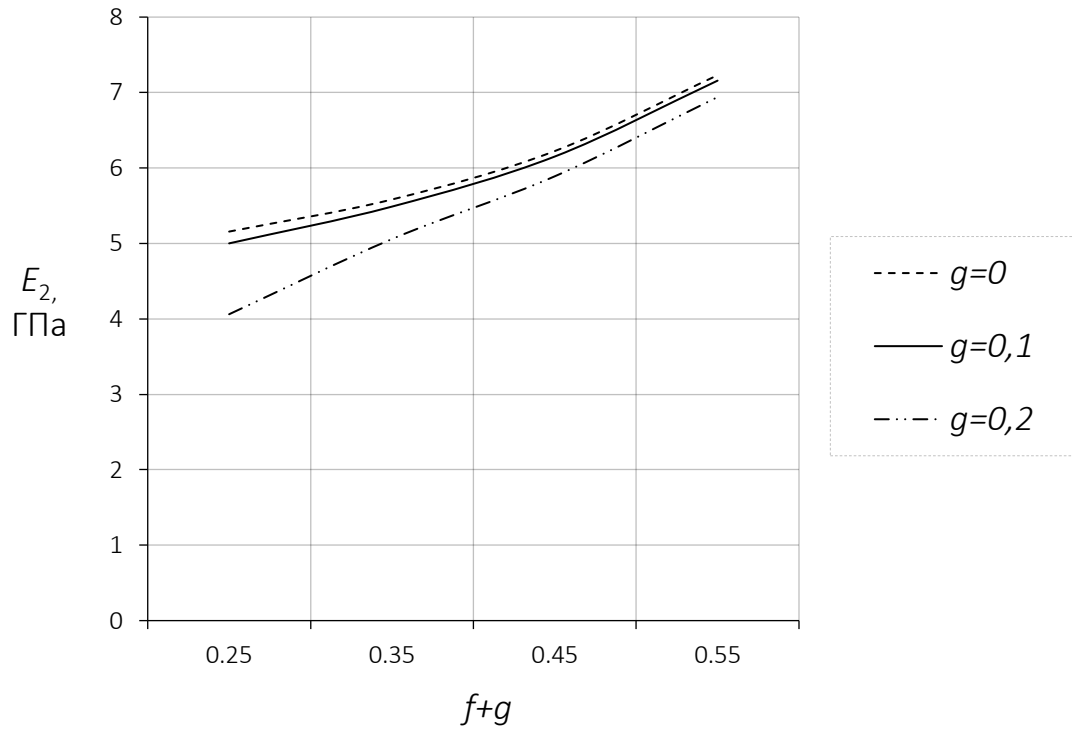


Рис. 4.20. Залежність поперечного модуля пружності E_2 (формула (2.91)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

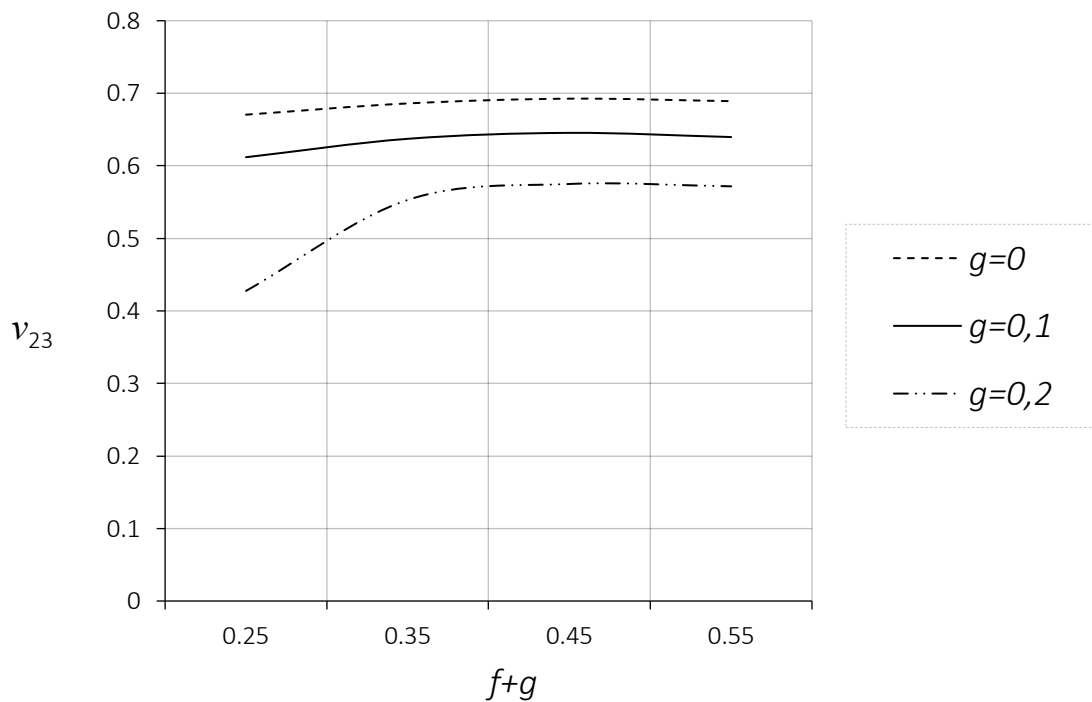


Рис. 4.21. Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} (формула (2.94)) від $f + g$ при фіксованих значеннях g

Графічно представлені залежності поздовжнього модуля зсуву E_1 (рис. 4.15), коефіцієнта Пуассона ν_{12} (рис. 4.16), поздовжнього модуля зсуву G_{12} (рис. 4.17), поперечного модуля пружності E_2 та коефіцієнта Пуассона ν_{23} , розрахованих за формулами на основі рівності радіальних переміщень (рис. 4.18, 4.19) та на основі рівності окружних переміщень (рис. 4.20, 4.21) від об'ємного вмісту порожнистого волокна в діапазоні $f + g = 0,25 \dots 0,55$. Слід відзначити, що графіки для композиту UD FRC з ізотропною матрицею та трансстропним волокном повторюють характер графіків для композиту UD GFRP з ізотропними складовими. Можна зазначити, що величини ефективних модулів пружності та модулів зсуву із збільшенням об'ємної долі порожнини у композиті зменшуються, а величини ефективних коефіцієнтів Пуассона навпаки – збільшуються. Із збільшенням об'ємної долі більш жорсткого волокна у композиті величини ефективних модулів пружності та модулів зсуву зростають, причому для E_1 та G_{12} ці залежності близькі до лінійних, а для E_2 спостерігається певне відхилення від лінійних залежностей. Величина E_2 , обчислена на основі умови рівності радіальних переміщень, в середньому на 8-12 % більша за величину E_2 , обчислену на основі умови рівності окружних переміщень.

4.3 Висновки до четвертого розділу

За отриманими в другому та третьому розділах аналітичними співвідношеннями проведено числові розрахунки ефективних пружних сталих E_1 , ν_{12} , G_{12} , E_2 , ν_{23} для односпрямованих двохфазових волокнистих композиційних матеріалів. Графічно представлено числові результати для композитів як з ізотропними складовими, так і у випадку ізотропної матриці та трансверсальної ізотропії волокна. Вони показують значну залежність ефективних характеристик від об'ємного вмісту матеріалу волокна та порожнини в матеріалі композиту.

На прикладі композиту з ізотропними компонентами проведено порівняння значень ефективних пружних характеристик, розрахованих за запропонованою методикою, з результатами, отриманими за раніше відомими співвідношеннями. Максимальна відносна похибка обчислення модуля пружності та коефіцієнта Пуассона за запропонованими співвідношеннями у порівнянні з відомими формулами не перевищує 0,2 %.

ВИСНОВКИ

Основним результатом роботи є вирішення важливої науково-технічної проблеми – отримання аналітичних співвідношень для розрахунку ефективних пружних характеристик односпрямованих композитів з трансропними матрицею та порожнистим волокном. Ці формули виражають залежність пружних характеристик від аналогічних показників його складових, а також об'ємної частки матеріалу волокна та порожнини у композиту. Зокрема, отримані наступні нові результати:

1. Розвинено метод представницького об'ємного елемента для гомогенізації односпрямованого композиційного матеріалу з трансропними матрицею та порожнистим волокном при поперечному та поздовжньому розтягу і зсуві, що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження переміщень композиту та його складових;
2. Для представницького об'ємного елемента визначено основні компоненти напружено-деформованого стану складових композиту та однорідного гомогенізованого матеріалу при поперечних та поздовжніх деформаціях;
3. Вперше отримано аналітичні співвідношення для визначення ефективних поперечних характеристик композиційного матеріалу з трансропними матрицею та порожнистим волокном: для модуля пружності E_2 , та коефіцієнта Пуассона ν_{23} ;
4. Вперше отримано аналітичні співвідношення для визначення ефективних поздовжніх характеристик композиційного матеріалу з трансропними матрицею та порожнистим волокном: для модуля пружності E_1 , коефіцієнта Пуассона ν_{12} , модуля зсуву G_{12} ;
5. З використанням отриманих співвідношень для ефективних характеристик проведено числові розрахунки та побудовано залежності

ефективних пружних сталих композитів з порожнистими волокнами від об'ємного вмісту матеріалу волокна та порожнини у композиційному матеріалі.

Залежність отриманих аналітичних формул від характеристик порожнистого волокна дозволяє оцінити вплив наявності порожнини на значення ефективних сталей, що дає можливість проектувати раціональні композиційні матеріали з точки зору міцності, стійкості, зменшення маси та витрат на виготовлення таких матеріалів. Таке проектування спрямоване на збільшення значення модулів пружності, підвищення опору до деформацій без збільшення абсолютної маси відповідного конструктивного матеріалу.

Використання запропонованих аналітичних залежностей для визначення ефективних характеристик композитів є доцільним з точки зору економії часу у порівнянні з використанням чисельних та експериментальних методів.

Крім того, врахування транстропних властивостей компонентів дозволяє уточнити ефективні пружні сталі композита, що у деяких випадках є досить суттєвим. Для окремих типів волокон поздовжні характеристики матеріалу відрізняються від поперечних на один-два порядки.

На відміну від експериментальних та чисельних досліджень, отримані аналітичні співвідношення дозволяють провести їх якісний аналіз та отримати оптимальні значення параметрів (об'ємного вмісту волокна, типу складових, розмірів порожнини).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акимов Д. В., Грищак В. З., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И. Сравнительный анализ методик расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкции ракетносителя. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2016. № 2. С. 116–120.
2. Ашихмин В. А., Мерзлякова Н. А., Шапаев И. В. Влияние межфазного слоя на упругие характеристики волокнистого материала с гексагональной структурой. *Научно-практический электронный журнал Аллея Науки*. 2018. № 4 (20). С. 1–11.
3. Бахтина Е. В. Выбор аналитических методик для определения механических характеристик однонаправленных композиционных материалов на основе стекловолокон. *Проблемы прочности*. 2014. № 1. С. 80–88. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/PPT_2014_1_8. (дата звернення: 12.10.2020).
4. Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры: монография. Днепропетровск: «Пороги», 2008. 196 с.
5. Булат А. Ф., Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Клименко М. И. Определение эффективных характеристик волокнистого вязкоупругого композита с трансверсально-изотропными составляющими. *Проблеми міцності*. 2019. № 2. С. 15–25.
6. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов: монография. Киев: Наукова думка, 1985. 304 с.
7. Гребенюк С. Н., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.

8. Грищак В. З., Гребенюк С. Н. Упругие характеристики резинокордного материала с учетом трансверсально-изотропных свойств корда. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2013. №. 2 (47). С. 110–114.
9. Гузь А. Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. Т. 1. Разрушение в структуре материала. Киев: «Литера», 2008. 592 с.
10. Гузь А. Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. Т. 2. Родственные механизмы разрушения. Киев: «Литера», 2008. 736 с.
11. Дзюба А. П., Сафронова І. А., Левитіна Л. Д. Алгоритм розрахунку циліндричної оболонки зі змінною в окружному напрямку жорсткістю на основі дискретно-континуального підходу. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Вип. 30. С. 53–67. DOI: 10.15421/4219026.
12. Дзюба А. П., Сіренко В. М., Дзюба А. А., Сафронова І. А. Моделі та алгоритми оптимізації елементів неоднорідних оболонкових конструкцій. *Актуальні проблеми механіки: Монографія* / під ред. М. В. Полякова. Дніпро: Ліра, 2018. С. 225–244.
13. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*. 2014. № 2. С. 28–48. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/konechno-elementnoe-modelirovanie-effektivnyh-vyazkouprugih-svoystv-odnonapravlennyh-kompozitsionnyh-materialov>. (дата звернення: 12.10.2020).
14. Динамическое напряженно-деформированное состояние межступенного отсека ракеты-носителя при отделении первой ступени / Б. Ф. Зайцев и др. *Вестник двигателестроения*. 2019. № 2. С. 142–149.

15. Егоров Н. Г., Гордон С. С., Асланова М. С. Стеклопластики на основе полых волокон. *Пластические массы*. 1967. № 7. С. 61–64.
16. Ерасов В. С., Макарычева А. И. Определение модуля упругости межфазной зоны в слоистом полимерном композиционном материале. *Авиационные материалы и технологии*. 2014. № 2. С. 53–55. DOI: 10.18577/2071-9140-2014-0-2-53-55.
17. Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. Эффективные модули объемного сжатия при плоской деформации двухфазных однонаправленно армированных композитов с анизотропными полыми и сплошными волокнами. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*. 2011. № 4. С. 37–48. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/effektivnye-moduli-obemnogo-szhatiya-pri-ploskoy-deformatsii-dvuhfaznyh-odnonapravlenno-armirovannyh-kompozitov-s-anizotropnymi>. (дата звернения: 12.10.2020).
18. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Оценка теплопроводности волокнистого композита при непрерывном изменении теплопроводности промежуточного слоя между волокном и матрицей. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Машиностроение»*. 2013. № 4 (93). С. 3–15. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-temloprovodnosti-voloknistogo-kompozita-pri-nepreryvnom-izmenenii-temloprovodnosti-promezhutochnogo-sloya-mezhdu-voloknom-i>. (дата звернения: 12.10.2020).
19. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита при наличии промежуточного слоя между волокном и матрицей. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Машиностроение»*. 2014. № 1 (94). С. 58–67. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenki-effektivnogo-koeffitsienta-temloprovodnosti-kompozita-pri-nalichii-promezhutochnogo-sloya-mezhdu-voloknom-i-matritsey>. (дата звернения: 12.10.2020).

20. Инженерная механика полимеров и применение пластмасс в промышленности / отв. ред. Г. Л. Зоделова. Тбилиси: Мецниереба, 1969. 273 с.
21. Клименко М. И., Гребенюк С. Н., Богуславская А. М. Характеристики композиционного материала с трансверсально-изотропными вязкоупругими матрицей и волокном. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 94–101.
22. Клименко М. И., Гоменюк С. И., Гребенюк С. М., Кудін О. В. Визначення ефективних релаксаційних характеристик в'язкопружного трансверсально-ізотропного волокнистого композиту при поздовжньому зсуву. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. № 2 (69), частина 2. С. 75–80.
23. Клименко М. И., Гребенюк С. М., Гоменюк С. И. Эффективные механические характеристики в'язкопружных композитов: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2019. 300 с.
24. Ковальчук С. Б., Горик А. В., Павликов А. Н., Антонец А. В. Решение задачи упругого осевого сжатия-растяжения композитного многослойного цилиндрического стержня. *Проблеми міцності*. 2019. № 2. С. 83–96.
25. Композиционные материалы: справочник / под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. Москва: Машиностроение, 1990. 512 с.
26. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д. М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
27. Конструкционные стеклопластики / В. И. Альперин и др. Москва: Химия, 1979. 360 с.
28. Кострова М. М., Наумова И. Ю., Ахундов В. М. Визуализация волокнистых материалов при больших деформациях. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 1. С. 66–75.

29. Куимова Е. В., Труфанов Н. А. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами. *Вестник Самарского государственного университета*. 2009. № 4 (70). С. 129–148. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/chislennoe-prognozirovanie-effektivnyh-termovyazkoupругih-harakteristik-odnonappravlennogo-voloknistogo-kompozita-s-vyazkoupругimi>. (дата звернення: 12.10.2020).
30. Лапин А. А. Плоская деформация резинокордовой ткани. *Расчеты на прочность в машиностроении*. Москва: Машгиз, 1955. С. 87–99.
31. Магомедов Г. М., Яхьяева Х. Ш., Козлов Г. В. Молекулярная подвижность и межфазные явления в композитах эпоксиполимер/стекловолокно. *Известия ДГПУ: Естественные и точные науки*. 2013. № 4 (25). С. 16–19. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/molekulyarnaya-podvizhnost-i-mezhfaznye-yavleniya-v-kompozitah-epoksipolimer-steklovolokno>. (дата звернення: 12.10.2020).
32. Математическое моделирование и исследование напряженно-деформированного состояния отсеков ракет космического назначения / Д. В. Акимов и др. *Космическая техника. Ракетное вооружение*. 2019. Вып. 1 (117). С. 21–27. DOI: 10.33136/stma2019.01.021.
33. Математическое обеспечение анализа прочности силовых элементов ракетно-космической техники / Д. В. Акимов и др. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2017. № 26. С. 5–21.
34. Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3-х т. / под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 1: Механика материалов / под. ред. Л. П. Хорошуна. Киев: Наукова думка, 1982. 368 с.
35. Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3-х т. / под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 2 Механика элементов конструкций / под. ред. Я. М. Григоренко. Киев: Наукова думка, 1983. 464 с.

36. Машуков Х. Х., Новиков В. У., Козлов Г. В., Бурьян О. Ю. Влияние некоторых структурных факторов на объем межфазного слоя в наполненных композитах. *Материаловедение*. 2000. № 1. С. 35–37.
37. Нелюб В. А. Характеристики межфазных слоев полимерных композиционных материалов. *Клеи. Герметики. Технологии*. 2013. № 6. С. 23–25.
38. Новиков В. У., Бурьян О. Ю. Моделирование межфазного слоя в анизотропных композитах. *Прикладная физика*. 2000. № 1. С. 67–78.
39. Новиков В. У., Власов А. В., Бурьян О. Ю. Разработка методики исследования межфазного слоя в гибридных полимерных композитах. *Материаловедение*. 1999. № 1. С. 20–24.
40. Рубашевський В. В., Заразовський М. М., Шукаєв С. М. Аналіз методів визначення констант пружності однонаправленого шару композиційних матеріалів. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2017. № 2 (80). С. 107–112. DOI: 10.20535/2521-1943.2017.80.109634.
41. Современные композиционные материалы: перев. с англ. / под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. Москва: Мир, 1970. 672 с.
42. Соловей М. О., Кривенко О. П., Міщенко О. О. Визначення ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 92. С. 30–49. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/omts_2014_92_5. (дата звернення: 12.10.2020).
43. Столярова А. В., Гребенюк С. М., Клименко М. І. Поздовжній модуль пружності волокнистого композиту з перехідним шаром. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 2. С. 130–142. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-14.
44. Столярова А. В. Вплив перехідного шару на поздовжній модуль пружності волокнистого композиту. *Актуальні проблеми математики та інформатики: збірка тез доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників*

- (Запоріжжя, 25–26 квітня 2019 р.). Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2019. С. 123–124.
45. Столярова А. В. Ефективний позадовжній модуль пружності та коефіцієнт Пуассона композиту з ізотропним порожнистим волокном та ізотропною матрицею. *Актуальні проблеми математики та інформатики: збірка тез доповідей Дев'ятої Всеукраїнської, шістнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників* (Запоріжжя, 26–27 квітня 2018 р.). Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2018. С. 133–134.
46. Столярова А. В. Ефективний позадовжній модуль пружності і коефіцієнт Пуассона композиту з трансропними матрицею та порожнистим волокном. *Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів* (Харків, 15–18 квітня 2019 р.). Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного, 2019. С. 11.
47. Столярова А. В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із трансропними порожнистими волокнами: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с.
48. Тангорра Г. Упрощенные расчеты многослойных резинокордных пластин как комбинации ортотропных слоев. *Труды международной конференции по каучуку и резине*. Москва: Химия, 1971. С. 459–467.
49. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости: перев. с англ. / под ред. Г. С. Шапиро. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975. 576 с.
50. Хорошун Л. П., Левчук О. И. Эффективные упругие свойства стохастических однонаправленных волокнистых композитов при несовершенной адгезии. *Доповіді Національної академії наук України*. 2018. № 9. С. 51–63. DOI: 10.15407/dopovidi2018.09.051.

51. Abolin'sh D. S. Compliance tensor for an elastic material reinforced in one direction. *Mekhanika Polimerov*. 1965. Vol. 1 (4). P. 28–32. DOI: 10.1007/bf00858888.
52. Aimmanee S., Trakarnkulchai S., Aimmanee P. Micromechanics of a smart composite actuator embedded with hollow piezoelectric fibers. *ASME 2011: proceedings of the Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems* (Scottsdale, Arizona, USA, 18–21 September 2011). 2011. Vol. 1. P. 465–474. DOI: 10.1115/smasis2011-5126.
53. Akasaka T. Structural mechanics of radial tires. *Rubber Chemistry and Technology*. 1981. Vol. 54 (3). P. 461–492. DOI: 10.5254/1.3535818.
54. Akhundov V. M. Analysis of elastomeric composites based on fiber-reinforced systems. 1. Development of design methods for composite materials. *Mechanics of Composite Materials*. 1998. Vol. 34 (6). P. 515–524. DOI: 10.1007/bf02254660.
55. Akhundov V. M. Analysis of elastomeric composites based on fiber-reinforced systems. 2. Unidirectional composites. *Mechanics of Composite Materials*. 1999. Vol. 35 (1). P. 19–32. DOI: 10.1007/bf02260808.
56. Akhundov V. M. Analysis of elastomeric composites based on fiber-reinforced systems 3. Two-directional composites. *Mechanics of Composite Materials*. 1999. Vol. 35 (4). P. 325–334. DOI: 10.1007/bf02259721.
57. Akhundov V. M. Analysis of elastomeric composites based on fiber Systems. 4. 3D composites. *Mechanics of Composite Materials*. 2001. Vol. 37 (3). P. 223–236. DOI: 10.1023/a:1010642501456.
58. Akhundov V. M., Kostrova M. M. Naumova I. Ju. Graphic visualization of deformed fibre-reinforced materials. *Metallurgical and Mining Industry*. 2017. Vol. 2. P. 52–58. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/metmi_2017_2_9. (дата звернення: 12.10.2020).
59. Akhundov V. M. Structural macroscopic theory of stiff and soft composites. Invariant description. *Mechanics of Composite Materials*. 1998. Vol. 34 (5). P. 419–432. DOI: 10.1007/bf02254706.

60. Akhundov V. M. Structural theory of elastomeric composites based on fiber systems – Invariant description. *Mechanics of Composite Materials*. 1996. Vol. 32 (2). P. 156–175. DOI: 10.1007/bf02254784.
61. Ashton J. E., Halpin J. C., Petit P. H. Primer on composite materials: analysis. Stamford, Connecticut: Technomic, 1969. 124 p.
62. Balaji R., Sasikumar M., Jeyanthi S. Characterisation of hollow glass fibre reinforced vinyl-ester composites. *Indian Journal of Science and Technology*. 2016. Vol. 9, Issue 48. P. 1–5. DOI: 10.17485/ijst/2016/v9i48/107921.
63. Bardella L., Genna F. On the elastic behavior of syntactic foams. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38 (40-41). P. 7235–7260. DOI: 10.1016/s0020-7683(00)00228-6.
64. Bayat M., Aghdam M. M. A micromechanics based analysis of hollow fiber composites using DQEM. *Composites Part B: Engineering*. 2012. Vol. 43, Issue 8. P. 2921–2929. DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.06.021.
65. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mechanics of Materials*. 2001. Vol. 33 (6). P. 309–323. DOI: 10.1016/s0167-6636(01)00055-2.
66. Bond I. P., Trask R. S., Williams H. R. Self-healing fiber-reinforced polymer composites. *MRS Bulletin*. 2008. Vol. 33 (08). P. 770–774. DOI: 10.1557/mrs2008.164.
67. Brei D., Cannon B. J. Piezoceramic hollow fiber active composites. *Composites Science and Technology*. 2004. Vol. 64 (2). P. 245–261. DOI: 10.1016/s0266-3538(03)00259-8.
68. Bulat A. F., Dyrda V. I., Grebenyuk S. M., Klymenko M. I. Determination of effective characteristics of a fibrous composite with account of viscoelastic deformation of its components. *Strength of Materials*. 2020. Vol. 52, Issue 5. P. 691–699. DOI: 10.1007/s11223-020-00221-7.
69. Bulat A. F., Dyrda V. I., Grebenyuk S. N., Klimenko M. I. Determination of effective characteristics of the fibrous viscoelastic composite with transversal

- and isotropic components. *Strength of Materials*. 2019. Vol. 51, Issue 2. P. 183–192. DOI: 10.1007/s11223-019-00064-x.
70. Buryan O. K., Novikov V. U. Modeling of the interphase of polymer-matrix composites: Determination of its structure and mechanical properties. *Mechanics of Composite Materials*. 2002. Vol. 38 (3). P. 187–198. DOI: 10.1023/a:1016008432083.
71. Dehtiarov M. O., Dziuba A. P., Avramov K. V., Sirenko V. M. Methods to reduce material intensity of tail sections of launch vehicles. *Journal of Mechanical Engineering*. 2020. Vol. 23 (3). P. 27–36. DOI: 10.15407/pmach2020.03.027.
72. Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers / J. C. Lopez-Realpozo and etc. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51. P. 1253–1262. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.015.
73. Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites / S. Kari and etc. *Composites Science and Technology*. 2007. Vol. 68 (3-4). P. 684–691. DOI: 10.1016/j.compscitech.2007.09.009.
74. Experimental and theoretical investigation of hollow polyester fibers effect on impact behavior of composites / M. Nasr-Isfahami and etc. *Journal of Industrial Textiles*. 2017. Vol. 47 (7). P. 1528–1542. DOI: 10.1177/1528083717699367.
75. Gough V. E. Stiffness of cord and rubber constructions. *Rubber Chemistry and Technology*. 1968. Vol. 41 (4). P. 988–1021. DOI: 10.5254/1.3547240.
76. Grebenyuk S., Klimenko M. Shear modulus of a fiber composite with a transtropic viscoelastic matrix and transtropic elastic fiber. *Journal of Mechanical Engineering*. 2018. Vol. 21, Issue 3. P. 47–53. DOI: 10.15407/pmach2018.03.047.
77. Grebenyuk S., Klymenko M., Stoliarova A., Titova O. Longitudinal shear modulus of the composite material with hollow fibers. *Mechanika 2019*:

- proceedings of the 24th International scientific conference (Kaunas, Lithuania, 17 May 2019). Kaunas: Kaunas University of Technology, 2019. P. 45–48.
78. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O., Boguslavska A. Effective longitudinal elastic modulus of the composite with viscoelastic matrix and transtropic fiber. *Mechanika 2015*: proceedings of the 20th International scientific conference (Kaunas, Lithuania, 23–24 April 2015). Kaunas: Kaunas University of Technology, 2015. P. 96–100.
79. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O. Mechanical properties of the composite with viscoelastic isotropic matrix and transversally isotropic fiber under transverse tension. *Mechanika 2016*: proceedings of the 21th International scientific conference (Kaunas, Lithuania, 12–13 May 2016). Kaunas: Kaunas University of Technology, 2016. P. 94–97.
80. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O., Smoliankova T. Effective characteristics of the viscoelastic fiber-reinforced composite with transversally isotropic components under transverse shear. *Mechanika 2018*: proceedings of the 23th International scientific conference (Kaunas, Lithuania, 18 May 2018). Kaunas: Kaunas University of Technology, 2018. P. 31–35.
81. Grebenyuk S., Smoliankova T., Klymenko M., Kudin O. The homogenization of multimodular composites at their longitudinal deformation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 3, No. 7 (105). P. 13–19. DOI: 10.15587/1729-4061.2020.199968.
82. Guz' A. N., Cherevko M. A. Compression failure of a unidirectional fibrous composite with an elastoplastic matrix. *Mechanics of Composite Materials*. 1983. Vol. 18 (6). P. 656–663. DOI: 10.1007/bf00604145.
83. Hashin Z., Rosen B. W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials *Journal of Applied Mechanics*. 1964. Vol. 31 (2). P. 223–232. DOI: 10.1115/1.3629590.
84. Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2002. Vol. 50 (12) P. 2509–2537. DOI: 10.1016/s0022-5096(02)00050-9.

85. Homeniuk S., Grebenyuk S., Klimenko M., Stoliarova A. Determining the effective characteristics of a composite with hollow fiber at longitudinal elongation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 6/7 (96). P. 6–12. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.143406.
86. Hucker M., Bond I, Bleay S., Haq S. Experimental evaluation of unidirectional hollow glass fibre/epoxy composites under compressive loading. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2003. Vol. 34 (10). P. 927–932. DOI: 10.1016/s1359-835x(03)00236-7.
87. Hucker M., Bond I., Bleay S., Haq S. Investigation into the behaviour of hollow glass fibre bundles under compressive loading. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2003. Vol. 34 (11). P. 1045–1052. DOI: 10.1016/s1359-835x(03)00238-0.
88. Ivanov O. N., Valiullin A. K., Ievenko V. F., Ioseliani V. P. Mechanical properties of a hollow-fiber glass-reinforced plastic. *Polymer Mechanics*. 1973. Vol. 7 (2). P. 298–302. DOI: 10.1007/bf00855871.
89. Kaminskii A. A., Selivanov M. F. A Method for determining the viscoelastic characteristics of composites. *International Applied Mechanics*. 2005. Vol. 41, Issue 5. P. 469–480. DOI: 10.1007/s10778-005-0112-6.
90. Khoroshun L. P. Effective elastic properties of stochastic granular composites with interfacial defects. *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53 (5). P. 574–587. DOI: 10.1007/s10778-017-0839-x.
91. Klasztorny M., Konderla P., Piekarski R. An exact stiffness theory for unidirectional xFRP composites. *Mechanics of Composite Materials*. 2009. Vol. 45 (1). P. 77–104. DOI: 10.1007/s11029-009-9064-y.
92. Kling S., Czigany T. A comparative analysis of hollow and solid glass fibers. *Textile Research Journal*. 2013. Vol. 83 (16). P. 1764–1772. DOI: 10.1177/0040517513478455.
93. Klusemann B., Svendsen B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites: comparisons and benchmarks. *Technische mechanik*. 2010.

- Vol. 30 (4). P. 374–386. URL: http://www15.ovgu.de/ifme/zeitschrift_tm/2010_Heft4/07_Klusemann.pdf. (дата звернення: 12.10.2020).
94. Klyavlin V. V. A cylindrical shell, reinforced in one direction by hollow fibers, subject to torsion in the plane of reinforcement. *Soviet Applied Mechanics*. 1969. Vol. 5 (5). P. 460–464. DOI: 10.1007/bf00887328.
95. Ko Y.-F., Ju J. W. New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223. P. 2437–2458. DOI: 10.1007/s00707-012-0696-y.
96. Lorsch H. G. Buckling tests of plastic specimens reinforced by hollow or solid glass fibers: final report. Contract NOTS 60530/4064Y6598-61, General Electric Company, Philadelphia, 1961. 176 p.
97. Marur P. R. Effective elastic moduli of syntactic foams. *Materials Letters*. 2005. Vol. 59 (14-15). P. 1954–1957. DOI: 10.1016/j.matlet.2005.02.034.
98. Nasr-Isfahani M., Latifi M., Amani-Tehran M. Improvement of impact damage resistance of epoxy-matrix composites using ductile hollow fibers. *Journal of engineered fibers and fabrics*. 2013. Vol. 8, Issue 1. P. 69–74. DOI: 10.1177/155892501300800108.
99. Pan'kov A. A. Generalized self-consistent method: Modeling and computation of effective elastic properties of composites with composite or hollow inclusions. *Mechanics of composite materials*. 1998. Vol. 34 (2). P. 123–131. DOI: 10.1007/bf02256032.
100. Rosen B. W., Ketler A. E., Hashin Z. Hollow glass fiber reinforced plastics: final report. Contract NOw-61-0613-d, General Electric Company, Philadelphia, 1962. 182 p.
101. Sockalingam S., Nilakantan G. Fiber-matrix interface characterization through the microbond test. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. 2012. Vol. 13 (3). P. 282–295. DOI: 10.5139/IJASS.2012.13.3.282.
102. Srivastava V. K., Gabbert U., Berger H., Singh S. Analysis of particles loaded fiber composites for the evaluation of effective material properties with the

- variation of shape and size. *International Journal of Engineering, Science and Technology*. 2011. Vol. 3, Issue 1. P. 52–68. DOI: 10.4314/ijest.v3i1.67638.
103. Stagni L. Effective transverse elastic moduli of a composite reinforced with multilayered hollow-cored fibers. *Composites Science and Technology*. 2001. Vol. 61, Issue 12. P. 1729–1734. DOI: 10.1016/s0266-3538(01)00071-9.
104. Tang T., Yu W. A variational asymptotic micromechanics model for predicting conductivities of composite materials. *Journal of mechanics of materials and structures*. 2007. Vol. 2, Issue 9. P. 1813–1830. DOI: 10.2140/jomms.2007.2.1813.
105. Theocaris P. S., Sideridis E. P., Papanicolaou G. C. The elastic longitudinal modulus and Poisson's ratio of fiber composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 1985. Vol. 4. P. 396–418. DOI: 10.1177/073168448500400405.
106. Van Fo Fy G. A. Basic relations of the theory of oriented glass-reinforced plastics (GRP) with hollow fibers. *Mekhanika Polimerov*. 1966. Vol. 2, Issue 5. P. 478–483. DOI: 10.1007/bf00858713.
107. Van Fo Fy G. A. Elastic constants and state of stress of glass-reinforced strip. *Mekhanika Polimerov*. 1966. Vol. 2, Issue 4. P. 368–372. DOI: 10.1007/bf00860076.
108. Van Fo Fy G. A., Klyavlin V. V. Effective use of composite materials directionally reinforced with hollow fibers. *Strength of Materials*. 1972. Vol. 4, Issue 4. P. 389–393. DOI: 10.1007/bf01527883.
109. Van Fo Fy G. A. Prestressed oriented glass-reinforced plastics with hollow fibers. *Soviet Applied Mechanics*. 1966. Vol. 2 (7). P. 1–5. DOI: 10.1007/bf00886541.
110. Walter J. D., Patel H. P. Approximate expressions for the elastic constants of cord-rubber laminates. *Rubber Chemistry and Technology*. 1979. Vol. 52 (4). P. 710–724. DOI: 10.5254/1.3535235.

111. Wang G., Pindera M.-J. Locally-exact homogenization of unidirectional composites with coated or hollow reinforcement. *Materials and Design*. 2016. Vol. 93. P. 514–528. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.12.168.
112. Wang G., Tu W., Pindera M.-J. Tailoring the moduli of composites using hollow reinforcement. *Composite Structures*. 2017. Vol. 160. P. 838–853. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.10.060.
113. Wu D. Y., Meure S., Solomon D. Self-healing polymeric materials: A review of recent developments. *Progress in Polymer Science*. 2008. Vol. 33 (5). P. 479–522. DOI: 10.1016/j.progpolymsci.2008.02.001.
114. Würkner M., Berger H., Gabbert U. Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface. *International Journal of Engineering Science*. 2013. Vol. 63. P. 1–9. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.10.002.
115. Xiao P., Yifeng Z., Zheng S., Peng W. Estimation of effective properties of composite sandwich panels with negative Poisson's ratio by using variational asymptotic multiscale method. *Materials Today Communications*. 2020. Vol. 23. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.mtcomm.2020.101072.
116. Yao Y., Chen S., Chen P. The effect of a graded interphase on the mechanism of stress transfer in a fiber-reinforced composite. *Mechanics of Materials*. 2013. Vol. 58. P. 35–54. DOI: 10.1016/j.mechmat.2012.11.008.
117. Yao Y., Chen S. The effects of fiber's surface roughness on the mechanical properties of fiber-reinforced polymer composites. *Journal of Composite Materials*. 2012. Vol. 47 (23). P. 2909–2923. DOI: 10.1177/0021998312459871.
118. Yu W., Tang T. Variational asymptotic method for unit cell homogenization. *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures. Solid Mechanics and Its Applications*. 2009. Vol. 168. P. 117–130. DOI: 10.1007/978-90-481-3467-0_9.

119. Zhitomirsky I., Gal-Or L. Formation of hollow fibers by electrophoretic deposition. *Materials Letters*. 1999. Vol. 38 (1). P. 10–17.
DOI: 10.1016/s0167-577x(98)00124-4.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В
ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \quad (\text{A.6})$$

Рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + G_r = 0; \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + G_\theta = 0; \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + G_z = 0. \quad (\text{A.9})$$

Закон Гука для ізотропного матеріалу:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{rr} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right); \quad (A.10)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right); \quad (A.11)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{zz} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right); \quad (A.12)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\theta z}; \quad (A.13)$$

$$\gamma_{zr} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zr}; \quad (A.14)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{r\theta} \quad (A.15)$$

або

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_{rr} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right); \quad (A.16)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_{\theta\theta} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \right); \quad (A.17)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_{zz} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \right); \quad (A.18)$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\sigma_{zr}}{G}; \quad (A.19)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\sigma_{\theta z}}{G}; \quad (A.20)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{G}. \quad (A.21)$$

Зворотний закон Гука:

$$\sigma_{rr} = 2G \left(\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right); \quad (A.22)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \left(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right); \quad (A.23)$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right); \quad (A.24)$$

$$\sigma_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}; \quad (A.25)$$

$$\sigma_{zr} = G\gamma_{zr}; \quad (A.26)$$

$$\sigma_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} \quad (A.27)$$

або

$$\sigma_{rr} = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right); \quad (A.28)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) \right); \quad (A.29)$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \right); \quad (A.30)$$

$$\sigma_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}; \quad (A.31)$$

$$\sigma_{zr} = G\gamma_{zr}; \quad (A.32)$$

$$\sigma_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}. \quad (A.33)$$

Рівняння стану трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{zz} + \frac{1}{E_2} \sigma_{rr} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{rr} - (\nu_{21} \sigma_{zz} + \nu_{23} \sigma_{\theta\theta})); \quad (\text{A. 34})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{zz} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{rr} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{\theta\theta} - (\nu_{21} \sigma_{zz} + \nu_{23} \sigma_{rr})); \quad (\text{A. 35})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} \sigma_{zz} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{rr} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{zz} - \nu_{12} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})); \quad (\text{A. 36})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1 + \nu_{23})}{E_2} \sigma_{r\theta}; \quad (\text{A. 37})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{zr}; \quad (\text{A. 38})$$

$$\gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{z\theta}. \quad (\text{A. 39})$$

Зворотний закон Гука для ортотропного матеріалу:

$$\sigma_{zz} = \frac{E_1 ((1 - \nu_{23}\nu_{32})\varepsilon_{zz} + (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})\varepsilon_{rr} + (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \quad (\text{A. 40})$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2 ((\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})\varepsilon_{zz} + (1 - \nu_{13}\nu_{31})\varepsilon_{rr} + (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \quad (\text{A. 41})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_3 ((\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})\varepsilon_{zz} + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})\varepsilon_{rr} + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \quad (\text{A. 42})$$

$$\sigma_{zr} = G_{12} \gamma_{zr}; \quad (\text{A. 43})$$

$$\sigma_{z\theta} = G_{31} \gamma_{z\theta}; \quad (\text{A. 44})$$

$$\sigma_{r\theta} = G_{23} \gamma_{r\theta}. \quad (\text{A. 45})$$

Зворотний закон Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\sigma_{zz} = \frac{E_1((1 - \nu_{23}^2)\varepsilon_{zz} + \nu_{21}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{rr} + \nu_{21}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (A.46)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{rr} + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (A.47)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_2(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12})\varepsilon_{rr} + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (A.48)$$

$$\sigma_{zr} = G_{12}\gamma_{zr}; \quad (A.49)$$

$$\sigma_{z\theta} = G_{12}\gamma_{z\theta}; \quad (A.50)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}\gamma_{r\theta}. \quad (A.51)$$

ДОДАТОК Б

**ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ СТАЛІ ВОЛОКНИСТОГО
КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ПОРОЖНИСТИМИ
ВОЛОКНАМИ НА ОСНОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЕДСТАВНИЦЬКОГО
ОБ'ЄМНОГО ЕЛЕМЕНТА**

**Б.1 – Ефективні пружні сталі композиту з ізотропними матрицею та
порожнистим волокном**

1. Поздовжній модуль пружності:

$$E_1 = E^* \frac{\alpha}{d^\circ \alpha - \gamma} (d^* f + d^\circ (1 - f - g)),$$

де f та g – об'ємний вміст волокна та порожнини в композиті відповідно;

E^* – модуль пружності матеріалу матриці;

ν^* – коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці;

E° – модуль пружності матеріалу волокна;

ν° – коефіцієнт Пуассона матеріалу волокна;

$$d^\circ = \frac{\alpha + \beta \nu^\circ}{\alpha E^\circ};$$

$$d^* = \frac{\alpha + \beta \nu^*}{\alpha E^*};$$

$$\alpha = (1 - f - g) \left((E^* \nu^\circ - E^\circ \nu^*) f - E^* (f + 2g) \right) - E^\circ f (1 + f + g);$$

$$\beta = 2(f + g)(\nu^\circ E^* (1 - f - g) + \nu^* E^\circ f);$$

$$\gamma = 2\nu^* f (f + g)(\nu^\circ - \nu^*).$$

2. Коефіцієнт Пуассона:

$$\nu_{12} = \frac{\nu^{*2} d^\circ \alpha - \gamma}{\nu^* (d^\circ \alpha - \gamma)}.$$

3. Поздовжній модуль зсуву:

$$G_{12} = \frac{G^* \left(G^\circ f(1+f+g)^2 + G^\circ(f+2g)(1-(f+g)^2) \right)}{G^*(f+2g)(1+f+g)^2 + G^\circ f(1-(f+g)^2)}.$$

4. Поперечний модуль пружності:

на основі рівності радіальних переміщень

$$E_2 = 2\eta E^* / \left(\eta \left((1+\nu^*)(4\gamma_3(1-\nu^*) + 1) + \gamma_1 \right) + \right. \\ \left. + 2(f+g) \left(f\gamma_1 E^\circ - E^* \left((f+2g)\gamma_2 + 2g\nu^\circ \right) \right) \right),$$

$$\text{де } \gamma_1 = (1-\nu^*) - \frac{d_0 f \nu^*}{d^* f + d^\circ (1-f-g)};$$

$$\gamma_2 = (1-\nu^\circ) - \frac{d^\circ (f+g-1)\nu^\circ}{d^* f + d^\circ (1-f-g)};$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{3\chi_3(g-1)(f+2g+1)(f+g-1)} \times \\ \times \left(\left((f+g)(3g(f+2g) - 2(f+3)) - fg \right) \chi_1 + f^2 \chi_2 + \right. \\ \left. + ((f+g)^2 + g(f+2g)) \chi_3 \right);$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{3\chi_3(g-1)(f+2g+1)(f+g-1)} \times \\ \times \left(\left((g-1)(4(f+g)^2 + g(f+2g)) - f^2 g \right) \chi_1 - \right. \\ \left. - f^2 \chi_2 - ((f+g)^2 + g(f+2g)) \chi_3 \right);$$

$$d^\circ = \frac{\nu^\circ}{E^\circ} \left(\nu^\circ \left(\frac{\tau}{\eta} f + 1 \right) - \frac{2\nu^\circ}{1-\nu^\circ} - 2\nu^* E^\circ f \frac{f+g}{\eta} \right) - \frac{1-\nu^\circ(1+2\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^\circ)};$$

$$d^* = \frac{\nu^*}{E^*} \left(\nu^\circ \left(\frac{\tau}{\eta} f + 1 \right) - \frac{2\nu^*}{1-\nu^*} - 2\nu^* E^\circ f \frac{f+g}{\eta} \right) - \frac{1-\nu^*(1+2\nu^*)}{E^*(1-\nu^*)};$$

$$d_0 = \left(\frac{\nu^\circ \tau}{E^\circ \eta} - 2\nu^* \frac{f+g}{\eta} \right) \left(\frac{E^\circ}{E^*} f(1-\nu^*) - f(1-\nu^\circ) - 2g \right) + \\ + \frac{\nu^\circ}{E^\circ} (1+\nu^\circ) + \frac{1}{E^*} (\nu^\circ(1-\nu^*) - 2\nu^*);$$

$$\eta = E^* \left(2g + f(1-\nu^\circ) \right) (f+g-1) -$$

$$\begin{aligned}
& -fE^\circ((f+g)(1-v^*)+(1+v^*)); \\
\tau &= E^*(1+v^\circ)(f+g-1)+E^\circ((f+g)(1-v^*)+(1+v^*)); \\
\chi_1 &= d_{13}t_4-d_{23}t_3; \\
\chi_2 &= d_{23}t_2-d_{13}t_1; \\
\chi_3 &= t_1t_3-t_2t_4; \\
d_{11} &= k_{11}(f^2+3(f+g)(g-1))-3k_{12}(f+g)(g-1)(f+2g+1); \\
d_{12} &= k_{13}((f+g)^2+(f+g)(1-3g)+1)- \\
& \quad -3k_{14}(f+g)(g-1)(f+2g+1); \\
d_{13} &= k_{13}E^*(f+g-1)((f+g)^2+f+g+1)+ \\
& \quad +E^\circ f(k_{11}(f^2+3g(f+g))- \\
& \quad -3(1+v^*)(f+g)^2(f+g-1)(g-1)(f+2g+1)); \\
d_{21} &= k_{21}(f^2+3(f+g)(g-1))+3k_{22}(f+g)(g-1)(f+2g+1); \\
d_{22} &= k_{23}((f+g)^2+(f+g)(1-3g)+1)- \\
& \quad -3k_{24}(f+g)(g-1)(f+2g+1); \\
d_{23} &= k_{23}E^*(f+g-1)((f+g)^2+f+g+1)+ \\
& \quad +E^\circ f(k_{21}(f^2+3g(f+g))- \\
& \quad -3(1+v^*)(f+g)^2(f+g-1)(g-1)(f+2g+1)); \\
k_{11} &= (1+v^*)(4v^*(f+g)^3-3(f+g)^2-1); \\
k_{12} &= 4(f+g)(1-(v^*)^2)+(1+v^*)((f+g)^2-1); \\
k_{13} &= (1+v^\circ)\left((f+g)^2(3g-4v^\circ(f+g))+g^3\right); \\
k_{14} &= (1+v^\circ)\left((f+g)(f+g+4g(1-v^\circ))-g^2\right); \\
k_{21} &= 2(f+g)^3(3+v^*(1-2v^*))+(1+v^*)(1-3(f+g)^2); \\
k_{22} &= 2(f+g)(v^*(1+2v^*)-1)-(1+v^*)((f+g)^2+1); \\
k_{23} &= (3g(f+g)^2-g^3)(1+v^\circ)-2(f+g)^3(3+v^\circ(1-2v^\circ)); \\
k_{24} &= ((f+g)^2+g^2)(1+v^\circ)-2g(f+g)(v^\circ(1+2v^\circ)-1); \\
t_1 &= d_{21}E^\circ f+k_{23}E^*(f+g-1)^3; \\
t_2 &= d_{11}E^\circ f+k_{13}E^*(f+g-1)^3;
\end{aligned}$$

$$t_3 = k_{11}E^\circ f^3 + d_{12}E^*(f + g - 1);$$

$$t_4 = k_{21}E^\circ f^3 + d_{22}E^*(f + g - 1),$$

на основі рівності окружних переміщень

$$E_2 = 2\eta E^* / (\eta((1 + \nu^*)(4\gamma_4(1 - \nu^*) + 1) + \gamma_1) + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E^\circ - E^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2gv^\circ \right) \right)).$$

5. Коефіцієнт Пуассона:

на основі рівності радіальних переміщень

$$\begin{aligned} \nu_{23} = & (\eta((1 + \nu^*)(4\gamma_3(1 - \nu^*) + 1) - \gamma_1) - \\ & - 2(f + g) \left(f\gamma_1 E^\circ - E^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2gv^\circ \right) \right)) / \\ & (\eta((1 + \nu^*)(4\gamma_3(1 - \nu^*) + 1) + \gamma_1) + \\ & + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E^\circ - E^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2gv^\circ \right) \right)), \end{aligned}$$

на основі рівності окружних переміщень

$$\begin{aligned} \nu_{23} = & (\eta((1 + \nu^*)(4\gamma_4(1 - \nu^*) + 1) - \gamma_1) - \\ & - 2(f + g) \left(f\gamma_1 E^\circ - E^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2gv^\circ \right) \right)) / \\ & (\eta((1 + \nu^*)(4\gamma_4(1 - \nu^*) + 1) + \gamma_1) + \\ & + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E^\circ - E^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2gv^\circ \right) \right)). \end{aligned}$$

Б.2 – Ефективні пружні сталі композиту з ізотропною матрицею та траністропним порожнистим волокном

1. Поздовжній модуль пружності:

$$E_1 = E^* \frac{\alpha}{d^\circ \alpha - \gamma} \left(d^* f + d^\circ (1 - f - g) \right),$$

де f та g – об'ємний вміст волокна та порожнини в композиті відповідно;

E^* – модуль пружності матеріалу матриці;

ν^* – коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці;

E_1° – поздовжній модуль пружності матеріалу волокна;

E_2° – поперечний модуль пружності матеріалу волокна;

$\nu_{12}^\circ, \nu_{21}^\circ, \nu_{23}^\circ$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу волокна;

$$d^\circ = \frac{\alpha + \beta \nu_{12}^\circ}{\alpha E_1^\circ};$$

$$d^* = \frac{\alpha + \beta \nu^*}{\alpha E^*};$$

$$\alpha = (1 - f - g) \left((E^* \nu_{23}^\circ - E_2^\circ \nu^*) f - E^* (f + 2g) \right) - E_2^\circ f (1 + f + g);$$

$$\beta = 2(f + g) (\nu_{21}^\circ E^* (1 - f - g) + \nu^* E_2^\circ f);$$

$$\gamma = 2\nu^* f (f + g) (\nu_{21}^\circ - \nu^*).$$

2. Коефіцієнт Пуассона:

$$\nu_{12} = \frac{\nu^{*2} d^\circ \alpha - \gamma}{\nu^* (d^\circ \alpha - \gamma)}.$$

3. Поздовжній модуль зсуву

$$G_{12} = \frac{G^* \left(G_{12}^\circ f (1 + f + g)^2 + G^* (f + 2g) (1 - (f + g)^2) \right)}{G^* (f + 2g) (1 + f + g)^2 + G_{12}^\circ f (1 - (f + g)^2)}.$$

4. Поперечний модуль пружності:

на основі рівності радіальних переміщень

$$E_2 = 2\eta E^* / \left(\eta \left((1 + \nu^*) (4\gamma_3 (1 - \nu^*) + 1) + \gamma_1 \right) + \right. \\ \left. + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right) \right),$$

$$\text{де } \gamma_1 = (1 - \nu^*) - \frac{d_0 f \nu^*}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)};$$

$$\gamma_2 = (1 - \nu_{23}^\circ) - \frac{d^\circ (f + g - 1) \nu_{21}^\circ}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)};$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{3\chi_3 (g - 1) (f + 2g + 1) (f + g - 1)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left((f+g)(3g(f+2g) - 2(f+3)) - fg \right) \chi_1 + f^2 \chi_2 + \\ & + ((f+g)^2 + g(f+2g)) \chi_3); \end{aligned}$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{3\chi_3(g-1)(f+2g+1)(f+g-1)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(((g-1)(4(f+g)^2 + g(f+2g)) - f^2g) \chi_1 - \right. \\ & \left. - f^2 \chi_2 - ((f+g)^2 + g(f+2g)) \chi_3 \right); \end{aligned}$$

$$d^\circ = \frac{v_{21}^\circ}{E_2^\circ} \left(v_{21}^\circ \left(\frac{\tau}{\eta} f + 1 \right) - \frac{2v_{21}^\circ}{1 - v_{23}^\circ} - 2v^* E_2^\circ f \frac{f+g}{\eta} \right) - \frac{1 - v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ (1 - v_{23}^\circ)};$$

$$d^* = \frac{v^*}{E^*} \left(v_{21}^\circ \left(\frac{\tau}{\eta} f + 1 \right) - \frac{2v^*}{1 - v^*} - 2v^* E_2^\circ f \frac{f+g}{\eta} \right) - \frac{1 - v^*(1 + 2v^*)}{E^*(1 - v^*)};$$

$$\begin{aligned} d_0 &= \left(\frac{v_{21}^\circ \tau}{E_2^\circ \eta} - 2v^* \frac{f+g}{\eta} \right) \left(\frac{E_2^\circ}{E^*} f(1 - v^*) - f(1 - v_{23}^\circ) - 2g \right) + \\ & + \frac{v_{21}^\circ}{E_2^\circ} (1 + v_{23}^\circ) + \frac{1}{E^*} (v_{21}^\circ (1 - v^*) - 2v^*); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= E^* (2g + f(1 - v_{23}^\circ)) (f + g - 1) - \\ & - f E_2^\circ ((f+g)(1 - v^*) + (1 + v^*)); \end{aligned}$$

$$\tau = E^* (1 + v_{23}^\circ) (f + g - 1) + E_2^\circ ((f+g)(1 - v^*) + (1 + v^*));$$

$$\chi_1 = d_{13} t_4 - d_{23} t_3;$$

$$\chi_2 = d_{23} t_2 - d_{13} t_1;$$

$$\chi_3 = t_1 t_3 - t_2 t_4;$$

$$d_{11} = k_{11} (f^2 + 3(f+g)(g-1)) - 3k_{12} (f+g)(g-1)(f+2g+1);$$

$$\begin{aligned} d_{12} &= k_{13} ((f+g)^2 + (f+g)(1-3g) + 1) - \\ & - 3k_{14} (f+g)(g-1)(f+2g+1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{13} &= k_{13} E^* (f+g-1) ((f+g)^2 + f+g+1) + \\ & + E_2^\circ f (k_{11} (f^2 + 3g(f+g)) - \\ & - 3(1+v^*) (f+g)^2 (f+g-1) (g-1) (f+2g+1)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{21} &= k_{21} (f^2 + 3(f+g)(g-1)) + \\ & + 3k_{22} (f+g)(g-1)(f+2g+1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{22} &= k_{23}((f+g)^2 + (f+g)(1-3g) + 1) - \\
&\quad - 3k_{24}(f+g)(g-1)(f+2g+1); \\
d_{23} &= k_{23}E^*(f+g-1)((f+g)^2 + f+g+1) + \\
&\quad + E_2^\circ f(k_{21}(f^2 + 3g(f+g)) - \\
&\quad - 3(1+v^*)(f+g)^2(f+g-1)(g-1)(f+2g+1)); \\
k_{11} &= (1+v^*)(4v^*(f+g)^3 - 3(f+g)^2 - 1); \\
k_{12} &= 4(f+g)(1-(v^*)^2) + (1+v^*)((f+g)^2 - 1); \\
k_{13} &= (3g(f+g)^2 + g^3)(1+v_{23}^\circ) - 4(f+g)^3(v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ); \\
k_{14} &= ((f+g)^2 - g^2)(1+v_{23}^\circ) + 4g(f+g)(1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ); \\
k_{21} &= 2(f+g)^3(3+v^*(1-2v^*)) + (1+v^*)(1-3(f+g)^2); \\
k_{22} &= 2(f+g)(v^*(1+2v^*) - 1) - (1+v^*)((f+g)^2 + 1); \\
k_{23} &= (3g(f+g)^2 - g^3)(1+v_{23}^\circ) - 2(f+g)^3(3+v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ); \\
k_{24} &= ((f+g)^2 + g^2)(1+v_{23}^\circ) - 2g(f+g)(v_{23}^\circ + 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ - 1); \\
t_1 &= d_{21}E_2^\circ f + k_{23}E^*(f+g-1)^3; \\
t_2 &= d_{11}E_2^\circ f + k_{13}E^*(f+g-1)^3; \\
t_3 &= k_{11}E_2^\circ f^3 + d_{12}E^*(f+g-1); \\
t_4 &= k_{21}E_2^\circ f^3 + d_{22}E^*(f+g-1),
\end{aligned}$$

на основі рівності окружних переміщень

$$\begin{aligned}
E_2 &= 2\eta E^* / (\eta((1+v^*)(4\gamma_4(1-v^*) + 1) + \gamma_1) + \\
&\quad + 2(f+g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E^* \left((f+2g)\gamma_2 + 2gv_{23}^\circ \right) \right)).
\end{aligned}$$

5. Коефіцієнт Пуассона:

на основі рівності радіальних переміщень

$$\begin{aligned}
v_{23} &= (\eta((1+v^*)(4\gamma_3(1-v^*) + 1) - \gamma_1) - \\
&\quad - 2(f+g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E^* \left((f+2g)\gamma_2 + 2gv_{23}^\circ \right) \right)) / \\
&\quad (\eta((1+v^*)(4\gamma_3(1-v^*) + 1) + \gamma_1) + \\
&\quad + 2(f+g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E^* \left((f+2g)\gamma_2 + 2gv_{23}^\circ \right) \right)),
\end{aligned}$$

на основі рівності окружних переміщень

$$\begin{aligned} v_{23} = & \left(\eta \left((1 + \nu^*) (4\gamma_4 (1 - \nu^*) + 1) - \gamma_1 \right) - \right. \\ & \left. - 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right) \right) / \\ & \left(\eta \left((1 + \nu^*) (4\gamma_4 (1 - \nu^*) + 1) + \gamma_1 \right) + \right. \\ & \left. + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Б.3 – Ефективні пружні сталі композиту з трансверсально-ізотропними матрицею та порожнистим волокном

1. Поздовжній модуль пружності:

$$E_1 = E_1^* \frac{\alpha}{d^\circ \alpha - \gamma} \left(d^* f + d^\circ (1 - f - g) \right),$$

де f та g – об'ємний вміст волокна та порожнини в композиті відповідно;

E_1^* – поздовжній модуль пружності матеріалу матриці;

E_2^* – поперечний модуль пружності матеріалу матриці;

$\nu_{12}^*, \nu_{21}^*, \nu_{23}^*$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу матриці;

E_1° – поздовжній модуль пружності матеріалу волокна;

E_2° – поперечний модуль пружності матеріалу волокна;

$\nu_{12}^\circ, \nu_{21}^\circ, \nu_{23}^\circ$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу волокна;

$$d^\circ = \frac{\alpha + \beta \nu_{12}^\circ}{\alpha E_1^\circ};$$

$$d^* = \frac{\alpha + \beta \nu_{12}^*}{\alpha E_1^*};$$

$$\alpha = (1 - f - g) \left((E_2^* \nu_{23}^\circ - E_2^\circ \nu_{23}^*) f - E_2^* (f + 2g) \right) - E_2^\circ f (1 + f + g);$$

$$\beta = 2(f + g) (\nu_{21}^\circ E_2^* (1 - f - g) + \nu_{21}^* E_2^\circ f);$$

$$\gamma = 2f(f + g) \left(\nu_{21}^\circ E_2^* \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} - \nu_{21}^* E_2^\circ \frac{\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} \right).$$

2. Коефіцієнт Пуассона:

$$\nu_{12} = \frac{\nu_{21}^* \nu_{12}^* d^\circ \alpha - \gamma}{\nu_{21}^* (d^\circ \alpha - \gamma)}.$$

3. Поздовжній модуль зсуву:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^* \left(G_{12}^\circ f (1 + f + g)^2 + G_{12}^* (f + 2g) (1 - (f + g)^2) \right)}{G_{12}^* (f + 2g) (1 + f + g)^2 + G_{12}^\circ f (1 - (f + g)^2)}.$$

4. Поперечний модуль пружності:

на основі рівності радіальних переміщень

$$E_2 = 2\eta E_2^* / \left(\eta (4\gamma_3 (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + (1 + \nu_{23}^*) + \gamma_1) + \right. \\ \left. + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right) \right),$$

$$\text{де } \gamma_1 = (1 - \nu_{23}^*) - \frac{d_0 f \nu_{21}^*}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)};$$

$$\gamma_2 = (1 - \nu_{23}^\circ) - \frac{d^\circ (f + g - 1) \nu_{21}^\circ}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)};$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{3\chi_3 (g - 1) (f + 2g + 1) (f + g - 1)} \times \\ \times \left(\left((f + g) (3g(f + 2g) - 2(f + 3)) - fg \right) \chi_1 + f^2 \chi_2 + \right. \\ \left. + ((f + g)^2 + g(f + 2g)) \chi_3 \right);$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{3\chi_3 (g - 1) (f + 2g + 1) (f + g - 1)} \times \\ \times \left(\left((g - 1) (4(f + g)^2 + g(f + 2g)) - f^2 g \right) \chi_1 - \right. \\ \left. - f^2 \chi_2 - ((f + g)^2 + g(f + 2g)) \chi_3 \right);$$

$$d^\circ = \frac{\nu_{21}^\circ}{E_2^\circ} \left(\nu_{21}^\circ \left(\frac{\tau}{\eta} f + 1 \right) - \frac{2\nu_{21}^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ} - 2\nu_{21}^* E_2^\circ f \frac{f + g}{\eta} \right) - \\ - \frac{1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)};$$

$$d^* = \frac{\nu_{21}^*}{E_2^*} \left(\nu_{21}^\circ \left(\frac{\tau}{\eta} f + 1 \right) - \frac{2\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} - 2\nu_{21}^* E_2^\circ f \frac{f + g}{\eta} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1 - v_{23}^* - 2v_{21}^*v_{12}^*}{E_1^*(1 - v_{23}^*)}; \\
d_0 &= \left(\frac{v_{21}^\circ \tau}{E_2^\circ \eta} - 2v_{21}^* \frac{f + g}{\eta} \right) \left(\frac{E_2^\circ}{E_2^*} f(1 - v_{23}^*) - \right. \\
& \quad \left. - f(1 - v_{23}^\circ) - 2g \right) - \frac{2v_{21}^*}{E_2^*} + \frac{v_{21}^\circ}{E_2^\circ} (1 + v_{23}^\circ) + \frac{v_{21}^\circ}{E_2^*} (1 - v_{23}^*); \\
\eta &= E_2^* \left(2g + f(1 - v_{23}^\circ) \right) (f + g - 1) - \\
& \quad - f E_2^\circ \left((f + g)(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*) \right); \\
\tau &= E_2^* (1 + v_{23}^\circ) (f + g - 1) + E_2^\circ \left((f + g)(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*) \right); \\
\chi_1 &= d_{13}t_4 - d_{23}t_3; \\
\chi_2 &= d_{23}t_2 - d_{13}t_1; \\
\chi_3 &= t_1t_3 - t_2t_4; \\
d_{11} &= k_{11}(f^2 + 3(f + g)(g - 1)) - 3k_{12}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1); \\
d_{12} &= k_{13}((f + g)^2 + (f + g)(1 - 3g) + 1) - \\
& \quad - 3k_{14}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1); \\
d_{13} &= k_{13}E_2^*(f + g - 1)((f + g)^2 + f + g + 1) + \\
& \quad + E_2^\circ f(k_{11}(f^2 + 3g(f + g)) - \\
& \quad - 3(1 + v_{23}^*)(f + g)^2(f + g - 1)(g - 1)(f + 2g + 1)); \\
d_{21} &= k_{21}(f^2 + 3(f + g)(g - 1)) + \\
& \quad + 3k_{22}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1); \\
d_{22} &= k_{23}((f + g)^2 + (f + g)(1 - 3g) + 1) - \\
& \quad - 3k_{24}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1); \\
d_{23} &= k_{23}E_2^*(f + g - 1)((f + g)^2 + f + g + 1) + \\
& \quad + E_2^\circ f(k_{21}(f^2 + 3g(f + g)) - \\
& \quad - 3(1 + v_{23}^*)(f + g)^2(f + g - 1)(g - 1)(f + 2g + 1)); \\
k_{11} &= 4(f + g)^3(v_{23}^* + v_{21}^*v_{12}^*) - (1 + v_{23}^*)(1 + 3(f + g)^2); \\
k_{12} &= 4(f + g)(1 - v_{21}^*v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*)((f + g)^2 - 1); \\
k_{13} &= (3g(f + g)^2 + g^3)(1 + v_{23}^\circ) - 4(f + g)^3(v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{14} &= ((f + g)^2 - g^2)(1 + v_{23}^\circ) + 4g(f + g)(1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ); \\
k_{21} &= 2(f + g)^3(3 + v_{23}^* - 2v_{21}^* v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*)(1 - 3(f + g)^2); \\
k_{22} &= 2(f + g)(v_{23}^* + 2v_{21}^* v_{12}^* - 1) - (1 + v_{23}^*)((f + g)^2 + 1); \\
k_{23} &= (3g(f + g)^2 - g^3)(1 + v_{23}^\circ) - 2(f + g)^3(3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ); \\
k_{24} &= ((f + g)^2 + g^2)(1 + v_{23}^\circ) - 2g(f + g)(v_{23}^\circ + 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ - 1); \\
t_1 &= d_{21} E_2^\circ f + k_{23} E_2^*(f + g - 1)^3; \\
t_2 &= d_{11} E_2^\circ f + k_{13} E_2^*(f + g - 1)^3; \\
t_3 &= k_{11} E_2^\circ f^3 + d_{12} E_2^*(f + g - 1); \\
t_4 &= k_{21} E_2^\circ f^3 + d_{22} E_2^*(f + g - 1),
\end{aligned}$$

на основі рівності окружних переміщень

$$\begin{aligned}
E_2 &= 2\eta E_2^*/(\eta(4\gamma_4(1 - v_{21}^* v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*) + \gamma_1) + \\
&\quad + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g v_{23}^\circ \right) \right)).
\end{aligned}$$

5. Коефіцієнт Пуассона:

на основі рівності радіальних переміщень

$$\begin{aligned}
v_{23} &= (\eta(4\gamma_3(1 - v_{21}^* v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*) - \gamma_1) - \\
&\quad - 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g v_{23}^\circ \right) \right)) / \\
&\quad (\eta(4\gamma_3(1 - v_{21}^* v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*) + \gamma_1) + \\
&\quad + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g v_{23}^\circ \right) \right)),
\end{aligned}$$

на основі рівності окружних переміщень

$$\begin{aligned}
v_{23} &= (\eta(4\gamma_4(1 - v_{21}^* v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*) - \gamma_1) - \\
&\quad - 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g v_{23}^\circ \right) \right)) / \\
&\quad (\eta(4\gamma_4(1 - v_{21}^* v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*) + \gamma_1) + \\
&\quad + 2(f + g) \left(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left((f + 2g)\gamma_2 + 2g v_{23}^\circ \right) \right)).
\end{aligned}$$

ДОДАТОК В

Список публікацій здобувача

1. Homeniuk S., Grebenyuk S., Klimenko M., Stoliarova A. Determining the effective characteristics of a composite with hollow fiber at longitudinal elongation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 6/7 (96). P. 6–12. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.143406, ISSN: 1729-3774. (Особистий внесок – отримано формули для ефективних поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона для композита з транслопними матрицею та порожнистим волокном, що відображають залежність цих сталих від пружних характеристик матриці, волокна та об'ємних часток волокна та порожнини у матеріалі композита; проведено розрахунки за отриманими співвідношеннями, деякі з них представлені графічно).
2. Столярова А. В., Гребенюк С. М., Клименко М. І. Поздовжній модуль пружності волокнистого композиту з перехідним шаром. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 2. С. 130–142. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-14, ISSN: 2413-6549. (Особистий внесок – на основі представницького об'ємного елемента запропоновано підхід до визначення ефективного поздовжнього модуля пружності односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу із особливостями структури).
3. Grebenyuk S., Klymenko M., Stoliarova A., Titova O. Longitudinal shear modulus of the composite material with hollow fibers. *Mechanika 2019: proceedings of the 24th International scientific conference* (Kaunas, Lithuania, 17 May 2019). Kaunas: Kaunas University of Technology, 2019. P. 45–48. ISSN: 1822-2951. (Особистий внесок – отримано формули для ефективного поздовжнього модуля зсуву композиційного матеріалу з транслопними порожнистими волокнами; на чисельному прикладі

показано збіжність отриманих результатів з обчисленнями за відомими формулами для ізотропних компонентів).

4. Столярова А. В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із трансропними порожнистими волокнами: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с. ISBN: 978-966-992-520-6.
5. Столярова А. В. Ефективний поздовжній модуль пружності та коефіцієнт Пуассона композиту з ізотропним порожнистим волокном та ізотропною матрицею. *Актуальні проблеми математики та інформатики*: збірка тез доповідей Дев'ятої Всеукраїнської, шістнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників (Запоріжжя, 26–27 квітня 2018 р.). Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2018. С. 133–134.
6. Столярова А. В. Ефективний поздовжній модуль пружності і коефіцієнт Пуассона композиту з трансропними матрицею та порожнистим волокном. *Сучасні проблеми машинобудування*: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів (Харків, 15–18 квітня 2019 р.). Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного, 2019. С. 11.
7. Столярова А. В. Вплив перехідного шару на поздовжній модуль пружності волокнистого композиту. *Актуальні проблеми математики та інформатики*: збірка тез доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників (Запоріжжя, 25–26 квітня 2019 р.). Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2019. С. 123–124.

Апробація результатів дисертації

Основні положення роботи викладено та обговорено на науково-практичних конференціях різного рівня:

1. Дев'ята Всеукраїнська, шістнадцята регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (Запоріжжя, 26–27 квітня 2018 р., форма участі – постерна доповідь, публікація тез).
2. Конференція молодих вчених та спеціалістів «Сучасні проблеми машинобудування» (Харків, 15–18 квітня 2019 р., форма участі – публікація тез).
3. Десята Всеукраїнська, сімнадцята регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (Запоріжжя, 25–26 квітня 2019 р., форма участі – постерна доповідь, публікація тез).
4. The 24th International scientific conference «Mechanika 2019» (Kaunas, Lithuania, 17 May 2019, форма участі – публікація тез).
5. VII Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (Запоріжжя, 23–26 травня 2019 р., форма участі – усна доповідь).
6. VIII Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (Запоріжжя, 11–14 червня 2020 р., форма участі – постерна доповідь).

ДОДАТОК Г

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Ректор Запорізького національного
університету

М. О. Фролов

2021 р.

Акт

**про впровадження результатів кандидатської дисертації
СТОЛЯРОВІ АНАСТАСІЇ ВАЛЕРІЇВНИ
«Гомогенізація композиційного матеріалу
з порожнистими транстропними волокнами»**

Комісія в складі: к.ф.-м.н., доцента Лісняка А. О. (голова комісії), к.ф.-м.н., доцента Горбенка В. І., к.ф.-м.н., доцента Зіновєєва І. В. склала теперішній акт про те, що наукові дослідження, виконані Столяровою А.В. у дисертації на здобуття ступеня доктора філософії зі спеціальності 113 – «Прикладна математика», впроваджені в навчальний процес і застосовуються при викладанні курсу «Механіка деформівного твердого тіла» та виконанні кваліфікаційних робіт студентами спеціальності 111 – «Математика» Запорізького національного університету.

Члени комісії:

Завідувач кафедри
програмної інженерії,
к.ф.-м.н., доцент

А. О. Лісняк

Доцент кафедри
програмної інженерії,
к.ф.-м.н., доцент

В. І. Горбенко

Завідувач кафедри
загальної математики,
к.ф.-м.н., доцент

І. В. Зіновєєв